ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра систем передачи и обработки информации

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Ростов-на-Дону

2016 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Дискретная математика»

Методические указания для проведения практических занятий со студентами специальностей 09.03.01., 11.03.02.

Методические указания содержат разъяснения программного материала; в них кратко освещены отдельные вопросы, которые могут вызвать затруднения при выполнении заданий практических занятий, при самостоятельном изучении; приведены решения некоторых типовых задач.

Составители: Ст. преподаватель кафедры СПОИ Конева С. И.

Рецензенты: Доцент кафедры СПОИ к.т.н. Чикалов А. Н

Пособие обсуждено и одобрено на заседании

кафедры СПОИ.

Протокол №10 от 9.06.16

1. Булева алгебра. Элементы математической логики.

1.1. Высказывания, операции над высказываниями.

Высказывание – связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Например, предложения «2*2=4» и «Рим – столица Франции» являются высказываниями, а предложения «Который час?» или «Решить уравнение 3х·2=0» высказываниями не являются.

В дальнейшем нас будет интересовать не то, о чем идет речь в высказывании, а лишь какое значение истинности («истина», «ложь») оно имеет. В алгебре высказываний все высказывания, имеющие одинаковые значения истинности, взаимно заменяемы, то есть мы имеем два класса высказываний: класс истинных высказываний и класс ложных высказываний.

Будем считать, что каждому элементарному логическому высказыванию А соответствует некоторая логическая переменная х, которая принимает значение $x=0$, если высказывание А ложное, и $x=1$, если высказывание истинное.

Логические операции над высказываниями.

В русском языке из простых высказываний при помощи некоторых стандартных конструкций можно образовывать новые (сложные) предложения. В алгебре высказываний этим конструкциям соответствуют логические операции. Так как нас интересует только значение истинности высказывания, для задания операции достаточно определить значение истинности результата применения операции. Другими словами, требуется определить, какое значение принимает логическая переменная, соответствующая данному сложному логическому выражению, при всех возможных значениях логических переменных, соответствующих элементарным высказываниям, входящим в данное сложное логическое высказывание.

Отрицание.

Пусть логическому высказыванию А соответствует логическая переменная х. Логическое отрицание задается следующей таблицей, которая называется таблицей истинности данной операции

x	$\bar{\mathbf{x}}$
0	1
1	0

Очевидно, имеет место свойство $\bar{\bar{\mathbf{x}}} = x$, называемое законом двойного отрицания.

Дизъюнкция.

Дизъюнкция (логическое сложение) соответствует союзу «или» в русском языке, т.е. дизъюнкция $A \vee B$ ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B.

Пусть высказыванию A соответствует логическая переменная x_1, а высказыванию B – логическая переменная x_2. Рассмотрим все возможные значения пары логических переменных x_1 и x_2 и поставим каждой паре значений логических переменных значение логической операции, задав тем самым таблицу истинности для дизъюнкции:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Свойства дизъюнкции:

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ (коммутативный закон)

$$\left.\begin{array}{l} x \vee 1 = 1 \\ x \vee 0 = x \end{array}\right\} \text{(законы «0» и «1» для дизъюнкции)}$$

$x \vee x = x$

Конъюнкция.

Конъюнкция (логическое умножение) соответствует союзу «и» в русском языке, т.е. конъюнкция $A \cdot B$ истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. Зададим таблицу истинности для операции конъюнкция:

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Свойства конъюнкции:

$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ (возможна такая запись $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$) (коммутативный закон)

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot 1 = x \\ x \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \text{(законы «0» и «1» для конъюнкции)}$$

$x \cdot x = x$

Эквиваленция.

Эквиваленция (равносильность) A~ B (A↔B) двух логических высказываний A и B истинна тогда и только тогда, когда образующие её высказывания A и B имеют одинаковые значения истинности. Зададим таблицу истинности для операции эквиваленция:

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Свойства эквиваленции:

$x_1 \leftrightarrow x_2 = x_2 \leftrightarrow x_1$ (коммутативный закон)

$x \leftrightarrow x = 1$

$x \leftrightarrow 1 = x$

$x \leftrightarrow 0 = \bar{x}$

Импликация.

Импликация соответствует конструкции «Если…, то…», т.е. импликация $A \rightarrow B$ ложна тогда и только тогда, когда A – истинно, а B - ложно. Импликация задается следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Свойства импликации:

$x_1 \rightarrow x_2 \neq x_2 \rightarrow x_1$

$x \rightarrow x = 1$

$1 \rightarrow x = x$

$x \rightarrow 0 = \bar{x}$

$x \rightarrow 1 = 1$

1.2. Формулы алгебры высказываний.

Ранее были введены высказывательные переменные, принимающие значения 0 или 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее логическое высказывание. Кроме того, были введены обозначения логических операций.

Под **формулами** алгебры высказываний будем понимать осмысленные выражения, полученные из символов элементарных высказываний, символов переменных, конечного числа знаков операций и скобок, определяющих порядок действий.

Дадим строгое определение формулам алгебры высказываний.

Определение:

1. Символы логических переменных – формулы.
2. Если F_1 и F_2 – формулы алгебры высказываний, то

$\overline{F}$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \cdot F_2$, $F_1 \to F_2$, $F_1 \sim F_2$ – формулы алгебры высказываний.

3. Других формул алгебры высказываний нет.

Замечание:

1. Тесным отрицанием называется отрицание, относящееся только к одной конкретной логической переменной, т.е. отрицание $\overline{x}$

называется тесным, а отрицание $\overline{x_1 \vee x_2}$ таковым не является. Введем приоритет выполнения логических операций:

2. Скобки, определяющие порядок действий в ассоциативном случае, можно опускать. Например, $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Пример: Построить таблицу истинности формулы $x_1 \cdot \overline{x}_2 \to (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x}_3$.
Решение: Построение таблицы истинности иллюстрируется таблицей:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_2$	$x_1 \cdot \overline{x}_2$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x}_3$	$(x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x}_3$	$x_1 \cdot \overline{x}_2 \to (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x}_3$
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Таким образом, данная таблица истинности позволяет поставить в соответствие каждой возможной паре логических переменных значение логической формулы, которое она принимает при этих значениях. Эти значения указаны в крайнем правом столбце.

Любую логическую формулу можно представить в таком виде, что она будет содержать только операции тесного отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Поэтому основное внимание уделяется изучению свойств именно этих операций, которые называются булевыми операциями алгебры высказываний.

Справедливы следующие равносильности для булевых операций алгебры высказываний:

1. $x=x$;

2. $$\left.\begin{aligned} &x_1\vee x_2= x_2\vee x_1 \\ &x_1\wedge x_2= x_2\wedge x_1 \end{aligned}\right\}\ \text{коммутативные законы;}$$

3. $$\left.\begin{aligned} &x_1\vee(x_2\vee x_3)= (x_1\vee x_2)\vee x_3 \\ &x_1\cdot(x_2\cdot x_3)= (x_1\cdot x_2)\cdot x_3 \end{aligned}\right\}\ \text{ассоциативные законы;}$$

4. $$\left.\begin{aligned} &x_1\vee(x_2\cdot x_3)= (x_1\vee x_2)\cdot(x_1\vee x_3) \\ &x_1\cdot(x_2\vee x_3)= (x_1\cdot x_2)\vee(x_1\cdot x_3) \end{aligned}\right\}\ \text{дистрибутивные законы;}$$

5. $$\left.\begin{aligned} &x\vee x=x \\ &x\cdot x=x \end{aligned}\right\}\ \text{законы идемпотентности;}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{x\vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \\ &\overline{x \wedge y}= \bar{x} \vee \bar{y} \end{aligned}\right\}\ \text{законы де Моргана;}$$

6. $$\left.\begin{aligned} &x\vee 1=1 \\ &x\cdot 0=0 \\ &x\vee 0=x \end{aligned}\right\}\ \text{законы нуля и единицы;}$$

$x \cdot 1 = x$

7. $\left.\begin{array}{l} x_1 \vee (x_1 \cdot x_2) \equiv x_1 \\ \\ x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) \equiv x_1 \end{array}\right\}$ законы поглощения;

9. $x \vee \bar{x} \equiv 1$ закон исключенного третьего;

10. $x \cdot \bar{x} \equiv 0$ закон противоречия.

Поставим задачу преобразования логических формул к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Например, ДНФ является формула следующего вида:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2.$$

Обратим внимание, что указанная ДНФ:

- содержит только операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. В случае, если исходная формула содержит операции импликации и эквиваленции, то переход к указанным выше операциям производится по следующим формулам, справедливость которых можно показать, построив соответствующие таблицы истинности:

$$\mathbf{x_1 \to x_2 \equiv \bar{x}_1 \vee x_2;}$$

$$\mathbf{x_1 \sim x_2 \equiv x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2;}$$

- содержит только тесные отрицания. Для того, чтобы переходить от не тесных отрицаний к тесным могут быть использованы законы де Моргана:

- не содержит скобок. Для избавления от скобок в некоторых случаях может быть полезен закон дистрибутивности:

$$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3).$$

Элементы комбинаторики

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из различных объектов.

Рассмотрим примеры, связанные с выбором m шаров из урны, содержащей r различных шаров. Имеется в виду, что каждому шару присвоен номер от 1 до r.

В этом случае выборка из m шаров может быть записана в виде $(a_1; a_2; \ldots a_m)$, где a_i – номер шара, выбранного на i - ом шаге.

Прежде, чем решать задачу о количестве комбинаций выбора, надо четко сформулировать алгоритм выбора.

Так, выбор бывает упорядоченным и неупорядоченным.

При **упорядоченном** выборе важен порядок, с которым извлекаются шары из урны. В этом случае, например, выборки (1;2;3;4) и (4;3;2;1) являются различными выборками.

При **неупорядоченном** выборе порядок появления шаров несущественен и выборки (1;2;3;4) и (4;3;2;1) считаются одинаковыми. В данном случае существенен только состав выборки.

Другим существенным признаком при построении выборки является вопрос о возвращении (или невозвращении) вынутого из урны шара обратно в урну на каждом шаге извлечений.

Выбором с возвращением называется выбор, при котором на каждом шаге вынутый шар помещается обратно в урну. В этом случае выборки могут содержать повторение номеров. Например, возможна выборка (3;3;1;3).

