МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИЗАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФИЛИАЛ

С.А. Докучаев
В.Н. Ефименко
Г.С. Костецкая
Л.А. Прушинская

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(учебное пособие)

Ростов-на-Дону
2003

УДК 510 План издания УМД на 2003/2004 уч.год

Высшая математика
(учебное пособие)

С.А.Докучаев, В.Н.Ефименко,
Г.С.Костецкая, Л.А.Прушинская

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике, составленный с учетом всех требований и особенностей учебной программ для студентов, изучающих курс Высшей математики специальностей 201000 200900. Пособие снабжено большим количеством задач, примеров.

Утверждено на заседании Кафедры общенаучной подготовки
СКФ МТУСИ от 08.09.03 (протокол №1)

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§ 1.1. Вспомогательные сведения и определения

1. Известно, что каждая точка прямой характеризуется одним числом: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$. Расстояние между точками M_1 и M_2 находится по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

В этом случае будем говорить, что имеем одномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^1$.

ε-окрестностью точки $A(a)$ в этом пространстве называется интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ или множество точек $M(x)$, подчиняющихся условию

$$\rho(M, A) < \varepsilon.$$

2. Каждая точка плоскости характеризуется упорядоченной парой чисел $M(x, y)$. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В этом случае будем говорить, что имеем двумерное евклидово пространство $\mathbb{R}^2$.

ε-окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ назовем множество точек плоскости $M(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\rho(M_0, M) < \varepsilon \quad \text{или} \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$

По аналогии рассмотрим точки $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$ и $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)})$, расстояние между этими точками введем по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)})^2 + \ldots + (x_m^{(2)} - x_m^{(1)})^2}. \qquad (1.1)$$

Определение 1.1. *Пространство, в котором каждая точка определяется упорядоченным набором «m» действительных чисел, а расстояние между двумя точками определяется формулой (1.1), называется «m»-мерным евклидовым пространством и обозначается* $\mathbb{R}^m$.

Определение 1.2. *ε-окрестностью точки $M_0(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$ называется множество точек $M(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющих условию*

$$\rho(M_0, M) < \varepsilon$$

или

$$\sqrt{\left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \ldots + \left(x_m - x_m^{(0)}\right)^2} < \varepsilon$$

или

$$\left(x_1 - x_1^{(0)}\right)^2 + \ldots + \left(x_m - x_m^{(0)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

это «m»-мерный шар с центром в $(\cdot)$ M_0 радиуса ε.

Определение 1.3. *Точка M_0 называется внутренней точкой множества $D \subset \mathbb{R}^m$, если существует такая ε-окрестность этой точки, которая целиком принадлежит данному множеству (см. рис. 1 для $\mathbb{R}^2$).*

Определение 1.4. *Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ называется открытым множеством, если любая его точка является внутренней.*

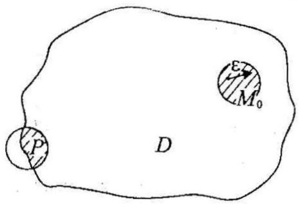


Рис. 1

Определение 1.5. *Точка P называется граничной точкой множества D, если любая окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие множеству D, так и точки, не принадлежащие ему (см. рис. 1).*

Определение 1.6. *Если к открытому множеству добавить все его граничные точки, то полученное множество называется замкнутым.*

Пример 1.1. D: $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$ — замкнутое множество (рис. 2).

Пример 1.2. D: $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 1$ — открытое множество (рис. 3).

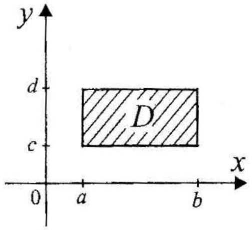


Рис. 2

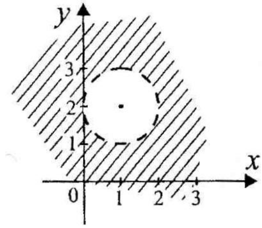


Рис. 3

Определение 1.7. *Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ называется ограниченным, если все его точки лежат внутри некоторого m-мерного шара (рис. 4).*

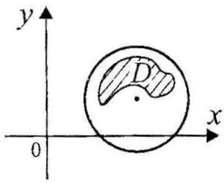


Рис. 4

Определение 1.8. *Непрерывной кривой L в $\mathbb{R}^m$ называется множество точек этого пространства, координаты которых $x_1, \ldots, x_m$ представляют собой непрерывные функции параметра t, $t \in [\alpha, \beta]$:*

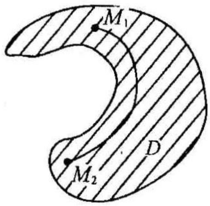
$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_m = \varphi_m(t) \end{cases} . \tag{1.2}$$

Определение 1.9. *Будем говорить, что точки $M_1(x_1^1, \ldots, x_m^1)$ и $M_2(x_1^2, \ldots, x_m^2)$ можно соединить непрерывной кривой L, если*

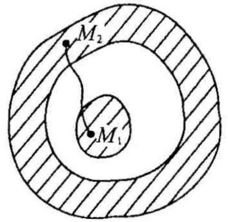
$$x_1^1 = \varphi_1(\alpha); \quad x_2^1 = \varphi_2(\alpha); \quad \ldots; \quad x_m^1 = \varphi_m(\alpha), \quad a$$

$$x_2^1 = \varphi_1(\beta); \quad x_2^2 = \varphi_2(\beta); \quad \ldots; \quad x_m^2 = \varphi_m(\beta).$$

Определение 1.10. *Множество D называется связным, если, любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.*



связное



не связное

Рис. 5

§ 1.2. Последовательность и ее предел в $\mathbb{R}^m$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ последовательность точек $M^{(n)}\big(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\big)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и обозначим ее $\{M^{(n)}\}$.

Определение 1.11. *Точка $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется пределом последовательности $\{M^{(n)}\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что расстояние между $M^{(n)}$ и A может быть сделано меньше ε, как только $n > N$, то есть*

$$\rho(M^{(n)}, A) < \varepsilon, \quad n > N.$$

Обозначать это будем так $\lim\limits_{n\to\infty} M^{(n)} = A$. Последовательность, имеющую предел, назовем сходящейся.

Лемма 1.1 (о покоординатной сходимости). *Для того, чтобы последовательность $\{M^{(n)}\}$, $M^{(n)}(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ сходилась к точке $A(a_1, \ldots, a_m)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующие последовательности координат переменной точки сходились к координатам точки A, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1$, $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m$.*

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} M^{(n)} = A$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n > N \quad \Longrightarrow \quad \rho(M^{(n)}, A) < \varepsilon \quad \text{или}$$

$$\sqrt{\big(x_1^{(n)} - a_1\big)^2 + \big(x_2^{(n)} - a_2\big)^2 + \ldots + \big(x_m^{(n)} - a_m\big)^2} < \varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$\big(x_1^{(n)} - a_1\big)^2 + \big(x_2^{(n)} - a_2\big)^2 + \ldots + \big(x_m^{(n)} - a_m\big)^2 < \varepsilon^2 \quad \text{для} \quad n > N \quad \Longrightarrow$$

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1$$

$$|x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon, \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда по любому $\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)$: $\forall n > N_1 \implies |x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon$

$$\exists N_2 = N_2(\varepsilon):\ \forall n > N_2 \implies |x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \quad \dots,$$

$$\exists N_m = N_m(\varepsilon):\ \forall n > N_m \implies |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon.$$

Обозначим через $N =$ наиб$(N_1, N_2, \dots, N_m)$, тогда для $n > N$ имеем

$$\begin{aligned}\rho(M^{(n)}, A) \ &= \ \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \ldots + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2} < \\ &< \ \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{m},\end{aligned}$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} M^{(n)} = A$. Лемма доказана. □

Отметим, что все свойства сходящихся последовательностей одной переменной имеют место и для «m»-мерной сходящейся последовательности.