Выбор без возвращения предполагает, что извлеченные из урны шары обратно в урну не возвращаются. В этом случае повторение элементов в выборке невозможно.

Рассмотрим число различных выборок m шаров из урны, содержащей r шаров, уточняя при этом алгоритм выбора.

Упорядоченный с возвращением. Такая выборка называется размещением с повторениями, а число таких выборок можно вычислить по формуле:

$$\bar{A}_n^{\bar{m}} = \mathbf{n^m}.$$

Упорядоченный без возвращения. Такая выборка называется размещением без повторений, а число таких выборок можно вычислить по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Неупорядоченный без возвращения. Такая выборка называется сочетаниями без повторений, а их число равно:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Неупорядоченный с возвращением. Такая выборка называется сочетаниями с повторениями, а их число равно:

$$\overline{C}_n^{m} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}.$$

Пример. В урне содержится 6 различных шаров. Найти число наборов, содержащих 4 шара.

Решение.

Упорядоченный выбор с возвращением: $\overline{A}_6^4 = 6^4 = 1296$.

Упорядоченный выбор без возвращения: $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$.

Неупорядоченный выбор без возвращения: $C_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$.

Неупорядоченный выбор с возвращением: $\overline{C}_6^4 = C_{6+4-1}^4 = C_9^4 = 126$.

Пример. В урне содержащей 6 белых и 4 черных шара, вынимают 5 шаров.

Найти число выборок, содержащих 3 белых и 2 черных шара.

Решение.

Упорядоченный выбор с возвращением. Учитывая, что порядок следования шаров в этом случае имеет значение, выберем места для белых шаров. Таких мест C_5^3. Заметим, что выбор числа мест - неупорядоченный выбор, т.к. последовательность выбора мест для шаров значения не имеет. Далее, заполняем места, выбранные для белых шаров. Число вариантов заполнения в этом случае равно $\overline{A}_6^3$. После выбора мест для белых шаров, места для черных шаров фиксируются автоматически. Эти места заполняются $\overline{A}_4^2$ способами.

Используя правило умножения в комбинаторике, получим ответ:

$$N = C_5^3 \cdot \overline{A}_6^3 \cdot \overline{A}_4^2.$$

Упорядоченный выбор без возвращения. Проводим аналогичные рассуждения, учитывая, что заполнение выбранных мест белыми шарами происходит A_6^3 способами, а черными шарами - A_4^2 способами. Тогда

$$N=C_5^3\cdot A_6^3\cdot A_4^2.$$

Неупорядоченный выбор без возвращения. В этом случае порядок выбора шаров не важен. Белые шары могут быть выбраны C_6^3 способами, а черные - C_4^2

способами. Используя правило умножения в комбинаторике, получим:

$$N=C_6^3\cdot C_4^2.$$

Неупорядоченный выбор с возвращением. В этом случае рассматривается аналогичная задача, но с учетом того, что выбор шаров ведется с возвращением.

Поэтому белые шары могут быть выбраны $\bar{C}_6^3$ способами, а черные - $\bar{C}_4^2$ способами. Учитывая правило умножения в комбинаторике, получим:

$$N=\bar{C}_6^3\cdot\bar{C}_4^2.$$

Перестановки.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок без повторений определяется:

$$P_n=n!.$$

Перестановки с повторениями вычисляются по формуле:

$P_n=n!(n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_n)$, где n_1,n_2,n_n – число повторений элементов каждого вида.

Число перестановок из n объектов по r можно определить по формуле:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1,2,…9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

Для формирования каждого четырехзначного числа выбираем четыре цифры из девяти, поэтому существует

$$P(9,4) = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

таких различных чисел.

Пример. Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования пять мальчиков и шесть девочек, если ни два мальчика, ни две девочки, не должны стоять рядом? Мальчиков меньше, чем девочек, поэтому первой должна стоять девочка, а дальше мальчики и девочки должны чередоваться. Итак ряд должен иметь вид ДМДМДМДМДМД. Существует 6! способов расположить девочек на позициях Д и 5! способов расположить мальчиков на позициях М. Следовательно, имеется 6!×5! способов расставить детей.

Пример. Сколькими способами можно расположить для фотографирования пять мальчиков и пять девочек, если ни два мальчика, ни две девочки, не должны стоять рядом? В данной ситуации первым в ряду может быть либо мальчик, либо девочка. Если первой стоит девочка, то ряд имеет вид ДМДМДМДМДМ. Имеется 5! способов расставить девочек на позициях Д и 5! способов расставить мальчиков на позициях М. Поэтому существует 5!×5! способов расположить детей в ряд, если первой стоит девочка. Аналогично, существует 5!×5! способов расположить детей в ряд, если первым стоит мальчик. Т.о., имеются 2×5!×5! способов расположить детей в ряд для фотографирования.

Пример. Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом, если имеет значение только порядок соседей. Существует несколько вариантов решения данной задачи. Первым делом, отметим, что вращение людей вокруг стола не меняет их взаимного расположения, поскольку соседи справа и слева остаются прежними. Предположим, что место за столом уникально. Тогда существует10! способов рассадить людей за столом. Считаем, что при вращении места остаются теми же, т.к. соседи не меняются. Существует 10 таких вращений, поэтому делим 10! на 10, что дает 9! способов расположить людей за столом, если имеет значение порядок соседей.

Иной подход к решению задачи состоит в том, чтобы сначала усадить одного человека. Этим исключается вращение, а оставшиеся 9 человек можно рассадить 9! способами.

Элементы теории графов.

Определение графа.

Наглядно граф представляет собой множество точек на плоскости, соединенных системой кривых (ребер).

Введем множества:

V - множество вершин графа,

E - множество ребер графа.

Если $\nu \in V$ и $w \in V$ – вершины и $e \in E$ – ребро, соединяющее эти вершины, то говорят, что ребро e инцидентно вершинам ν и w. Это обозначается $e \sim (\nu, w)$.

Граф обозначается $G=(V,E)$.

Если $e_1 \sim (\nu, w)$ и $e_2 \sim (\nu, w)$, то e_1 и e_2 называются параллельными ребрами.

Пусть $e \sim (\nu, w)$ и $\nu = w$, тогда e называется петлей.

Вершины ν и w называются смежными, если существует хотя бы одно ребро, их соединяющее.

Число ребер, инцидентных вершине, называется степенью этой вершины.

Граф называется связным, если двигаясь по ребрам можно попасть из любой его вершины в любую

Матрицы графов.

Во многих задачах графы удобно задавать матрицами.

Пусть $G=(V,E)$- граф с n вершинами и m ребрами, причем вершины и ребра занумерованы.

Матрицей инцидентности называется матрица $A(G)$, размера $m \times n$, элементы которой имеют вид:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если j-я дуга инцидентна i-й вершине;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

.

Матрицей смежности называется матрица B(G), размера n ×n, элементы которой имеют вид:

$(B(G))_{ij}$ = числу ребер, инцидентных одновременно i-й и j-й вершинам.

Пример:

Задана матрица инциденции графа (цифрами обозначены вершины, буквами – ребра графа).

а) Восстановить граф по матрице инциденции;

б) Выяснить, является ли граф связным;

в) Построить для данного графа матрицу смежности.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	1	0	1	1

Решение:

а) Рассмотрим первый столбец матрицы инциденции. В нем элементы $A(G)_{11}$ и $A(G)_{21}$ равны 1. По определению матрицы инциденции получим, что ребро e_1 соединяют вершину 1 с вершиной 2.

Рассматривая аналогично все остальные столбцы, получим:

ребро e_2 соединяет вершину 2 с вершиной 3;

ребро e_3 соединяет вершину 3 с вершиной 4;

ребро e_4 соединяет вершину 1 с вершиной 4;

ребро e_5 соединяет вершину 2 с вершиной 4;

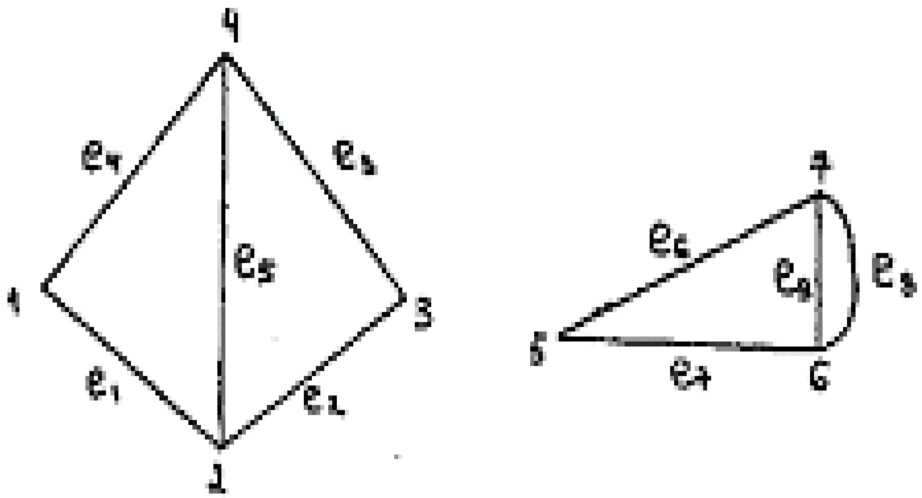
ребро e_6 соединяет вершину 5 с вершиной 7;

ребро e_7 соединяет вершину 5 с вершиной 6;

ребро e_8 соединяет вершину 6 с вершиной 7;

ребро e_9 соединяет вершину 6 с вершиной 7.

Чертеж графа имеет следующий вид:



б) Данный граф не является связным, т.к., например, мы не можем попасть из вершины 1 в вершину 5.

в) Построим для графа матрицу смежности B(G):

по определению матрицы смежности ее элемент $(B(G))_{ij}$ равен числу ребер, соединяющих i-й и j-й вершины. Рассмотрим поочередно все ребра графа. Ребро e_1 соединяют вершину 1 с вершиной 2, поэтому в матрице смежности элементы $B(G)_{12}$ и $B(G)_{21}$ равны единице. Аналогично получим, что равны единице элементы:

$(B(G))_{23}$ и $(B(G))_{32}$;

$(B(G))_{34}$ и $(B(G))_{43}$;

$(B(G))_{14}$ и $(B(G))_{41}$;

$(B(G))_{24}$ и $(B(G))_{42}$;

$(B(G))_{57}$ и $(B(G))_{75}$;

$(B(G))_{56}$ и $(B(G))_{65}$.

Рассмотрим теперь ребро e_8. Оно соединяет вершины 6 и 7. Ребро e_9 также соединяет вершины 6 и 7 и других ребер, соединяющих вершины 6 и 7 нет, т. е. вершины 6 и 7 соединяют два ребра, поэтому элементы $(B(G))_{67}$ и $(B(G))_{76}$ равны двум. Остальные элементы матрицы смежности равны нулю, т.к. мы рассмотрели все ребра и все вершины, соединенные этими ребрами.

Окончательно получим:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	2
7	0	0	0	0	1	2	0

Критерий для проверки: полученная матрица смежности должна быть симметрична, поскольку ребер, соединяющих вершины i и j, столько же, сколько ребер, соединяющих вершины j и i.

Позиционные системы счисления.

Под системой счисления понимается способ представления любого числа с помощью некоторого алфавита символов, называемых цифрами.

В настоящее время общепринятой является индо-арабская десятичная система счисления. Причиной её доисторического появления служит наличие десяти пальцев рук человека. Помимо десятичной системы человечество в повседневной жизни неосознанно пользуется доисторическими двенадцатеричной, шестидесятеричной и другими системами счисления. Первую в устной речи называют «дюжиной». Дюжинами считают многие бытовые предметы: ножи, вилки, тарелки и тому подобное. Вторая система используется в измерении времени (1 час содержит 60 минут, 1 минута состоит из 60 секунд) и углов (1 градус=60 угловых минут, 1 минута=60 угловых секунд).

С чисто математической точки зрения десятичная система не имеет специальных преимуществ перед другими системами. В последнее время с ней серьёзно конкурируют двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, которыми «предпочитают пользоваться» современные ЭВМ.

Возьмём теперь знакомое нам десятичное число, например, 555(10). Оно состоит из трёх пятёрок, каждая из которых имеет своё собственное числовое значение (достоинство). Пятёрка самого крайнего правого разряда (называемого первым) означает 5 единиц, пятёрка следующего за ним (второго) разряда – 5 десятков единиц, т.е. 50, а пятёрка крайнего левого (третьего) разряда – 5 сотен единиц, т.е. 500. Видим, что значение каждой цифры в такой записи зависит от того места (от той позиции), которое эта цифра занимает. Легко понять, что добавление нулей к этому числу справа увеличивает его значение, а добавление их слева оставляет его неизменным. Системы счисления, используемые такой принцип, называют позиционными. К отличным от них относится римская непозиционная система счисления. Легко видеть, что в римском числе LXXXVIII=50+10+10+10+5+1+1+1=88(10) значения римских цифр, в качестве которых используются лат. буквы, не связаны с их месторасположением. Рассмотрим теперь краткие сведения только о тех позиционных системах счисления, которыми придётся пользоваться.

А) Десятичная система счисления.

Основанием десятичной системы счисления является число 10, а цифровыми символами – арабские цифры от 0 до 9-ти. Любое число, например, 375, в этой системе может быть представлено в виде:

$375(10) = 3*10^2+7*10^1+5*10^0 = 3*100+7*10+5*1 = 300+70+5 = 375(10)$.

Дробное число, например, 75.3, в этой системе может быть представлено в виде: $75.3(10) = 7*10^1+5*10^0+3*10^{-1} = 7*10+5*1+3/10 = 70+5+0.3 = 75.3(10)$.

В) Двоичная система счисления.

Основанием двоичной системы счисления является число 2, а цифровыми символами – арабские цифры 0 и 1. Любое целое двоичное число, например, 11011(2), может быть представлено и пересчитано в десятичное по правилу:

$11011(2) = 1*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0 = 16+8+0+2+1 = 27(10)$,

а дробное двоичное число, например, 110,11(2), – по правилу:

$$110,11(2) = 1*2^2+1*2^1+0*2^0+1*2^{-1}+1*2^{-2} = 4+2+0+0.5+0.25 = 6.75(10) .$$

Для перевода десятичных чисел в двоичные числа можно воспользоваться легко усваиваемым правилом: «Делим исходное десятичное число на два. Если оно нечётно, то вычитаем из него единицу и отображаем её (1) за вертикальной (см. ниже) чертой. Полученный результат деления уже чётного числа переносим в очередную под ним строку и снова делим его на два. При чётном результате очередного деления за вертикальной чертой отображаем 0. Процесс деления продолжается до получения нулевого результата. Полученный за вертикальной чертой набор единиц и нулей и является эквивалентом десятичного числа в двоичной системе счисления.

В) Двоичная система счисления.

Основанием двоичной системы счисления является число 2, а цифровыми символами – арабские цифры 0 и 1. Любое целое двоичное число, например, 11011(2), может быть представлено и пересчитано в десятичное по правилу:

11011(2) $=1*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0=16+8+0+2+1=27(10)$,

а дробное двоичное число, например, 110,11(2), – по правилу:

110,11(2) $=1*2^2+1*2^1+0*2^0+1*2^{-1}+1*2^{-2}=4+2+0+0.5+0.25=6.75(10)$.

Для перевода десятичных чисел в двоичные числа можно воспользоваться легко усваиваемым правилом: «Делим исходное десятичное число на два. Если оно нечётно, то вычитаем из него единицу и отображаем её (1) за вертикальной (см. ниже) чертой. Полученный результат деления уже чётного числа переносим в очередную под ним строку и снова делим его на два. При чётном результате очередного деления за вертикальной чертой отображаем 0. Процесс деления продолжается до получения нулевого результата. Полученный за вертикальной чертой набор единиц и нулей и является эквивалентом десятичного числа в двоичной системе счисления.

375 : 2 1
187 : 2 1
93 : 2 1
46 : 2 0
23 : 2 1
11 : 2 1
5 : 2 1
2 : 2 0
1 : 2 1 0 1 1 1 0 1 1 1(2).
0

Так как «Дискретная математика» является базовой для изучения дисциплины «Вычислительная техника и информационные технологии», то кратко рассмотрим применяемые в ней совместно с двоичной восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

C) Восьмеричная система счисления.

Основанием восьмеричной системы счисления является число 8 (8=23), а цифровыми символами – арабские цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Любое число, например, 375, в этой системе может быть представлено и пересчитано в десятичное по правилу: 375(8) $=3*8^2+7*8^1+5*8^0=3*64+7*8+5*1=253(10)$.

Для перевода десятичных чисел в восьмеричные из нескольких существующих правил целесообразно воспользоваться тем, которое предлагает:

а) перевести десятичное число сначала в двоичное, б) разбить двоичное число на триады, так как $8=2^3$,

в) представить триады в виде цифр восьмеричной системы счисления.

По этому правилу получаем: 375(10)= 101110111(2)=101 110 111=567(8).

Делаем проверку:

$567(8)=5*8^2+6*8^1+7*8^0=5*64+6*8+7*1=320+48+7=375(10)$

и убеждаемся в верности выполненного перевода.

D) Шестнадцатеричная система счисления.

Основанием шестнадцатеричной системы счисления является число 16 (16=24), а цифровыми символами – арабские цифры от 0 до 9 и первые заглавные буквы латинского алфавита: A=10, B=11, C=12, D=13, E=14 и F=15. Любое число, например, 375, в этой системе может быть представлено и пересчитано в десятичное по правилу вида:

$375(16) =3*16^2+7*16^1+5*16^0=3*256+7*16+5*1=768+112+5=885(10)$.

Для перевода десятичных чисел в шестнадцатеричные целесообразно воспользоваться правилом, которое предлагает:

а) перевести десятичное число сначала в двоичное,

б) разбить двоичное число на тетрады, так как $16=2^4$,

в) представить тетрады в виде цифровых символов шестнадцатеричной системы счисления. Пользуясь этим правилом, и добавляя (при необходимости) слева к двоичному числу незначащие нули, можно получить:

375(10)= 101110111(2)=0001 0111 0111=177(16).

Делаем проверку:

$177(16)=1*16^2+7*16^1+7*16^0=1*256+7*16+7*1=256+112+7=375(10)$

и убеждаемся в верности выполненного перевода.

Пример 1. Пусть требуется перевести (изобразить) шестнадцатеричное число A5F(16) в числа двоичной и восьмеричной систем счисления. Проверить справедливость полученных результатов путём перевода всех этих чисел в десятичную систему счисления.

Пользуясь приведенными выше правилами и учитывая, что в тетрадном представлении A(16)=10(10)=1010(2) , 5(16)=5(10)=0101(2) , F(16)=15(10)=1111(2) , получаем: A5F(16)=1010 0101 1111(2)=101 001 011 111(2)=5137(8). Проверяем:

$A5F(16)=10*16^2+5*16^1+15*16^0=2560+80+15=2655(10)$,

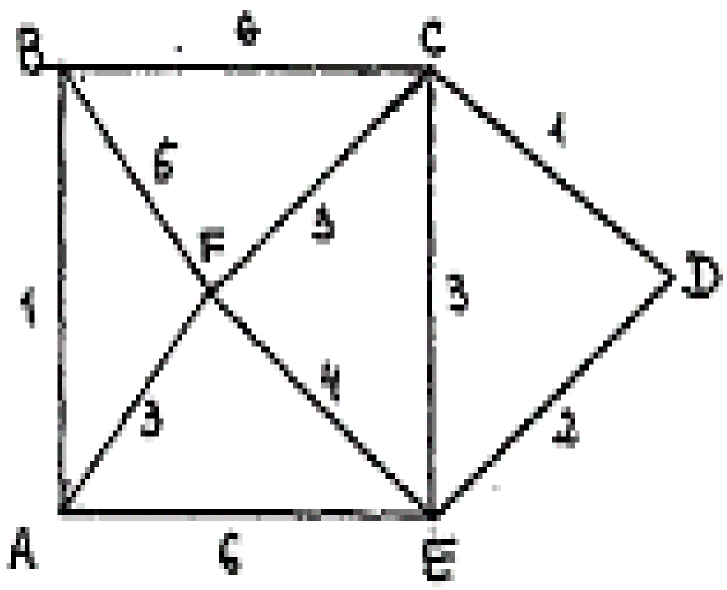
$5137(8)=5*8^3+1*8^2+3*8^1+7*8^0=2560+64+24+7=2655(10)$, 101001011111(2)=2048+0+512+0+0+64+0+16+8+4+2+1=2655(10) и видим, что результаты перевода заданного числа в указанные системы счисления являются верными. Приведенный пример наглядно иллюстрирует и обратный перевод восьмеричного числа в шестнадцатеричное.