§ 1.3. Функция «m» переменных и ее предел

Определение 1.12. *Говорят, что на множестве $D \subset \mathbb{R}^m$ задана функция, если каждой точке $M(x_1, \dots, x_m) \in D$ по определенному закону ставится в соответствие некоторое число u. Множество D называют областью определения функции.*

Это факт коротко записывается так

$$u = f(M), \quad M \in D \quad \text{или} \quad u = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Число u, соответствующее фиксированной точке $M \in D$, называют частным значением функции. Множество всех частных значений, когда точка M «пробегает» всю область D, называют множеством частных значений функции.

Если $m = 2$, то пишут $u = f(x, y)$; если $m = 3$, то $u = f(x, y, z)$.

Пример 1.3. $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Найдем область определения функции. Очевидно $1-x^2-y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2+y^2 \leqslant 1$ — круг с центром в $O(0,0)$, $R=1$ (рис. 6).

Пример 1.4. $u = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$. Область определения задается условием $\sin(x^2+y^2) \geqslant 0$. Значит $\pi k \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

При $k=0$ имеем $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi$;

$k=1$ имеем $2\pi \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3\pi$ и т. д. (рис. 7).

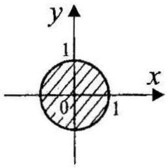


Рис. 6

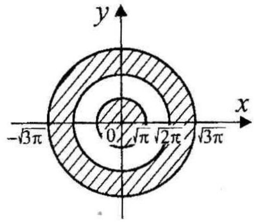


Рис. 7

Как известно, функция одной переменной изображается на плоскости в виде линии, определенной уравнением $y = f(x)$. Рассмотрим функцию 2-х переменных $z = f(x, y)$, определенную на некотором множестве D. Выберем произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ и вычислим $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда получим точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$, расположенную в 3-х-мерном пространстве. Поступая так со всеми точками M данного множества D, мы получим некоторую поверхность, уравнение которой $z = f(x, y)$. При этом проекция этой поверхности на плоскость xOy есть множество D. Эту поверхность и будем считать геометрическим изображением функции двух переменных (рис. 8).

Очевидно, что если $m \geqslant 3$, то никакой геометрической интерпретации не существует.

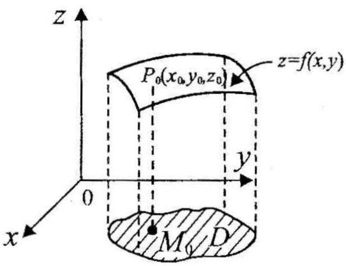


Рис. 8

Введем теперь понятие предела функции.

Определение 1.13. *Точка M_0 называется предельной точкой множества D, если в любой окрестности точки M_0 есть точка $A \in D$, отличная от точки M_0. Точка M_0 может принадлежать множеству D, а может и не принадлежать ему.*

Пусть функция $u = f(M)$ задана на множестве D, и M_0 — предельная точка этого множества.

Определение 1.14 (по Гейне). *Число a называется пределом функции $u = f(M)$ при стремлении точки M к точке M_0, если всякой последовательности $\{M^{(n)}\}$ из области определения D, такой что $M^{(n)} \neq M_0$ и $\{M^{(n)}\}$ сходящейся к M_0, соответствующая числовая последовательность $\{u^{(n)}\} = \{f(M^{(n)})\}$ сходится к числу a.*

Пример 1.5. Найти предел функции $u = x - y + 1$ при условии, что $M(x, y) \to M_0(1, 0)$.

Решение. Область определения данной функции D — вся плоскость. Выберем произвольную последовательность $M^{(n)}\left(\dfrac{n}{n-1}; \dfrac{2n}{n^2+5}\right) \to M_0(1, 0)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
u^{(n)} &= f(M^{(n)}) = \frac{n}{n-1} - \frac{2n}{n^2+5} + 1 = \\
&= \frac{n^3 + 5n - 2n^2 + 2n + n^3 - n^2 + 5n - 5}{(n-1)(n^2+5)} = \\
&= \frac{2n^3 - 3n^2 + 12n - 5}{n^3 - n^2 + 5n - 5} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{5}{n^3}} \to 2, \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Однако, мы не может пока утверждать, что $a = 2$, так как в определении требуется, чтобы $a = 2$ для любой числовой последовательности $\{M^{(n)}\} \to M_0(1, 0)$.

Пусть $M^{(n)}(x_n, y_n) \to M_0(1, 0)$, то есть $x_n \to 1$, $y_n \to 0$. Тогда

$$u^{(n)} = f(M^{(n)}) = x_n - y_n + 1 \;\to\; 1 - 0 + 1 = 2.$$

Значит $a = 2$ и $\lim\limits_{M \to M_0} (x + y - 1) = 2$.

Определение 1.15 (по Коши). *Число a называется пределом функции $u = f(M)$ при стремлении точки M к точке M_0, если для любого сколь* *угодно малого положительного числа ε найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$, такое что для всяких точек M, таких что $\rho(M_0, M) < \varepsilon$ выполняется неравенство $|f(M) - a| < \varepsilon$.*

Запишем символически определения предела функции по Гейне и по Коши:

по Гейне: $\forall \{M^{(n)}\} \in D$, $M^{(n)} \neq M_0$,

$$\{M^{(n)}\} \to M_0 \implies \{u^{(n)}\} = \{f(M^{(n)})\} \to a;$$

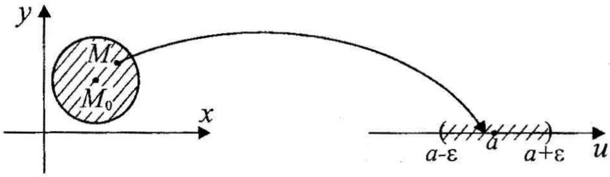
по Коши: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall M \in D, \quad 0 < \rho(M_0 M) < \delta \implies |f(M) - a| < \varepsilon.$$

Оба определения коротко запишем так

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = a.$$

Геометрически $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a$ означает, что как только точка M попадает в δ-окрестность точки M_0, так значения функции $u = f(M)$ попадают в ε-окрестность числа a, то есть в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

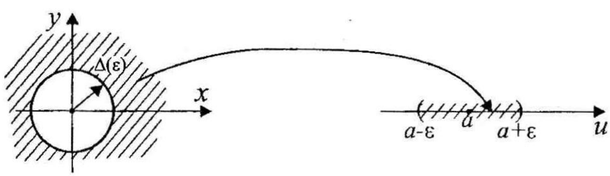


Рассмотрим частные случаи:

1. $M_0 = \infty$; $a \neq \infty$. Запишем символически.

Определение 1.16. $\lim\limits_{M \to \infty} f(M) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ *сколь угодно большое, такое что* $|f(M) - a| < \varepsilon$, $\forall M \in D$ *и* $\rho(M, 0) > \Delta$.

Геометрическая интерпретация.