Оптимизация на графах.

Граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое число, называется **взвешенным** графом. Число, сопоставленное ребру, называется **весом** ребра. Одной из важнейших задач в теории взвешенных графов является задача о кратчайшем соединении, основанная на применении алгоритма **Краскала**. Рассмотрим это на примере.

Пример.

A,B,C,D,E,F – населенные пункты, линии – проектируемые участки дорог, цифры – их стоимость. Найти, какие дороги надо построить, чтобы полученная схема дорог позволяла попасть из любого города в любой и из всех возможных схем имела наименьшую стоимость.



Решение.

Решаем задачу, используя алгоритм Краскала.

Алгоритм Краскала.

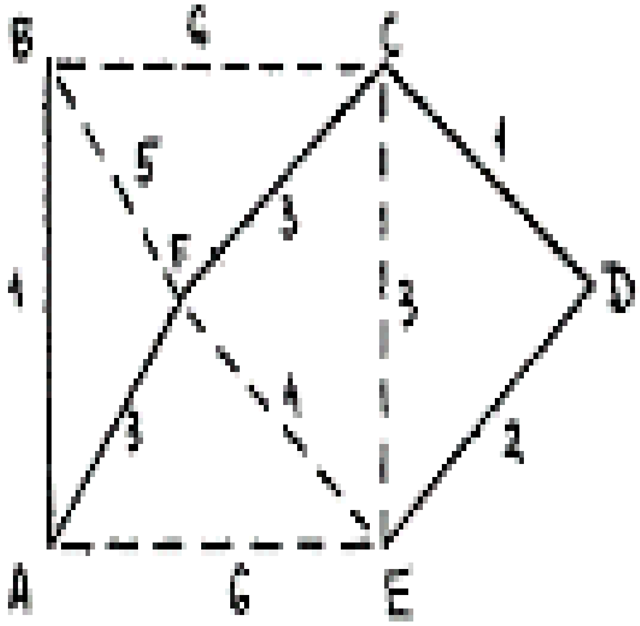
1. ν_i – дуга минимального веса из всех имеющихся дуг, не являющаяся петлей.

2. Если дуги ν_m,… $\nu_{к-m}$ уже выбраны, то $\nu_к$ выбираем из множества еще не выбранных дуг следующим образом:

   а) Добавление дуги $\nu_к$ не приводит к образованию циклов;

   б) Из дуг, удовлетворяющих условию а, дуга $\nu_к$ обладает наименьшим весом.

В нашем случае выбираем ν_1=CD, ν_2=AB, ν_3=ED и далее отпадает возможность выбора CE, т. к. это приводит к образованию цикла. ν_4=CF и отпадает возможность выбора EF. ν_5=AF, отпадает возможность выбора BC,BF, AE и процесс выбора дуг автоматически оборвался. Полученный путь изображен на рис. Сплошными линиями.



Алгоритм Дейкстры.

Рассмотрим неориентированный взвешенный граф G=(V,E). Назовем маршрутом в этом графе такую последовательность ребер графа, в которой начало каждого ребра является концом предыдущего ребра, а конец ребра – началом последующего ребра. Назовем длиной маршрута, соединяющего две вершины, число, равное сумме весов всех ребер, входящих в этот маршрут, а маршрут наименьшей длины – кратчайшим маршрутом между двумя вершинами.

Поставим задачу нахождения кратчайших маршрутов между некоторой вершиной s графа и другими его вершинами.

Одним из эффективных алгоритмов решения этой задачи является алгоритм Дейкстры, основанный на присвоении всем вершинам ν_i графа G временных меток $m(\nu_i)$, которые задают верхнюю границу длины маршрута от вершины s до рассматриваемой вершины. На каждой итерации одна (или несколько) временная метка становится постоянной (постоянными), определяя длину кратчайшего маршрута от вершины s до рассматриваемой вершины (вершин).

Приведем алгоритм Дейкстры.

Шаг 1. Начальная установка меток.

Принять метку вершины $m(s) = 0$ и считать эту метку постоянной. В дальнейшем постоянные метки будем обозначать *, т.е. $m(s) = 0^*$. Для всех $\nu_i \neq s$ положить $m(\nu_i)=\infty$ и считать эти метки временными. Пусть S – множество вершин с постоянными метками. Положить $S=\{ s \}$. Будем обозначать через $\Gamma(S)$ вершины графа, смежные по крайней мере с одной из вершин графа, входящих в множество S.

Шаг 2. Метки $\nu_i \notin \Gamma(S)$ изменить следующим образом:

$$m(\nu_i)= \min(m(\nu_i)); m(\nu)+c(\nu,\nu_i),$$

где ν - произвольная метка вершины графа, принадлежащая множеству S, $c(\nu,\nu_i)$ – вес ребра $\{\nu,\nu_i\}$.

Шаг 3. После пересчета меток, входящих в $\Gamma(S)$, в множестве этих вершин найти вершину, имеющую метку наименьшего веса, сделать ее постоянной и добавить эту вершину в множество S.

Шаг 4. Если $\Gamma(S)=\varnothing$, работа алгоритма закончена. Все вершины имеют постоянные метки, которые определяют длины кратчайших маршрутов до вершины s.

Если $\Gamma(S)\neq\varnothing$, то переход к шагу 2.

Замечание. Если необходимо решить задачу о нахождении длины кратчайшего пути до некоторой вершины $\nu_к$, то алгоритм должен быть прерван после присвоения вершине $\nu_к$ постоянной метки.

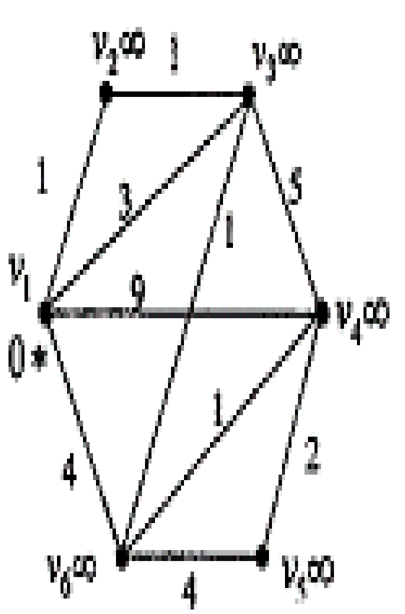
После нахождения длин кратчайших маршрутов, сами маршруты можно найти при помощи рекурсивной процедуры. Для любой вершины ν_i предыдущую вершину маршрута ν_i' можно найти как вершину (или одну из вершин), смежную с вершиной ν_i, для которой выполняется условие:

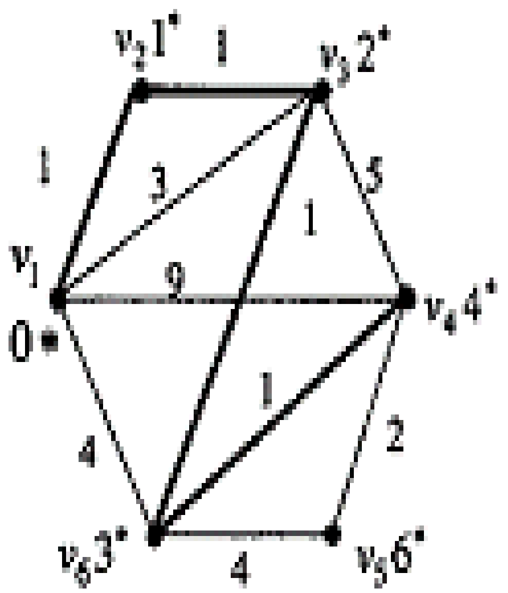
$$m(\nu_i')+c(\nu_i',\nu_i)= m(\nu_i).$$

Так, начиная с последней вершины, можно восстановить кратчайший маршрут от вершины $\nu_к$ до вершины s, а значит и от s до $\nu_к$.

Заметим, что восстановление кратчайшего маршрута в некоторых случаях может быть неоднозначным.

Пример. Для графа, представленного на рисунке (слева), найти кратчайшие маршруты от вершины v_1 ко всем остальным вершинам. Указать кратчайший маршрут, соединяющий вершины v_1 и v_4.





Решение.

Результаты пошагового выполнения алгоритма приведены в таблице:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
Шаг 1.	0*	∞	∞	∞	∞	∞

Шаг 2.1,3.1.	0*	1*	3	9	∞	4
Шаг 2.2,3.2.	0*	1*	2*	9	∞	4
Шаг 2.3,3.3.	0*	1*	2*	7	∞	3*
Шаг 2.4,3.4.	0*	1*	2*	4*	7	3*
Шаг 2.5,3.5.	0*	1*	2*	4*	6*	3*

—

Шаг 1. $m(\nu_1) = 0^*$, $m(\nu_i) = \infty$ при всех i=2;6, $S\{\nu_1\}$, $\Gamma(S)= \{\nu_2; \nu_3; \nu_4; \nu_6\}$.

Шаг 2.1. Обновление меток: $m(\nu_2)= \min(\infty;0^* +1)=1$,

$m(\nu_3)= \min(\infty;0^* +3)=3$,

$m(\nu_4)= \min(\infty;0^* +9)=9$,

$m(\nu_4)= \min(\infty;0^* +4)=4$.

Шаг 3.1. Выбираем вершину с наименьшим весом метки (это вершина ν_2) и делаем эту метку постоянной: $m(\nu_2)=1^*$. Добавляем метку ν_2 в множество S: $S= \{\nu_2; \nu_3\}$; $\Gamma(S)= \{\nu_3; \nu_4; \nu_6\}$.

Шаг 2.2. Обновляем метки: $m(\nu_3)= \min(3;1^* +1)=2$. Метки $m(\nu_4)=9$, $m(\nu_4)=4$ не изменяются.

Шаг 3.2. Выбираем вершину с наименьшим весом метки (это вершина ν_3) и делаем ее постоянной: $m(\nu_3)=2^*$. Полагаем $S= \{\nu_1;\nu_2;\nu_3\}$. Тогда $\Gamma(S)= \{\nu_4; \nu_6\}$.

Шаг 2.3. Обновление меток: $m(\nu_6)= \min(4;2^* +1)=3$, $m(\nu_4)= \min(9;2^* +5)=7$.

Шаг 3.3. Выбираем вершину с наименьшим весом метки (это вершина ν_6) и делаем ее постоянной: $m(\nu_6)=3^*$. Полагаем $S= \{\nu_1;\nu_2;\nu_3;\nu_6\}$. Тогда $\Gamma(S)= \{\nu_4; \nu_5\}$.

Шаг 2.4. Обновление меток: $m(\nu_5)= \min(\infty;3^* +4)=7$, $m(\nu_4)= \min(7;3^* +1)=4$.

Шаг 3.4. Выбираем вершину с наименьшим весом метки (это вершина ν_4) и делаем ее постоянной: $m(\nu_4)=4^*$. Полагаем $S= \{\nu_1;\nu_2;\nu_3;\nu_4;\nu_6\}$. Тогда $\Gamma(S)= \{\nu_5\}$.

Шаг 2.5. Обновление меток: $m(\nu_5)= \min(7;4^* +2)=6$.

Шаг 3.5. Выбираем вершину с наименьшим весом метки (это вершина ν_5) и делаем ее постоянной: $m(\nu_5)=6^*$. Полагаем $S= \{\nu_1;\nu_2;\nu_3;\nu_4;\nu_5;\nu_6\}$. Тогда $\Gamma(S)= \varnothing$. Выполнение алгоритма закончено.

Вершине v_4 присвоена постоянная метка $m(v_4)=4^*$. Поэтому длина кратчайшего маршрута из вершины v_1 в вершины v_4 равна 4.

Теперь построим сам маршрут.

Начинаем с конца цепи: вершины v_4. Среди смежных с ней вершин находим такую вершину v_4', для которой:

$$m(v_4')+c(v_4',v_4)= m(v_4).$$

Видно, что это равенство выполняется для вершины v_6 : $3^* +2=4^*$ (для v_1 : $0^* +9\neq 4^*$, для v_3 : $2^* +5\neq 4^*$, для v_5 : $6^* +2\neq 4^*$). Значит, вершина v_6 принадлежит искомому пути.

Далее ищем вершину v_6', смежную v_6 и удовлетворяющую условию

$m(v_6')+c(v_6',v_6)= m(v_6)$. Видно, что этому условию удовлетворяет вершина v_3 : $2^* +1=3^*$, Т.о., получаем искомый маршрут: $v_1;v_2;v_3;v_6;v_4$.

Результат работы алгоритма показан на рисунке (справа).

Теория алгоритмов.

Алгоритм – точное предписание, которое задает вычислительный процесс, начинающийся с произвольного набора исходных данных и направленный на получение полностью определенного этими исходными данными результата.

Рассмотрим, например, алгоритм нахождения наименьшего общего кратного двух натуральных чисел a и b. Данный алгоритм применим к любой паре натуральных чисел, которые в данном случае являются исходными данными алгоритма. Алгоритм однозначно определяет порядок действий, приводящих к нахождению наименьшего общего кратного. Алгоритм сводится к выполнению следующих действий:

1. Разложить число a на простые множители и перейти к п. 2.
2. Повторить п.1 для числа b и перейти к п.3.
3. Составить произведение общих простых множителей из разложений a и b с показателями, равными наибольшим из показателей вхождения этих множителей в разложения.

На этом примере отметим важнейшие черты алгоритма:

Массовость – применимость алгоритма не к одной задаче, а к классу задач.

Дискретность – четкая разбивка алгоритма на отдельные шаги.

Детерминированность – такая организация этапов выполнения, при которой переход от одного шага к другому однозначен.

Конечность – для получения результата при применении алгоритма к решению конкретной задачи выполняется конечная последовательность шагов алгоритма.

С каждым алгоритмом связано множество возможных исходных данных этого алгоритма. Например, в случае алгоритма сложения столбиком, множество возможных исходных данных есть множество пар натуральных чисел.

Пусть X - возможные исходные данные алгоритма A. Применим A к X. При этом возможны три исхода.

а. Применение A к X закончится через конечное число шагов, и алгоритм A выдаст некоторый результат. В этом случае будем говорить, что алгоритм A применим к исходным данным X.

б. Применение A к X закончится безрезультатно. В этом случае говорят, что произошла безрезультатная остановка, а алгоритм A неприменим к исходным данным X.

в. Применение A к X вовсе не закончится, т.е. алгоритм будет работать бесконечно. В этом случае говорят, что алгоритм A неприменим к исходным данным X.

Т.о., алгоритм A применим к исходным данным X тогда и только тогда, когда применение A к X заканчивается получением результата.

Например, алгоритм сложения столбиком применим ко всем исходным данным, состоящим из двух натуральных чисел, и результатом применения алгоритма будет сумма исходных чисел. Алгоритм деления уголком применим к паре натуральных чисел, в которых вторая компонента (делитель) не равна нулю. Результатом будет частное и остаток.

Множество тех X, к которым применим A, называется областью применимости алгоритма.

Машина Тьюринга.

Работа алгоритма производится на некотором устройстве реализации, содержащем процессор для выполнения операций, внешнюю и внутреннюю память для хранения, поиска и изменения данных.

Одним из методов представления алгоритмов является машина Тьюринга (МТ), которая включает в себя следующие компоненты:

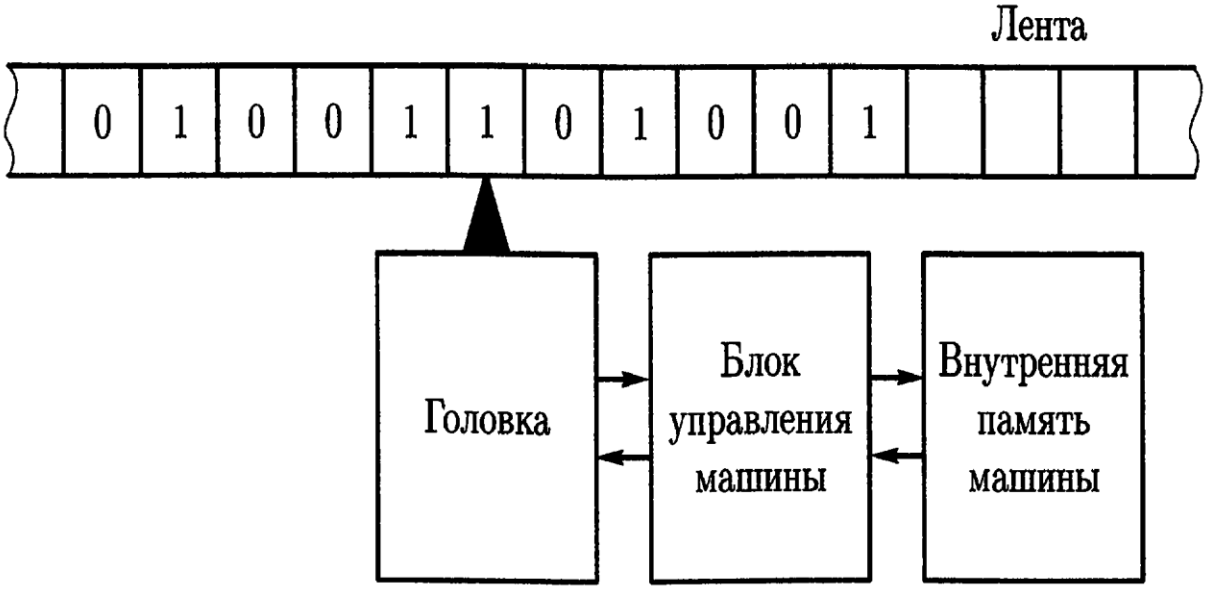


Рис. 12.1. Машина Тьюринга

- бесконечную в обе стороны ленту, разбитую на ячейки, в каждой из которых записан один из символов алфавита $A = \{a_0=\Lambda;\ a_1;\ a_2;\ldots a_m\}$. Любой алфавит должен содержать пустой символ $a_0=\Lambda$, запись которого обозначает отсутствие информации в данной ячейке. Совокупность символов алфавита, записанных на ленте, называется словом;

- головку или считывающее-записывающее устройство (СЗУ), которая обладает способностью обозревать текущую ячейку ленты, считывать букву, записанную в ячейке, производить запись на место считанной любую другую букву из алфавита А (быть может, ту же самую), а также передвигаться вдоль ленты на одну ячейку вправо или влево;

- управляющее устройство (УУ) или блок управления машиной, которое управляет действиями головки (СЗУ) в соответствии с программой Р. При этом УУ может находиться в одном из состояний $Q = \{q_1;\ q_2;\ldots q_n;q_0\}$, среди которых обязательно должны быть выделены начальное состояние q_1 и заключительное состояние q_0. Действия УУ зависят от входящих в программу команд. В свою очередь, применение той или иной команды, входящей в программу Р, зависит от обозреваемого в данный момент символа, записанного в ячейке, и от текущего состояния УУ. Для определенности договоримся, что в начальный момент времени головка обозревает крайнюю левую непустую ячейку ленты и УУ находится в состоянии q_1;

- программу Р, которая состоит из множества команд, на основании которых УУ определяет действия головки (СЗУ) на каждом шаге работы машины. Т.к. действия МТ на каждом шаге определяются символом, записанным в обозреваемую ячейку, и состоянием УУ, то команды программы имеют следующий вид:

$$qa \to br;$$

$$qa \to bRr;$$

$$qa \to bLr,$$

где a; $b \in A$, q; $r \in Q$. Для каждой пары $q \in Q \setminus q_0$, $a \in A$, в программе имеется не более одной команды с левой частью qa (команда с левой частью q_0a не имеет смысла, т.к. q_0 – заключительное состояние МТ).