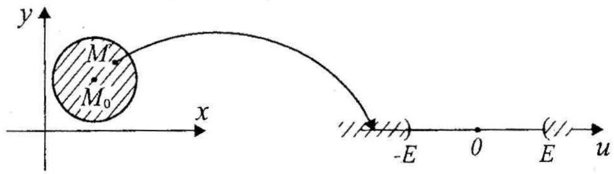


2. $M_0 \neq \infty$; $a = \infty$, т. е. $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \infty$.

Определение 1.17. *Говорят, что функция $u = f(M)$ стремится к бесконечности (бесконечно большая) при стремлении точки M к точке M_0, если для любого сколь угодно большого E найдется $\delta = \delta(E)$, такое что*

$$|f(M)| > E, \quad \forall M \in D \quad \text{и} \quad 0 < \rho(M, M_0) < \delta.$$

Геометрическая интерпретация.



3. $M_0 = \infty$; $a = \infty$, т. е. $\lim\limits_{M \to \infty} f(M) = \infty$.

Сформулировать и дать геометрическую интерпретацию самостоятельно. Полезно также дать определение предела функции по Гейне во всех этих частных случаях (сделайте это!).

Для функций многих переменных, как и для функций одной переменной, имеет место

Теорема 1.1. *Если* $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a$; $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = b$, *то*

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} g(M) = a + b$$

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \cdot g(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} g(M) = a \cdot b$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(M)} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0).$$

(Доказательство полностью повторяет случай функции одной переменной).

Справедливы также и другие теоремы для функции многих переменных, имеющих предел в точке M_0, которые раньше доказывались для функции одной переменной, имеющей предел.

§ 1.4. Непрерывность функции многих переменных

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве D, $M_0 \in D$ и является предельной точкой множества D.

Определение 1.18. *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если существует*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{1.3}$$

Определение 1.19 (по Гейне). *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если для любой последовательности $\{M^{(n)}\} \in D$, $\{M^{(n)}\} \to M_0$, соответствующая числовая последовательность $\{f(M^{(n)})\} \to f(M_0)$.*

Определение 1.20 (по Коши). *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что*

$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon, \quad \rho(M, M_0) < \delta.$$

Дадим определение непрерывной в точке функции на «языке» приращений. Равенство (1.3) можно переписать

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots \dots \dots \\ x_m \to x_m^0}} f(M) = f(M_0).$$

Обозначим $x_1 - x_1^0 = \Delta x_1$; $x_2 - x_2^0 = \Delta x_2$; $\dots$; $x_m - x_m^0 = \Delta x_m$ — приращения аргументов.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(M) - f(M_0) = \\ &= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \end{aligned}$$

— полное приращение функции в точке M_0, соответствующее приращениям аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

Из равенства (1.3) следует равенство

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0. \tag{1.4}$$

Таким образом дадим

Определение 1.21. *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если бесконечно малому приращению аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Введенные выше определения (1.18–1.21) непрерывности функции в точке будем называть непрерывностью функции по совокупности переменных.

Можно также ввести понятие непрерывной в точке M_0 функции по одной из переменных. Пусть, например,

$$\Delta x_1 \neq 0, \quad \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_m = 0.$$

Тогда $\Delta_{x_1} u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ — частное приращение функции $u = f(M)$ по переменной x_1 в точке M_0.

Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 по переменной x_1, если выполняется равенство $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \Delta_{x_1} u = 0$.

Аналогично можно ввести понятие непрерывной в точке M_0 функции по любой переменной x_k:

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_m^0)$$

Определение 1.22. *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 по переменной x_k, если выполняется равенство*

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0. \tag{1.5}$$

Заметим, что из непрерывности функции $u = f(M)$ в точке M_0 по совокупности переменных следует непрерывность этой функции в точке M_0 по каждой переменной x_k. Обратное, вообще говоря, не верно. Это утверждение очевидно следует из геометрических соображений. Действительно, непрерывность в точке M_0 по совокупности переменных означает, что $\Delta u \to 0$, когда переменная точка M стремится к фиксированной точке M_0 *по любому пути* (рис. 9). Непрерывность же по каждой переменной в точке M_0 (например, по переменной x_1) означает, что приращение $\Delta u \to 0$, когда переменная точка M стремится к точке M_0, оставаясь *на прямой*, параллельной соответствующей оси (в нашем случае параллельно оси Ox_1) (рис. 10).

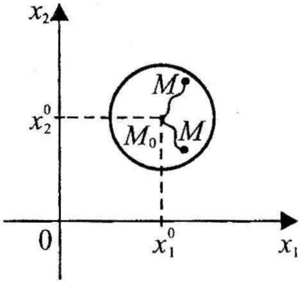


Рис. 9

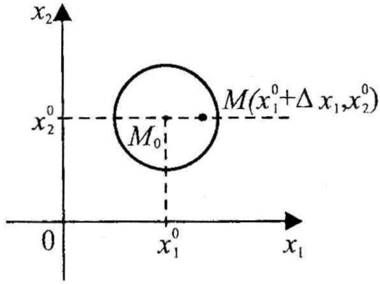


Рис. 10

Приведем без доказательства основные свойства непрерывных в точке M_0 функций многих переменных, поскольку они в основном аналогичны доказательствам соответствующим свойствам функций одной переменной.

Теорема 1.2. *Если $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M_0, то $f(M) \pm g(M)$; $f(M) \cdot g(M)$; $f(M)/g(M)$, $(g(M_0) \neq 0)$ непрерывны в точке M_0.*

Теорема 1.3 (о сохранении знака непрерывной функции). *Если $f(M)$ непрерывна в M_0, $f(M_0) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0, такая что для всех точек M из этой окрестности выполняется условие*

$$\operatorname{sgn} f(M) = \operatorname{sgn} f(M_0).$$

Теорема 1.4 (о непрерывности сложной функции). *Пусть заданы функции*

$$x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.6}$$

определенные на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и принимающие значения на $\mathcal{J}$. И пусть

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \tag{1.7}$$

определены на множестве $\mathcal{J}$. Тогда будем говорить, что на D задана сложная функция

$$u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \varphi_2(t_1, \ldots, t_n), \ldots \varphi_m(t_1, \ldots, t_n)). \tag{1.8}$$

Если функции (1.6) непрерывны в некоторой точке $N_0(t_1^0, \ldots, t_n^0) \in D$, а функция (1.7) непрерывна в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, где $x_k^0 = \varphi_k(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то сложная функция (1.8) непрерывна в точке N_0.

Будет полезно провести доказательство этих теорем самостоятельно.

Определение 1.23. *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Замкнутое ограниченное множество, в котором определена функция m переменных, является аналогом сегмента для функции одной переменной. Все теоремы, доказанные в свое время для непрерывной на сегменте функции одного переменного, остаются справедливыми и для функции многих переменных, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве. Например, справедливы

Теорема 1.5 (1-я теорема Вейерштрасса). *Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то она ограничена на этом множестве.*

Теорема 1.6 (2-я теорема Вейерштрасса). *Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то она достигает на нем своих точных границ, то есть существуют точки $M_1 \in D$, $M_2 \in D$ такие, что*

$$f(M_1) = \inf_{M \in D} f(M); \quad f(M_2) = \sup_{M \in D} f(M).$$

Теорема 1.7 (теорема Кантора). *Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то она равномерно непрерывна на этом множестве, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $M', M'' \in D$ и удовлетворяющих условию $\rho(M', M'') < \delta$ выполняется неравенство $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$.*

§ 1.5. Частные производные и дифференцируемость функции многих переменных

Рассмотрим функцию $u = f(M)$, фиксированную точку M_0 и переменную точку $M(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots x_m^0)$.