Программа через УУ сообщает, что делать СЗУ в случае, если состояние УУ на данном шаге равно $q \in Q$ ($q \neq q_0$), а в обозреваемой ячейке на данном шаге записан символ $a \in A$. УУ находит в программе команду с левой частью qa и действует следующим образом:

а. если правая часть этой команды равна br, то машина записывает в обозреваемую ячейку b и УУ переходит в состояние r;

б. если правая часть этой команды равна bRr или bLr, то машина записывает в обозреваемую ячейку b, головка сдвигается на одну ячейку вправо (R) или влево (L), соответственно, и УУ переходит в состояние r.

При этом в отличие от алгоритмических языков, команды программы выполняются не в порядке очередности, а при выполнении соответствующих условий.

Формально машина Тьюринга – это тройка $M = \langle A,Q,P \rangle$, где

A – алфавит машины (т.е. символы, которые записываются в ячейки бесконечной ленты, включая пустой символ $a_0 = \Lambda$);

Q – конечное множество состояние УУ, содержащее два выделенных элемента q_1, q_0;

P – программа.

Если машина, начав работу с исходным словом, на некотором шаге придет в заключительное состояние, то она называется применимой к этому слову, а полученное слово – результатом применения МТ к исходному слову. Если же машина ни в какой момент не придет в заключительное состояние, то она называется неприменимой к данному слову и результат ее работы неопределен.

Пример.

Применима ли машина Тьюринга M, заданная программой P, к слову S? Если применима, то найти результат применения машины Тьюринга к данному слову.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 0Rq_1 \\ q_1\Lambda \to \Lambda Lq_2 \\ q_2 0 \to 0Lq_2 \\ q_2 1 \to 1Lq_2 \\ q_2\Lambda \to \Lambda Rq_0 \end{cases} \qquad S = 1101$$

Начальное состояние машины имеет вид:

Λ	1	1	0	1	Λ	Λ	Λ	Λ
	q_1							

где верхняя строка – это записанное на ленте слово, а нижняя – показывает, какая в данный момент ячейка обозревается и в каком состоянии находится УУ.

Найдем результат применения машины к слову S.

В начальный момент, как видно из таблицы, СЗУ обозревается символ 1 и УУ находится в состоянии q_1. Находим в программе команду с левой частью $q_1 1$. Это команда $q_1 1 \to 0Rq_1$. Она означает, что в обозреваемую ячейку записывается 0, головка сдвигается на одну ячейку вправо и УУ остается в состоянии q_1.

Вот результат применения этой команды:

Λ	0	1	0	1	Λ	Λ	Λ	Λ
		q_1						

Видим, что снова обозревается символ 1 и УУ находится в состоянии q_1. В обозреваемую ячейку записывается 0, головка сдвигается на одну ячейку вправо и остается в состоянии q_1. Получим:

Λ	0	0	0	1	Λ	Λ	Λ	Λ
			q_1					

В этот раз обозревается символ 0 и УУ находится в состоянии q_1. Соответствующая команда в программе имеет вид: $q_1 0 \to 1Rq_1$, поэтому в обозреваемую ячейку записывается 1, головка сдвигается на одну ячейку вправо и УУ остается в состоянии q_1:

Λ	0	0	1	1	Λ	Λ	Λ	Λ
				q_1				

На следующем шаге обозревается символ 1 и УУ находится в состоянии q_1. выполняется команда $q_1 1 \to 0Rq_1$:

Λ	0	0	1	0	Λ	Λ	Λ	Λ

q_1

На следующем шаге обозревается пустая ячейка Λ и УУ находится в состоянии q_1. Соответствующая команда имеет вид $q_1\Lambda \to \Lambda Lq_2$

Λ	0	0	1	0	Λ	Λ	Λ	Λ

q_2

Далее, согласно программе, головка движется влево вдоль всего слова, не изменяя записанные в ячейках символы до тех пор, пока не примет следующее положение:

Λ	0	0	1	0	Λ	Λ	Λ	Λ

q_2

В этом случае соответствующая команда имеет следующий вид $q_2\Lambda \to \Lambda Rq_0$. Это означает, что обозреваемая пустая ячейка остается пустой, головка сдвигается вправо и переходит в состояние q_0.

Λ	0	0	1	0	Λ	Λ	Λ	Λ

q_0

Состояние q_0 – заключительное, поэтому машина заканчивает работу, т.е. машина применима к слову S. Чтобы узнать результат применения, рассмотрим непустые символы на ленте, которые получены в результате работы машины Тьюринга, и получим, что слово S преобразовано в слово $S' = 0010$.

Заметим, что данная программа реализует процесс инвертирования заданного слова, т.е. замену в исходном слове единиц на нули, а нулей на единицы. При этом программа составлена таким образом, что в заключительном состоянии СЗУ обозревает первый символ полученного слова, т.е. возвращается в исходное состояние.

Конечные автоматы

Определение и способы задания автоматов.

Для задания конечного автомата должны быть указаны:

1. Входной алфавит $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;

2. Выходной алфавит V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$;

3. Алфавит состояний Q = $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$;

4. δ: Q × A → Q – функция переходов;

5. λ: Q × A → V – функция выходов.

Определение. Конечным автоматом называется система $S = \langle A, Q, V, \delta, \lambda \rangle$.

Такой автомат называется также автоматом Мили.

Если, кроме того, в автомате S выделено одно состояние, называемое начальным, то полученный автомат называется инициальным и обозначается { S, q }. Т.о., по не инициальному автомату с k состояниями можно k различными способами определить инициальный автомат.

Функция переходов δ(Q,x) однозначно определяет зависимость состояния автомата Q(t+1) на такте t+1 от состояния автомата Q(t) на предыдущем такте t и входного сигнала x(t).

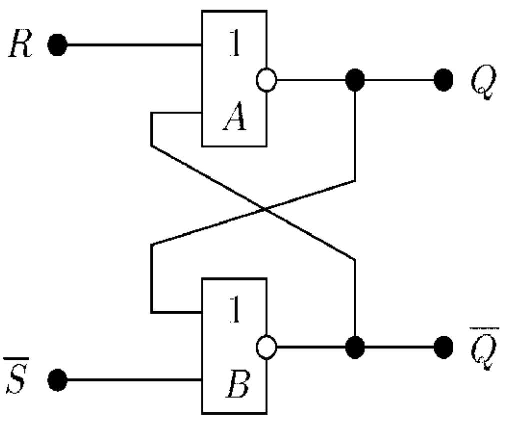
Функция выходов λ (Q,x) однозначно определяет зависимость выходного сигнала y(t) от состояния автомата Q(t) и входного сигнала x(t).

Рассмотрим важный частный случай автомата Мили – автомат Мура.

Определение. Конечный автомат называется автоматом Мура, если его функция выходов зависит только от состояний, т.е.

$$\forall q\ \forall a_i\ \forall a_j \qquad \lambda(q, a_i) = \lambda(q, a_j).$$

Функция выходов автомата Мура естественно считать одноаргументной функцией: обычно ее обозначают буквой μ и называют функцией отметок (т.к., она каждому состоянию однозначно ставит в соответствие отметку – выход). В графе автомата Мура выход пишется не на дугах, а при вершине. Несмотря на то, что автомат Мура является частным случаем автомата Мили, возможности этих автоматов практически совпадают.



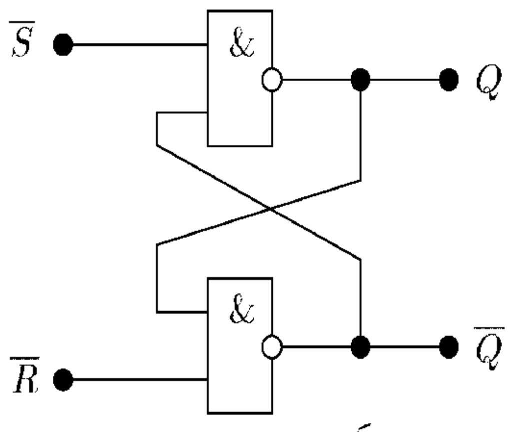


Рис. Логическая структура асинхронного RS – триггера:

слева – на стрелках Пирса; справа – на штрихах Шеффера.

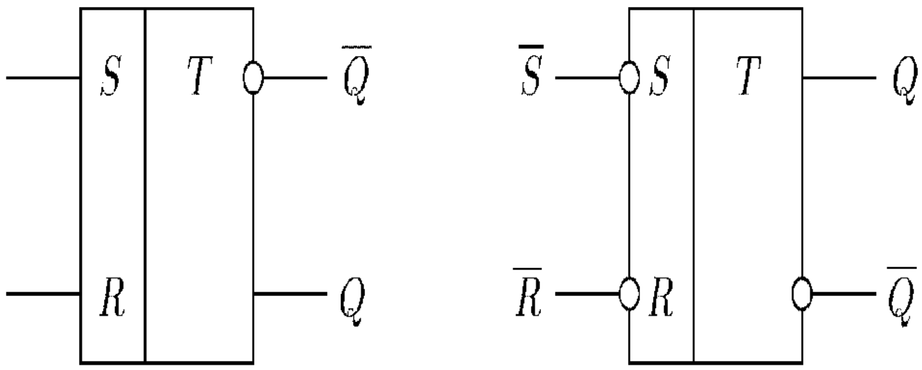


Рис. Условное графическое изображение асинхронного RS – триггера:

слева – на стрелках Пирса; справа – на штрихах Шеффера.

Задания для выполнения практических работ

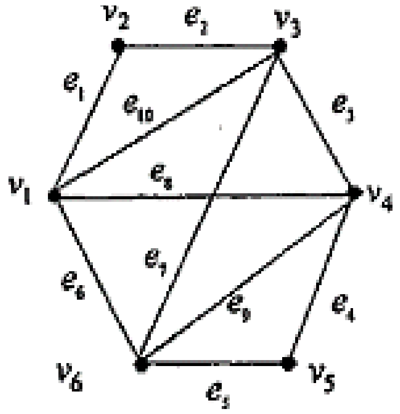
Условия задач

Задача 1. Построить таблицу истинности для заданной формулы.

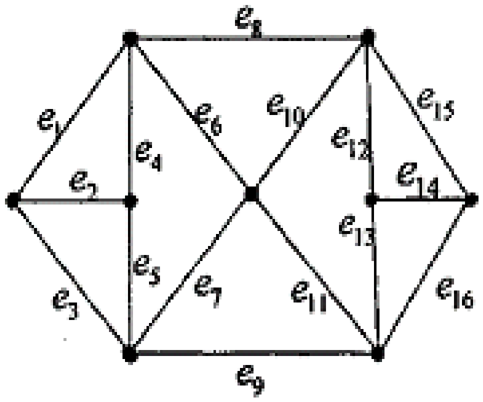
Задача 2. Преобразовать данную формулу так, чтобы она содержала только операции тесного отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Пользуясь свойствами операций дизъюнкции и конъюнкции, привести формулу к виду, не содержащему скобок.

Задача 3. Из колоды в 36 карт вынимают n карт. Указать число наборов, содержащих m карт бубновой масти и k карт пиковой масти. Рассмотреть случаи выбора с возвращением и без возвращения.

Задача 4. Пользуясь алгоритмом Дейкстры, найти кратчайшие расстояния из вершины υ_1 неориентированного взвешенного графа в другие вершины графа. Указать кратчайший маршрут из вершины υ_1 в вершину υ_4.



Задача 5. Схема дорог, соединяющих населенные пункты, задана графом, показанным на рисунке. В таблице каждому ребру графа поставлен в соответствие вес, характеризующий стоимость прокладки дорог, соединяющие данные населенные пункты. При помощи алгоритма Краскала построить схему дорог, соединяющих все населенные пункты, при наименьшей стоимости проекта.



Задача 6. Выяснить, применима ли машина Тьюринга, заданная программой P к слову S и, если применима, то указать результат применения машины Тьюринга к заданному слову.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Вариант 00

1. $x_1 \cdot x_2 \rightarrow (x_1 \vee x_2) \cdot x_3$.

2. $(x_1 \vee x_3) \cdot \overline{x}_2 \sim \overline{x}_3.$

3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=2, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	1	2	1	1	2	7	3	4

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Rq_2 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Rq_3 \end{cases} \qquad S = 110101$$

Вариант 01

1. $x_3 \cdot \overline{x}_1 \to (x_1 \vee x_2).$

2. $x_2 \cdot \bar{x}_1 \to \overline{(\bar{x}_3 \triangledown \bar{x}_1)}$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=2, k=3.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	1	2	3	2	1	2	8	3	4

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 02

1. $(x_3 \vee x_2) \to \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot x_3$.

2. $\overline{x}_3 \to (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot x_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=4, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	3	2	2	5	1	6	1	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	2

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_2 \\ q_3 1 \to 1Lq_0 \end{cases} \qquad S = 101111$$

Вариант 03

1. $\bar{x}_1 \to (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot \bar{x}_3$.

2. $\bar{x}_1 \to \overline{(\bar{x}_1 \to x_2)} \cdot \bar{x}_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=4, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	1	2	2	4	1	1	6	3	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	3	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0 q_2 \\ q_1 1 \to 1 R q_1 \\ q_2 0 \to 0 L q_3 \\ q_2 1 \to 0 q_2 \\ q_3 0 \to 1 R q_0 \\ q_3 1 \to 1 L q_3 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 04

1. $(x_1 \lor x_2) \cdot x_2 \to (\bar{x}_1 \lor x_2) \cdot \bar{x}_3$.

2. $(\bar{x}_3 \sim x_2) \to (x_1 \lor x_2) \cdot \bar{x}_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	3	1	2	2	1	7	1	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_3 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 1Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases}$$

S= 110101

Вариант 05

1. $\bar{x}_1 \cdot x_2 \to (x_3 \vee x_2)$.

2. $\bar{x}_3 \sim (\bar{x}_1 \vee \overline{(x_2 \vee x_3)})$.

3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=3, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	4	2	1	2	1	2	8	3	4

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	4	1	2	1	1	2	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Lq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_2 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 0q_0 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 06

1. $(x_3 \vee \bar{x}_1) \to (x_1 \vee x_2)$.

2. $\bar{x}_3 \to \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)}\,(\bar{x}_3 \to x_2)$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	4	3	2	3	1	8	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_3 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 1Rq_0 \end{cases} \qquad S = 101101$$

Вариант 07

1. $x_3 \cdot (x_3 \vee \bar{x}_1) \to (x_1 \vee x_2)$.

2. $((\bar{x}_1 \sim x_2) \to \bar{x}_3) \cdot x_3$.

3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=4, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	4	3	2	1	3	1	7	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0 q_3 \\ q_1 1 \to 1 R q_1 \\ q_2 0 \to 0 L q_3 \\ q_2 1 \to 1 R q_3 \\ q_3 0 \to 0 R q_0 \\ q_3 1 \to 1 L q_3 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 08

1. $\bar{x}_2 \to (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot \bar{x}_3$.

2. $\overline{x}_3 \sim (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot \overline{x}_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=4, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	3	2	8	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1 q_3 \\ q_1 1 \to 1 R q_2 \\ q_2 0 \to 0 R q_0 \\ q_2 1 \to 0 R q_3 \\ q_3 0 \to 0 q_3 \\ q_3 1 \to 1 L q_3 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 09

1. $(\overline{x}_3 \vee x_2) \to (\overline{x}_1 \sim x_2) \cdot \overline{x}_3$.

2. $(\overline{x}_1 \vee x_2) \to (\overline{x}_1 \sim x_3) \cdot \overline{x}_3$.

3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=5, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	2	1	3	1	5	1	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \rightarrow 1Rq_1 \\ q_1 1 \rightarrow 1Rq_2 \\ q_2 0 \rightarrow 0Lq_3 \\ q_2 1 \rightarrow 0Rq_3 \\ q_3 0 \rightarrow 0Rq_0 \\ q_3 1 \rightarrow 1Lq_2 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 10

1. $(x_3 \vee (\overline{x}_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow (x_1 \vee x_2)$.

2. $(x_3 \vee \overline{x}_2) \rightarrow \overline{(\overline{x}_3 \sim x_1)}$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	2	3	4	3	4	7	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_1 \\ q_2 1 \to 0Rq_0 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 1Rq_2 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 11

1. $((\overline{x}_1 \to x_2) \vee x_2) \to (\overline{x}_3 \vee x_2) \cdot x_3$.

2. $((x_1 \vee \overline{x}_3) \vee x_2) \cdot \overline{x}_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	1	2	3	2	1	3	6	1	4

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	6

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S = 101101$$

Вариант 12

1. $(\bar{x}_2 \vee x_1) \cdot x_2 \sim \bar{x}_3$.
2. $(x_3 \vee \bar{x}_1) \cdot \bar{x}_2 \to \bar{x}_3$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	3	3	7	4	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 1q_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S = 110101$$

Вариант 13

1. $\overline{x}_1 \cdot x_3 \to \overline{(x_2 \sim x_1)}$.
2. $(\overline{x}_3 \to \overline{x}_2) \to \overline{(x_2 \sim x_3)}$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	1	2	4	3	2	3	7	4	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Rq_2 \\ q_2 1 \to 0Lq_3 \\ q_3 0 \to 0q_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S = 100101$$

Вариант 14

1. $(x_3 \to \bar{x}_1) \to (x_2 \vee x_1)$.
2. $\overline{(x_3 \sim \bar{x}_1)} \to (x_2 \vee x_1)$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	3	1	2	1	3	7	4	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	6

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0Lq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_0 \end{cases} \qquad S = 100001$$

Вариант 15

1. $x_2 \vee (\overline{x}_1 \to x_3) \to x_2$.
2. $(x_1 \vee (\overline{x}_1 \to x_3)) \to \overline{x}_2$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=4.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	3	2	1	2	3	1	7	1	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S = 100101$$

Вариант 16

1. $x_3 \vee (\bar{x}_1 \to x_2)$.

2. $\bar{x}_1 \cdot x_3 \to \overline{(x_3 \vee x_1)}$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	2	3	7	2	4

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 1q_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S = 110101$$

Вариант 17

1. $x_3 \cdot (\overline{x}_1 \to x_2) \to (x_1 \vee x_2)$.
2. $x_3 (\overline{x}_1 \to x_2) \vee (x_1 \to x_2)$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=2, k=4.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	3	1	4	3	1	1	8	2	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_1 \\ q_2 1 \to 0Lq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 0q_0 \end{cases} \qquad S = 100101$$

Вариант 18

1. $(\bar{x}_3 \to x_2) \to (x_1 \vee x_2)$.

2. $\overline{(\bar{x}_3 \sim \bar{x}_2)} \to \overline{(x_1 \vee x_3)}$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	3	2	3	4	3	1	7	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 1q_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases}$$

S= 101011

Вариант 19

1. $x_1 \cdot \overline{x}_2 \to (x_1 \sim x_2) \cdot \overline{x}_3$.

2. $x_2 \cdot \overline{x}_1 \to \overline{(x_3 \to x_1)}$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	3	4	8	5	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_1 \\ q_3 0 \to 1Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S = 100001$$

Вариант 20

1. $x_2 \cdot \overline{x}_1 \to (x_1 \vee x_3)$.
2. $(x_3 \sim \overline{x}_1) \to (x_2 \vee x_1)$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	4	3	2	1	4	1	7	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 0q_0 \end{cases} \qquad S = 101111$$

Вариант 21

1. $(x_1 \vee x_2) \to (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot \bar{x}_3$.

2. $(x_2 \sim \bar{x}_1) \to \overline{(\bar{x}_3 \vee x_1)}$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	2	1	1	8	2	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	6

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 1Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Rq_2 \end{cases} \qquad S=101001$$

Вариант 22

1. $\overline{x}_3 \to (\overline{x}_1 \vee x_2)\cdot \overline{x}_3$.
2. $\overline{x}_1 \to (\overline{x}_1 \vee x_2) \to \overline{x}_3$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	1	1	2	3	1	2	8	1	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0Lq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_3 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S= 111001$$

Вариант 23

1. $\overline{(x_1\vee x_2)\cdot x_3}\to\overline{(\bar{x}_1\vee x_2)\cdot\bar{x}_3}$.

2. $\overline{(x_1\to\bar{x}_2)}\cdot x_2\to\overline{(x_1\vee x_3)}$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	4	1	3	4	2	1	7	2	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 0Lq_3 \end{cases} \qquad S = 111011$$

Вариант 24

1. $(x_1 \vee x_3) \cdot \bar{x}_2 \sim \bar{x}_3$.