Рассмотрим частное приращение функции по переменной x_k ($\Delta_{x_k} u$). Составим дробь $\dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$.

Определение 1.24. *Если существует конечный предел отношения частного приращения функции по переменной x_k в точке M_0 к приращению аргумента Δx_k при условии $\Delta x_k \to 0$, то этот предел называют частной производной функции $u = f(M)$ в точке M_0 по переменной x_k и обозначают* $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0}$, $u'_{x_k}(M_0)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}. \tag{1.9}$$

Заметим, что находя приращение функции по переменной x_k мы все аргументы функции считаем фиксированными, кроме x_k, то есть мы работаем с функцией одного переменного x_k. Поэтому частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ это все равно, что обычная производная функции $u = f(M)$ по переменной x_k, когда все остальные переменные зафиксированы.

Пример 1.6. $u = e^{-(x^2-y^3)} + \sin(xy^2)$. Найдем частные производные.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-(x^2-y^3)}(-2x) + \cos xy^2 \cdot y^2 = -2xe^{-(x^2-y^3)} + y^2\cos(xy^2),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-(x^2-y^3)} \cdot 3y^2 + \cos(xy^2) \cdot 2xy.
\end{aligned}$$

Физический смысл частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ — скорость изменения функции в направлении оси Ox_k.

А теперь дадим понятие дифференцируемости функции $u = f(M)$. Пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, $M(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$. Рассмотрим полное приращение функции в точке M_0:

$$\Delta u = f(M) - f(M_0).$$

Определение 1.25. *Функция $u = f(M)$ называется дифференцируемой в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке может быть представимо в виде*

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m, \tag{1.10}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — некоторые постоянные, независящие от Δx_1, Δx_2, …, Δx_m; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — бесконечно малые функции аргументов Δx_1, Δx_2, …, Δx_m.

Обозначим через $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$; геометрически ρ является расстоянием между точкой M_0 и точкой M. Очевидно, что $\rho \to 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$.

Покажем, что

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho), \quad \rho \to 0.$$

Для этого достаточно показать, что $\dfrac{\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$:

$$\left| \frac{\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m}{\rho} \right| = \left| \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}} \right| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m| \to 0 \quad \text{при } \rho \to 0,$$

т. к. $\dfrac{\Delta x_k}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}} \leqslant 1$.

Таким образом, условие дифференцируемости (1.10) можно переписать так:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho). \tag{1.11}$$

Теорема 1.8. *Если функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Воспользуемся условием дифференцируемости (1.10) и найдем

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} (A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m) = 0.$$

$\square$

Замечание. *Из существования любой частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ в точке M_0 следует непрерывность только по переменной x_k в этой точке.*

Теорема 1.9 (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она имеет в этой точке все частные производные.*

Доказательство. Из условия дифференцируемости (1.10), положив $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_m = 0$, получим $\Delta x_1 u = A_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \dfrac{\Delta x_1 u}{\Delta x_1} = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1$, значит, $A_1 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}$. Аналогично получим $A_k = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0}$, $k = 2, 3, \ldots, m$. Утверждение доказано. □

Следствие. *Условие дифференцируемости (1.10), (1.11) можно переписать теперь в следующем виде*

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m \tag{1.12}$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + o(\rho). \tag{1.13}$$

Отметим, что утверждения, обратные теоремам 1.8 и 1.9, неверны, то есть из непрерывности или существования частных производных в точке M_0 не следует дифференцируемость функции в точке M_0.

Пример 1.7. Дана функция $u = f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ и точка $M_0(0,0)$. Покажем, что эта функция непрерывна в точке M_0, имеет частные производные в этой точке, но не является дифференцируемой в точке M_0.

1) непрерывность в точке $M_0(0,0)$. Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$. У нас $f(0,0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{|x||y|} = 0 = f(0,0)$ — выполнено;

2) частные производные в точке $M_0(0,0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

3) не является дифференцируемой в точке $M_0(0,0)$. Предположим противное, пусть $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(0,0)$. Тогда

$$\Delta u = \sqrt{|\Delta x||\Delta y|} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

и так как $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$, то $\sqrt{|\Delta x||\Delta y|} = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$.

Рассмотрим

$$\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y = \rho\frac{\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y}{\rho} =$$

$$+\rho\left(\alpha_1\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta y)^2}} + \alpha_2\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta y)^2}}\right) = \rho\gamma,$$

причем $\gamma = \dfrac{\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta y)^2}} \to 0$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

С другой стороны,

$$\gamma = \frac{\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta y)^2}} = \frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = |\Delta x = \Delta y| =$$

$$= \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0.$$

Следовательно, получили противоречие, значит, функция $u = \sqrt{|x||y|}$ не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Теорема 1.10 (достаточное условие дифференцируемости). *Пусть функция $u = f(M)$ имеет все частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ в некоторой окрестности точки M_0 и пусть эти производные непрерывны в самой точке M_0. Тогда функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0.*

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 2$, т. е. $u = f(x, y)$ и покажем, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ выполнено условие дифференцируемости (1.12) для $u = f(x, y)$. Зададим Δx, Δy так, чтобы переменная точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ не выходила за пределы окрестности точки M_0, о которой говорится в теореме. Приращение функции в точке M_0 имеет вид

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \big[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\big] + \big[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\big].$$

Выражение в первых скобках можно рассматривать как приращение функции $f(x, y_0 + \Delta y)$ одной переменной x на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Так как функция $u = f(x, y)$ имеет частные производные, то функция $f(x, y_0+\Delta y)$

дифференцируемая и ее производная по x представляет собой частную производную f'_x исходной функции. По теореме Лагранжа для функции $f(x, y_0 + \Delta y)$ на промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ имеем

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x,$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Аналогично, $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y$, где $0 < \theta_2 < 1$.

Воспользуемся теперь непрерывностью частных производных в точке M_0. Имеем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0).$$

Следовательно, $f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Аналогично,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0),$$

следовательно, $f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta$, где $\beta \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

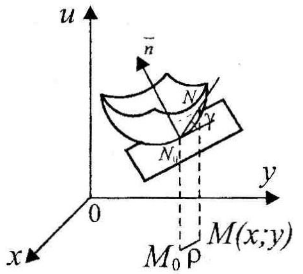
Таким образом

$$\begin{aligned} \Delta u &= [f'_x(x_0, y_0) + \alpha]\Delta x + [f'_y(x_0, y_0) + \beta]\Delta y = \\ &= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \end{aligned}$$

что и означает дифференцируемость функции $u = f(x, y)$ в точке M_0. Теорема доказана. □

Выясним геометрический смысл условия дифференцируемости. Очевидно это возможно только в случае функции двух переменных. Мы знаем, что что геометрической интерпретацией функции $u = f(x, y)$ является некоторая поверхность, уравнение которой $u = f(x, y)$.

Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. На поверхности $u = f(x, y)$ точке M_0 соответствует точка $N_0(x_0, y_0, u_0)$, $u_0 = f(x_0, y_0)$.



Выберем произвольную точку поверхности $N(x, y, u)$, пусть $M(x, y)$ — проекция точки N на плоскость xOy. Через ρ обозначим расстояние между точками M_0 и M, то есть $\rho = \rho(M_0, M)$. Тогда в силу дифференцируемости $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Определение 1.26. *Касательной плоскостью к поверхности $u = f(x, y)$ в точке N_0 назовем плоскость, проходящую через эту точку и такую, что угол между этой плоскостью и секущей N_0N, где N — произвольная точка поверхности, стремится к нулю, когда точка N стремится к точке N_0.*

Покажем, что из условия дифференцируемости функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 следует существование касательной плоскости к поверхности $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

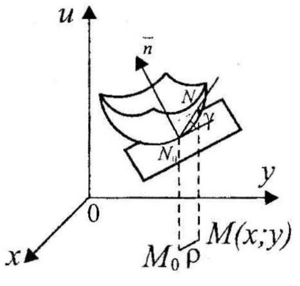
Рассмотрим плоскость $u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ и покажем, что это и есть касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$. Для этого нужно показать, что а) она проходит через точку N_0; б) угол между секущей N_0N и нормалью $\overline{n}$ к этой плоскости в точке N_0 стремится к $\pi/2$ (все равно, что угол γ между секущей N_0N и касательной плоскостью стремится к 0).

Утверждение а) очевидно. Докажем б). Обозначим через φ угол между $\overline{n}$ и $\overline{N_0N}$ и вычислим $\cos\varphi$:

$\overline{N_0N} = \{x - x_0, y - y_0, u - u_0\}$; $\quad \overline{n} = \{A; B; -1\}$ (из уравнения плоскости),

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_0N} \cdot \overline{n}}{|\overline{N_0N}| \cdot |\overline{n}|} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2}} =$$

$$= \frac{o(\rho)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta u^2}} =$$



Выберем произвольную точку поверхности $N(x, y, u)$, пусть $M(x, y)$ — проекция точки N на плоскость xOy. Через ρ обозначим расстояние между точками M_0 и M, то есть $\rho = \rho(M_0, M)$. Тогда в силу дифференцируемости $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Определение 1.26. *Касательной плоскостью к поверхности* $u = f(x, y)$ *в точке* N_0 *назовем плоскость, проходящую через эту точку и такую, что угол между этой плоскостью и секущей* N_0N, *где* N — *произвольная точка поверхности, стремится к нулю, когда точка* N *стремится к точке* N_0.

Покажем, что из условия дифференцируемости функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 следует существование касательной плоскости к поверхности $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Рассмотрим плоскость $u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ и покажем, что это и есть касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$. Для этого нужно показать, что а) она проходит через точку N_0; б) угол между секущей N_0N и нормалью $\overline{n}$ к этой плоскости в точке N_0 стремится к $\pi/2$ (все равно, что угол γ между секущей N_0N и касательной плоскостью стремится к 0).

Утверждение а) очевидно. Докажем б). Обозначим через φ угол между $\overline{n}$ и $\overline{N_0N}$ и вычислим $\cos\varphi$:

$$\overline{N_0N} = \{x - x_0, y - y_0, u - u_0\}; \quad \overline{n} = \{A; B; -1\} \quad \text{(из уравнения плоскости)},$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_0N} \cdot \overline{n}}{|\overline{N_0N}| \cdot |\overline{n}|} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2}} =$$

$$= \frac{o(\rho)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta u^2}} =$$

$$= \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+1} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\rho}\right)^2}} \to 0$$

при $\rho \to 0$ (в силу ограниченности $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+1}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\rho}\right)^2}} \leqslant 1$). Значит, $\varphi \to \pi/2$ при $N \to N_0$.

Таким образом, $u-u_0 = A(x-x_0)+B(y-y_0)$ есть касательная плоскость или

$$u - u_0 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0). \tag{1.14}$$

Вектор нормали $\overline{n}$ имеет тогда координаты

$$\overline{n} = \left\{ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0};\ -1 \right\}.$$

§ 1.6. Производная сложной функции

Теорема 1.11. *Пусть функция* $u = f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0,y_0)$, *а функции* $x = \varphi(t,v)$, $y = \psi(t,v)$ *дифференцируемы в точке* $N_0(t_0,v_0)$, *причем* $x_0 = \varphi(t_0,v_0)$, $y_0 = \psi(t_0,v_0)$. *Тогда сложная функция* $u = f(\varphi(t,v),\psi(t,v))$ *является дифференцируемой в точке* N_0, *причем частные производные сложной функции вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{N_0} &= f'_x(M_0)\cdot\varphi'_t(N_0) + f'_y(M_0)\cdot\psi'_t(N_0), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{N_0} &= f'_x(M_0)\cdot\varphi'_v(N_0) + f'_y(M_0)\cdot\psi'_v(N_0), \end{aligned} \tag{1.15}$$

Доказательство. Из условия дифференцируемости функций f, φ, ψ в соответствующих точках M_0, N_0 вытекает:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y, \\ \Delta x &= \varphi'_t(N_0)\Delta t + \varphi'_v(N_0)\Delta v + o(\rho), \\ \Delta y &= \psi'_t(N_0)\Delta t + \psi'_v(N_0)\Delta v + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta t)^2+(\Delta v)^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f'_x(M_0)[\varphi'_t(N_0)\Delta t + \varphi'_v(N_0)\Delta v + o(\rho)] + \\
&\quad + f'_y(M_0)[\psi'_t(N_0)\Delta t + \psi'_v(N_0)\Delta v + o(\rho)] + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = \\
&= [f'_x(M_0)\varphi'_t(N_0) + f'_y(M_0)\psi'_t(N_0)]\Delta t + \\
&\quad + [f'_x(M_0)\varphi'_v(N_0) + f'_y(M_0)\psi'_v(N_0)]\Delta v + \gamma,
\end{aligned}$$

где $\gamma = f'_x(M_0)\cdot o(\rho) + f'_y(M_0)\cdot o(\rho) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Покажем, что $\gamma = o(\rho)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{\gamma}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\left[f'_x(M_0)\underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\to 0} + f'_y(M_0)\underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\to 0} + \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\right] = \\
&= \lim_{\rho\to 0}\left[\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right] = 0,
\end{aligned}$$

т. к. $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$; $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$.

Таким образом, мы получили выражение

$$\Delta u = A\Delta t + B\Delta v + o(\rho),$$

где

$$A = f'_x(M_0)\varphi'_t(N_0) + f'_y(M_0)\psi'_t(N_0) = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{N_0},$$

$$B = f'_x(M_0)\varphi'_v(N_0) + f'_y(M_0)\psi'_v(N_0) = \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{N_0}.$$

Следовательно, теорема доказана. □

Следствие. *Если* $u = f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0,y_0)$ $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ *дифференцируемы в точке* t_0, *причем* $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, *то сложная функция* $u = f(\varphi(t),\psi(t))$ *является дифференцируемой в точке* t_0 *и справедлива формула*

$$\frac{du}{dt}\bigg|_{t_0} = f'_x(M_0)\cdot\varphi'(t_0) + f'_y(M_0)\cdot\psi'(t_0). \tag{1.16}$$

А теперь рассмотрим без доказательства общий случай.