2. $x_1 \cdot \bar{x}_2 \to (x_1 \vee x_2) \cdot x_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	3	4	2	3	1	8	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Rq_2 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Rq_3 \end{cases} \qquad S = 110101$$

Вариант 25

1. $x_2 \cdot \bar{x}_1 \to (x_3 \vee x_1)$.

2. $x_3 \cdot \bar{x}_1 \to (x_1 \vee x_2)$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=4, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	4	1	3	3	1	2	7	1	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	7

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \rightarrow 1q_2 \\ q_1 1 \rightarrow 1Rq_1 \\ q_2 0 \rightarrow 0Lq_3 \\ q_2 1 \rightarrow 0Rq_3 \\ q_3 0 \rightarrow 0Rq_0 \\ q_3 1 \rightarrow 1Lq_3 \end{cases} \qquad S= 111101$$

Вариант 26

1. $\overline{x}_3 \rightarrow (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot x_3$.
2. $(x_2 \vee x_1) \rightarrow (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot x_3$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=4, k=3.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	3	1	2	1	1	2	8	2	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_2 \\ q_3 1 \to 0Lq_0 \end{cases} \qquad S = 101111$$

Вариант 27

1. $\bar{x}_1 \to \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot \bar{x}_3$.

2. $\bar{x}_1 \to \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot \bar{x}_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=2, k=5.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	3	2	7	1	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 1Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S= 110101$$

Вариант 28

1. $(\bar{x}_3 \sim x_2) \to (x_1 \vee x_2) \cdot \bar{x}_3$.

2. $(x_1 \vee x_2) \cdot x_2 \to (\bar{x}_1 \vee x_2)\ \bar{x}_3$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=2, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	3	1	2	1	4	7	3	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 0 q_2 \\ q_1 1 \to 1 R q_1 \\ q_2 0 \to 0 L q_3 \\ q_2 1 \to 1 R q_3 \\ q_3 0 \to 0 R q_0 \\ q_3 1 \to 1 L q_3 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Вариант 29

1. $\overline{x}_1 \cdot x_2 \to x_3 \vee x_2$).

2. $\overline{x}_3 \sim (\overline{x}_1 \vee \overline{(x_2 \vee x_3)})$.

3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=2, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	2	3	1	2	7	1	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 1Rq_3 \end{cases} \qquad S = 101101$$

Вариант 30

1. $\bar{x}_3 \to \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot (\bar{x}_3 \to x_2)$.
2. $(\bar{x}_1 \vee x_3) \to (x_2 \vee x_1)$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=2, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	4	1	2	3	1	2	7	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P=\begin{cases} q_10 \to 0q_2 \\ q_11 \to 1Rq_1 \\ q_20 \to 0Lq_3 \\ q_21 \to 1Rq_3 \\ q_30 \to 0Rq_0 \\ q_31 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S=111101$$

Вариант 31

1. $((\overline{x}_1 \sim x_2) \to \overline{x}_3) \cdot x_3$.
2. $x_3 \cdot (\overline{x}_1 \vee x_3) \to (x_2 \vee x_1)$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=2, k=5.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	2	1	3	1	1	6	4	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P= \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0q_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S= 111101$$

Вариант 32

1. $\bar{x}_3 \sim (\bar{x}_1 \vee x_2)\cdot \bar{x}_3$.
2. $\bar{x}_2 \to (x_2 \vee \bar{x}_1)\cdot \bar{x}_3$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=2, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	2	1	2	3	3	2	6	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_1 \\ q_2 1 \to 0Rq_0 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 1Rq_2 \end{cases} \qquad S= 111001$$

Вариант 33

1. $(\overline{x}_1 \vee x_2) \to (\overline{x}_1 \sim x_3) \cdot \overline{x}_3$.
2. $(\overline{x}_3 \vee x_2) \to (\overline{x}_1 \sim x_2) \cdot \overline{x}_3$.
3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=3, k=4.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	3	2	1	2	1	2	7	3	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_1 \\ q_2 1 \to 0Rq_0 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 1Rq_2 \end{cases} \qquad S = 111001$$

Вариант 34

1. $(\bar{x}_2 \vee x_3) \to (x_1 \sim x_3)$.
2. $(x_3 \vee (\bar{x}_1 \to x_2)) \to (x_1 \vee x_2)$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	3	2	3	4	1	1	7	3	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	6

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S=101001$$

Вариант 35

1. $((x_1 \to x_3) \vee x_2)\cdot \overline{x}_3$.
2. $((\overline{x}_1 \to x_2) \vee x_2) \to (\overline{x}_3 \vee x_2)\cdot x_3$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	3	2	1	1	3	8	4	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 1q_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S= 110101$$

Вариант 36

1. $(\bar{x}_1 \sim x_3)\cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$.
2. $(\bar{x}_1 \vee x_2)\cdot x_1 \sim \bar{x}_3$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	1	2	3	2	2	6	1	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1 L q_2 \\ q_1 1 \to 1 R q_1 \\ q_2 0 \to 0 R q_3 \\ q_2 1 \to 0 q_2 \\ q_3 0 \to 0 R q_3 \\ q_3 1 \to 1 L q_0 \end{cases} \qquad S = 100101$$

Вариант 37

1. $(\bar{x}_3 \to x_2) \to \overline{(x_1 \sim x_2)}$.

2. $\bar{x}_1 \cdot x_3 \to \overline{(\bar{x}_1 \sim x_2)}$.

3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	1	4	1	2	2	2	6	1	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Lq_3 \\ q_3 0 \to 0q_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S= 110101$$

Вариант 38

1. $(\overline{x}_3 \sim x_1) \to (x_1 \sim x_2)$.

2. $(x_3 \sim \overline{x}_1) \to (x_1 \vee x_2)$.

3. Производится неупорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	2	3	4	3	2	7	3	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P= \begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S= 100101$$

Вариант 39

1. $(x_1 \vee (\bar{x}_1 \to x_3)) \to \bar{x}_2$.
2. $x_2 \vee (\bar{x}_1 \to x_3) \to x_2$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=3, k=4.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	3	2	1	2	2	3	6	3	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 1q_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S= 110101$$

Вариант 40

1. $\overline{x}_1 \cdot x_3 \to \overline{(x_1 \vee x_3)}$.
2. $x_3 \vee (\overline{x}_1 \to x_2)$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=3, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	3	2	1	2	1	2	7	1	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_1 \\ q_2 1 \to 0Lq_3 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 0q_0 \end{cases} \qquad S = 100101$$

Вариант 41

1. $x_3(\overline{x}_1 \cdot \to x_2) \vee (x_1 \to x_2)$.

2. $x_3 \cdot (\overline{x}_1 \to x_2) \to (x_1 \vee x_2)$. .

3. Производится неупорядоченный выбор: n=7, m=2, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	2	1	2	7	1	3

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 1q_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S = 101011$$

Вариант 42

1. $(\bar{x}_3 \cdot \sim \bar{x}_2) \to (x_3 \vee x_1)$.
2. $(\bar{x}_3 \to x_2) \to (x_1 \vee x_2)$.   .
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=3, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	3	3	4	4	1	6	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_1 \\ q_3 0 \to 1Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S=100001$$

Вариант 43

1. $x_2\cdot \bar{x}_1 \to (x_3 \to x_1)$.
2. $x_1\cdot \bar{x}_2 \to (x_1 \sim x_2)\cdot \bar{x}_3$. .
3. Производится неупорядоченный выбор: n=8, m=2, k=4.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
4	3	3	2	1	1	3	7	3	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 0q_0 \end{cases} \qquad S= 101111$$

Вариант 44

1. $(x_3 \sim \overline{x}_1) \to (x_2 \vee x_1)$.
2. $x_1 \cdot \overline{x}_2 \to (x_1 \vee x_3) \cdot x_2$. .
3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=2, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
2	1	2	2	3	1	2	7	1	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 1Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Rq_2 \end{cases} \qquad S=101001$$

Вариант 45

1. $(x_2 \sim \bar{x}_1) \to (\bar{x}_3 \vee x_1)$.

2. $(x_1 \vee x_2) \to (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot \bar{x}_3$. .

3. Производится неупорядоченный выбор: n=6, m=3, k=2.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	3	4	3	4	7	1	2

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	6

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0Lq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases} \qquad S=111001$$

Вариант 46

1. $\bar{x}_1 \to (\bar{x}_1 \vee x_2) \to \bar{x}_3.$
2. $\bar{x}_3 \to (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot \bar{x}_3.$.
3. Производится неупорядоченный выбор: n=6, m=2, k=2.
4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	1	2	1	2	3	3	7	3	4

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	4

6.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 0Lq_3 \end{cases} \qquad S = 111011$$

Вариант 47

1. $\overline{(\overline{x}_2 \vee x_1)} \cdot x_2 \to \overline{(x_1 \vee x_3)}$.

2. $\overline{(x_1 \vee x_2)} \cdot x_3 \to \overline{(\overline{x}_3 \vee x_2)} \cdot \overline{x}_3$. .

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=2, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	3	2	3	2	2	7	3	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P=\begin{cases} q_10 \to 1Rq_2 \\ q_11 \to 1Rq_1 \\ q_20 \to 0Lq_3 \\ q_21 \to 0q_2 \\ q_30 \to 0Rq_3 \\ q_31 \to 0q_0 \end{cases} \qquad S= 101111$$

Вариант 48

1. $(\overline{x}_1 \sim x_3) \to (x_1 \vee x_2)$.

2. $x_2 \cdot \overline{x}_1 \to (x_3 \vee x_1)$. .

3. Производится упорядоченный выбор: n=8, m=4, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	2	1	2	3	4	3	7	2	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	3

6.

$$P= \begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_3 \\ q_3 1 \to 0Lq_0 \end{cases} \qquad S= 101001$$

Вариант 49

1. $\overline{x}_1 \cdot x_2 \to (x_3 \vee x_1)$.
2. $x_1 \cdot \overline{x}_2 \to (x_2 \sim x_1) \cdot \overline{x}_3$.   .
3. Производится упорядоченный выбор: n=7, m=2, k=3.

4.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
3	2	4	1	2	3	3	8	4	1

5.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2	1	2	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	1	5

6.

$$P = \left\{ \begin{array}{l} q_1 0 \to 1Rq_1 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_1 \\ q_3 0 \to 1Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Rq_2 \end{array} \right.$$

S= 101101