Теорема 1.12. *Пусть функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, *а функции* $x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ *дифференцируемы в точке* $N_0(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$, *причем* $x_k^0 = \varphi_k(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, $k = 1, \ldots, m$. *Тогда сложная функция*

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_n))$$

дифференцируема в точке N_0 *и ее частные производные в этой точке находятся по формулам:*

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1} \\
\dfrac{\partial u}{\partial t_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial t_2} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\dfrac{\partial u}{\partial t_n} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_n} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial x_m}{\partial t_n},
\end{array} \tag{1.17}$$

где все производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ $k = 1, \ldots, m$ *вычислены в точке* M_0, *а производные* $\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}, \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2}, \ldots, \dfrac{\partial x_m}{\partial t_2}, \ldots, \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n}, \ldots \dfrac{\partial x_m}{\partial t_n}$ *вычислены в точке* N_0.

Пример 1.8. $u = f(x, y)$, $x = t \sin v$, $y = v \cos t$. Найти частные производные функции первого порядка.

Решение. Очевидно, что $u = f(x(t, v), y(t, v))$ — сложная функция переменных t и v и условия теоремы 1.11 выполнены. Тогда согласно (1.15)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (t \sin v)'_t + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (v \cos t)'_t = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sin v - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v \sin t, \\
\frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (t \sin v)'_v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (v \cos t)'_v = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot t \cos v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos t.
\end{aligned}$$

§ 1.7. Дифференциал функции многих переменных. Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дифференцируемую в некоторой точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Тогда в силу (1.11)

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho),$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$$

очевидно, что $A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m$ есть главная, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ часть Δu.

Определение 1.27. *Дифференциалом du дифференцируемой функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M_0 называется главная часть полного приращения функции в этой точке, линейная относительно приращения аргументов $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$:*

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m$$

или учитывая (1.13)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m.$$

Если x_k, $k = 1, \ldots, n$ независимые переменные, то, как и в случае функции одного переменного, $dx_k = \Delta x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m. \tag{1.18}$$

Если $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0} = 0 \ \forall\, k$, то в этом случае $du = 0$.

Выясним, как изменится (1.18), если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в свою очередь зависят от каких-то новых переменных. Предположим, что $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $\ldots$, $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Тогда $u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_n))$ является сложной функцией независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и, значит можно воспользоваться равенством (1.18) и записать

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_n} dt_n.$$

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}, \dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial t_n}$ найдем, используя равенства (1.17). Тогда du примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right)dt_1+\\
&\quad+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\right)dt_2+\ldots+\\
&\quad+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_n}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_n}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_n}\right)dt_n=\\
&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_1}{\partial t_n}dt_n\right)+\\
&\quad+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_2}{\partial t_n}dt_n\right)+\ldots+\\
&\quad+\frac{\partial u}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_m}{\partial t_n}dt_n\right)=\\
&=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m.
\end{aligned}$$

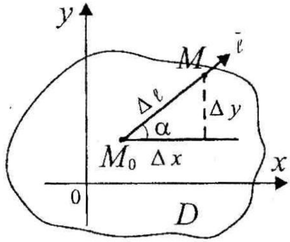
Итак, в случае, когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — зависимые переменные, форма дифференциала не изменилась, то есть имеет место свойство инвариантности формы дифференциала. Однако, как и в случае функции одного переменного, сохранилась только форма, смысл стал другим, а именно, если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, то $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ — числа, равные соответственно приращениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$; если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — функции новых аргументов, то $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ — также функции тех же аргументов, что и $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$dx_k=\frac{\partial x_k}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_k}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_k}{\partial t_n}dt_n,\quad k=1,2,\ldots,m.$$

§ 1.8. Производная по направлению

Пусть задана функция двух переменных $z=f(x,y)$, определенная в некоторой области D. Пусть $M_0(x_0,y_0)\in D$. Рассмотрим некоторое направление, определяемое единичным вектором $\bar{\ell}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$, исходящим из точки M_0. Направление $\bar{\ell}$ образует угол α с положительным направлением оси Ox и угол β — с положительным направлением оси Oy.

Рассмотрим на направлении $\bar{\ell}$ переменную точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Обозначим через $\Delta\ell = \rho(M_0, M) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.



Введем следующее определение:

Определение 1.28. *Производной функции $u = f(M)$ в точке M_0 по направлению $\bar{\ell}$ называется*

$$\lim_{\rho(M,M_0)\to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)} = \frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}. \tag{1.19}$$

Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$ показывает скорость изменения функции в направлении $\bar{\ell}$.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$. Предположим, что функция $f(x, y)$ дифференцируема в области D и в частности в точке M_0. Тогда полное приращение функции

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

причем $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, а производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ вычислены в точке M_0.

Тогда

$$\frac{\Delta u}{\Delta \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \beta(\Delta x, \delta y)\frac{\Delta x}{\Delta \ell}. \tag{1.20}$$

Очевидно $\dfrac{\Delta x}{\Delta \ell} = \cos\alpha$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta \ell} = \sin\alpha \Longrightarrow \left|\dfrac{\Delta x}{\Delta \ell}\right| \leqslant 1$; $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta \ell}\right| \leqslant 1$.

Поэтому правая часть равенства (1.20) имеет предел при $\Delta\ell \to 0$, равный $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$, так как $\alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta \ell} + \beta\dfrac{\Delta y}{\Delta \ell} \to 0$ при $\Delta\ell \to 0$, т. е. при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Следовательно, левая часть равенства (1.20) тоже имеет предел при $\Delta\ell \to 0$, который по определению и есть производная функции $u = f(x, y)$ по направлению $\bar{\ell}$. Поэтому имеет место следующая формула для вычисления производной $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha, \tag{1.21}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ вычисляются в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если ввести в рассмотрение угол $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, то равенство (1.21) можно записать так

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \tag{1.22}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Отметим, что частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. Действительно, пусть направление $\bar{\ell}$ совпадает с направлением оси Ox. Тогда $\angle\alpha = 0°$, $\angle\beta = 90° \Longrightarrow$ из (1.22) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично, если $\angle\alpha = 90°$, $\angle\beta = 0°$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Наконец, если $u = f(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{\ell} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β, γ — углы, образованные направлением $\bar{\ell}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно, то

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{1.23}$$

§ 1.9. Градиент

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области D, $M_0(x_0, y_0) \in D$ — произвольная точка области.

Определение 1.29. *Градиентом функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 называется вектор*

$$\overline{\operatorname{grad}}\, u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \bar{\jmath} \tag{1.24}$$

или

$$\overline{\operatorname{grad}}\, u\Big|_{M_0} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \right\}.$$

ления производной $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha, \tag{1.21}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ вычисляются в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если ввести в рассмотрение угол $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, то равенство (1.21) можно записать так

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \tag{1.22}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Отметим, что частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. Действительно, пусть направление $\bar{\ell}$ совпадает с направлением оси Ox. Тогда $\angle\alpha = 0°$, $\angle\beta = 90° \Longrightarrow$ из (1.22) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично, если $\angle\alpha = 90°$, $\angle\beta = 0°$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Наконец, если $u = f(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{\ell} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β, γ — углы, образованные направлением $\bar{\ell}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно, то

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{1.23}$$

§ 1.9. Градиент

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области D, $M_0(x_0, y_0) \in D$ — произвольная точка области.

Определение 1.29. *Градиентом функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 называется вектор*

$$\overline{\operatorname{grad}}\, u\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \bar{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \bar{\jmath} \tag{1.24}$$

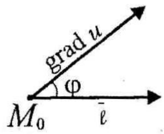
или

$$\overline{\operatorname{grad}}\, u\Big|_{M_0} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \right\}.$$

Учитывая (1.24), производную по направлению (1.22) можно записать так

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}\right|_{M_0} = \bar{\ell} \cdot \overline{\operatorname{grad} u}\Big|_{M_0}.$$

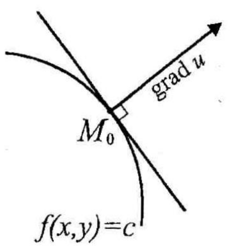
Покажем, что *градиент функции* $u = f(x, y)$ *в точке* M_0 *характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке* M_0. Действительно,



$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}\right|_{M_0} = |\bar{\ell}| \cdot |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi.$$

Наибольшее значение $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}\right|_{\max}\right)$ будет по тому направлению, для которого $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$, следовательно, когда направление $\bar{\ell}$ совпадает с направлением вектора $\overline{\operatorname{grad} u}$. Величина этого максимального изменения функции равна $|\operatorname{grad} u|$.

Остановимся еще на одном свойстве $\operatorname{grad} u$. Рассмотрим множество точек (x, y), для которых $f(x, y) = C$, C — некоторая постоянная. На плоскости это уравнение задает некоторую кривую, которую мы будем называть линией уровня. Придавая постоянной C различные значения, мы будем получать различные линии уровня. Рассмотрим ту линию уровня, которая проходит через точку M_0. Покажем, что *вектор* $\operatorname{grad} u\big|_{M_0}$ *ортогонален линии уровня, проходящей через точку* M_0, то есть ортогонален касательной, проведенной к линии уровня в точке M_0.



Пусть k_1 — угловой коэффициент касательной к линии уровня в точке M_0, а k_2 — угловой коэффициент вектора $\operatorname{grad} u$. Нужно показать, что $k_1 \cdot k_2 = -1$:

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \quad \Longrightarrow \quad k_2 = \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x}$$

$f(x, y) = c \Longrightarrow u(x, y) = c \Longrightarrow$ дифференцируем как неявную функцию

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial x}.$$

Значит, $k_1 \cdot k_2 = -1$, что и требовалось доказать.

Все сказанное выше распространяется на случай функции многих переменных $u = f(x_1, \ldots, x_m)$, $\bar{\ell} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m\}$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \cos\alpha_k, \quad \operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right\},$$

$u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c$ — поверхность уровня.

§ 1.10. Однородные функции Теорема Эйлера

Определение 1.30. *Функция $u = f(M)$ называется однородной степени p на множестве D, если для любой точки этого множества и любого t, такого, что $(tx_1, \ldots, tx_m) \in D$, выполняется равенство*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Примеры. 1) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ — однородная второй степени, так как

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + 2(ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy) = t^2 \cdot f(x, y).$$

2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ — однородная нулевой степени, так как

$$f(tx, ty) = \frac{tx \cdot ty}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t^2xy}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = t^0 \cdot f(x, y).$$

Теорема 1.13. *Пусть функция $u = f(M)$ дифференцируемая и однородная степени p на некотором множестве D. Тогда в любой точке этого множества имеет место равенство*

$$x_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x_m} = p \cdot u. \tag{1.25}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ и докажем справедливость (1.25) в этой точке. Рассмотрим сложную функцию $u = f(x_1, \ldots, x_m)$, где

$$x_1 = tx_1^0, \quad x_2 = tx_2^0, \quad \ldots, \quad x_m = tx_m^0. \tag{1.26}$$

Очевидно, что все функции (1.26) дифференцируемы по t в точке $t = 1$. Исходная функция дифференцируема в точке M_0, которая получается из функции (1.26) при $t = 1$. Следовательно, можно использовать теорему о производной сложной функции

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} \cdot \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=1} + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0} \cdot \left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=1} + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{M_0} \cdot \left.\frac{dx_m}{dt}\right|_{t=1}$$

или

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} \cdot x_1^0 + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0} \cdot x_2^0 + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{M_0} \cdot x_m^0. \qquad (1.27)$$

Воспользуемся теперь однородностью функции $u = f(M)$:

$$f(tx_1^0, tx_2^0, \ldots, tx_m^0) = t^p \cdot f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0).$$

Отсюда

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} = \left.pt^{p-1}\right|_{t=1} \cdot f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = pu\big|_{M_0}. \qquad (1.28)$$

Поскольку левые части равенств (1.27), (1.28) равны, то равны и правые части, то есть

$$x_1^0 \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} + x_2^0 \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0} + \ldots + x_m^0 \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{M_0} = pu\big|_{M_0}$$

что и доказывает теорему в силу произвольности точки M_0. □

§ 1.11. Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенную в области D m-мерного пространства. Пусть в каждой точке области D функция имеет частные производные первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Эти частные производные в свою очередь являются функциями тех же самых переменных $x_1, \ldots, x_m$. И может случиться, что каждая из них имеет частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_m$. Тогда эти частные производные будем называть производными второго порядка функции $u(x_1, \ldots, x_m)$ и обозначать $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$. Если $k = i$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — вторая производная по переменной x_i; если $k \neq i$, то эту производную называют смешанной. В частности, для функции двух переменных $u = f(x, y)$ можно записывать следующие частные производные второго порядка

$$u''_{x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad u''_{y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Частные производные 2-го порядка тоже являются функциями переменных $x_1, \ldots, x_m$ и могут, в свою очередь, иметь частные производные по этим переменным, которые мы назовем частными производными третьего порядка функции $u(x_1, \ldots, x_m)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad \text{и так далее.}$$

Заметим, что смешанные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ или $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z}$, вообще говоря, зависят от порядка дифференцирования.

Пример 1.9. Покажем, что $\dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x \partial y}$ для функции

$$u(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Действительно, если $x^2 + y^2 \neq 0$, то

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Теперь

$$\frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, \Delta y) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^5} = -1.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - y^4 - 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}(\Delta x, 0) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^5} = 1.$$

Итак, $\dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial y \partial x}$.

Однако, имеет место

Теорема 1.14 (достаточные условия равенства смешанных производных). *Если функция* $u = f(x,y)$ *в окрестности точки* M_0 *имеет частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, *причем* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *непрерывны в точке* M_0, *то*

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x}.$$

Доказательство. Зададим Δx, Δy — любые столь малые числа, что точка $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ находится в указанной в теореме окрестности точки M_0.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$$

и вычислим приращение этой функции по переменной x

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)\right] - \\ - \left[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right] \overset{\text{обоз}}{=} A.$$

Преобразуем выражение A, используя теорему Лагранжа

$$A = \Delta\varphi = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x = \\ = \left[f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\right]\Delta x,$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[y_0, y_0 + \Delta y]$ функции $f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y)$ одной переменной y. Применяя еще раз теорему Лагранжа (по переменной y), получаем

$$A = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \tag{1.29}$$

С другой стороны, если ввести вспомогательную функцию

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

то поступая аналогично, получим

$$A = \Delta\psi = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0),$$

а затем

$$A = f''_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x, \quad 0 < \theta_3, \theta_4 < 1. \qquad (1.30)$$

Сравнивая (1.29) и (1.30), получаем

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и учитывая непрерывность частных производных $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ в точке M_0, получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)$$

или $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Теорема доказана. □

§ 1.12. Дифференциалы высших порядков

Ранее для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ мы определили дифференциал первого порядка равенством

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m.$$

Причем это равенство справедливо, как было показано, и для случая, когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, и когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — функции новых аргументов. Если du — снова дифференцируемая функция, то можно говорить о ее дифференциале $d(du)$. Этот дифференциал будем считать дифференциалом второго порядка от исходной функции:

$$d^2u = d(du).$$

Аналогично $d^3u = d(d^2u)$, …, $d^nu = d(d^{n-1}u)$.

Пусть $u = f(x, y)$, x, y — независимые переменные, тогда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — числа и

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) = \\ &= dx\,d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + dy\,d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = dx\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dy\right) + \\ &+ dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2 \end{aligned}$$

(мы считаем, что условия теоремы 1.14 выполнены). Следовательно,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Для сокращения записи второго и последующих дифференциалов вводится символ

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy$$

и определим операцию возведения этого символа в степень n как обычную операцию возведения двучлена $\dfrac{\partial}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial}{\partial y}\,dy$ в степень n. Например,

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,dy^2, \\ d^3 &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\,dy^3. \end{aligned}$$

С помощью этого символа записываются дифференциалы любого порядка

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n u$$

или

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_3}\,dx_3 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\,dx_m\right)^n u.$$

Рассмотрим вопрос о нарушении формы дифференциалов высших порядков. Пусть x, y — функции новых аргументов. Воспользуемся свойством инвариантности формы дифференциала 1-го порядка

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Заметим, что dx, dy есть функции тех же аргументов, от которых зависят x и y. Найдем d^2u:

$$\begin{aligned}
d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) = \\
&= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,d(dx) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,dy + \frac{\partial u}{\partial y}\,d(dy) = \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dy\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,d^2x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\right)dy + \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial y}\,d^2y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2 + \underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d^2y}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, слагаемые, подчеркнутые двумя прямыми чертами, нарушают форму дифференциала второго порядка.

§ 1.13. Формула Тейлора для функции многих переменных

Для функции одного переменного $f(x)$, имеющей производные до $(n+1)$ порядка в окрестности точки x_0, справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\
&\quad + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.
\end{aligned}$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, если x — независимая переменная, то $dx = \Delta x$; $f(x) - f(x_0) = \Delta f$. Тогда

$$\begin{aligned}
&f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,dx = df\big|_{x_0} \\
&f''(x_0)(x - x_0)^2 = f''(x_0)(\Delta x)^2 = f''(x_0)\,dx^2 = d^2 f\big|_{x_0} \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
&f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n = f^{(n)}(x_0)\,dx^n = d^n f\big|_{x_0} \\
&f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)(x - x_0)^{n+1} = f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)\,dx^n = d^{n+1} f\big|_{x_0 + \theta\Delta x}.
\end{aligned}$$

Перепишем формулу Тейлора для функции одного переменного в таком виде

$$\Delta f = df\big|_{x_0} + \frac{1}{2!}d^2 f\big|_{x_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f\big|_{x_0} + \frac{1}{(n+1)!}dx^{n+1} f\big|_{x_0+\theta\Delta x}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для функции многих переменных.

Теорема 1.15. *Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеет все дифференциалы до порядка $(n+1)$ включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, тогда справедлива формула Тейлора*

$$\Delta u = df\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2 f\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}dx^{n+1} f\Big|_{N}, \qquad (1.31)$$

где $\Delta u = f(M) - f(M_0)$; M, N – точки из окрестности точки M_0, в которой выполняются условия теоремы (без доказательства).

§ 1.14. Экстремум функции многих переменных

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенную на некотором множестве D и пусть точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in D$.

Определение 1.31. *Точка M_0 (называется точкой локального максимума (минимума) функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$, если найдется такая окрестность этой точки, в пределах которой будет выполняться неравенство*

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)).$$

Точки максимума и минимума называются точками экстремума. Итак, если $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, то

$\Delta u < 0$ в случае локального максимума.

$\Delta u > 0$ в случае локального минимума.

Теорема 1.16 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум и в этой точке существуют частные производные первого порядка по всем переменным. Тогда*

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}\bigg|_{M_0} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Зафиксируем все переменные, кроме k-ой:

$$u = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0).$$

Эта функция есть функция одного переменного x_k, дифференцируемая по этой переменной и имеющая экстремум в точке x_k^0. Тогда в силу необходимого условия экстремума для функции одного переменного имеет место равенства $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{x_k^0} = 0$ или $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0} = 0$. В силу произвольности выбора переменного x_k, мы получим $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, что и требовалось доказать. □

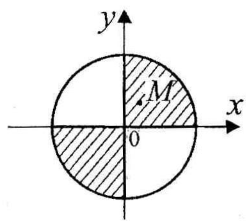
Замечание 1. *Если функция дифференцируема в точке M_0, то, очевидно, необходимое условие экстремума можно записать так:*

$$du\big|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} dx_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0} dx_2 + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{M_0} dx_m = 0.$$

Замечание 2. *Как и в случае функции одного переменного, доказанное выше условие не является достаточным условием экстремума, например,*

$$u = xy, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x = 0 \end{cases} \Longrightarrow M_0(0, 0).$$

Однако экстремума в этой точке нет. Рассмотрим любую окрестность точки $M_0(0,0)$. Для точек M этой окрестности, лежащих в I и III четвертях имеем $\Delta u = xy - 0 \cdot 0 = xy > 0$. Для точек M, лежащих во II и IV четвертях, имеем $\Delta u = xy - 0 \cdot 0 = xy < 0$, то есть не выполняется определение точек экстремума.



Сформулируем достаточное условие экстремума для функции двух переменных $u = f(x, y)$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — критическая точка функции $u = f(x, y)$, то есть $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 0 \Longrightarrow du\big|_{M_0} = 0.$

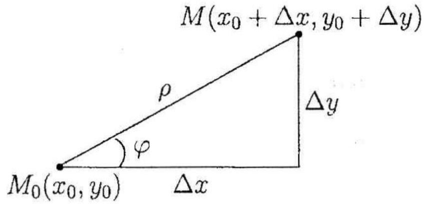
Обозначим $a_{11} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0}$; $a_{12} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$; $a_{22} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Теорема 1.17. *Пусть все частные производные второго порядка функции $u = f(x, y)$ существуют в окрестности точки M_0 и непрерывны в самой точке M_0, где M_0 — критическая точка. Тогда*

1. *если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет экстремум, причем, если $a_{11} > 0$, то минимум, а если $a_{11} < 0$, то максимум;*
2. *если $\Delta < 0$, то в точке M_0 у функции $u = f(x, y)$ экстремума нет;*
3. *если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым и нуждается в дополнительных исследованиях.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$. Зададим приращения Δx, Δy такие, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не вышла за пределы окрестности точки M_0, ращения Δx, Δy такие, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не вышла за пределы окрестности точки M_0, фигурирующей в теореме.



Воспользуемся формулой Тейлора ($n = 1$):

$$\Delta u = du\big|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 u\big|_N,$$

где N — какая-то точка из окрестности точки M_0. Так как M_0 — критическая точка функции $u = f(x, y)$, то $du\big|_{M_0} = 0$, поэтому

$$\Delta u = \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_N \Delta x^2 + 2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_N \Delta x \Delta y + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_N \Delta y^2\right].$$

Воспользуемся непрерывностью частных производных второго порядка в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_N = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} + \alpha_{11} = a_{11} + \alpha_{11},$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_N = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} + \alpha_{12} = a_{12} + \alpha_{12},$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_N = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} + \alpha_{22} = a_{22} + \alpha_{22},$$

где α_{11}, α_{12}, α_{22} — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Подставляя эти представления в Δu, получим

$$\Delta u = \frac{1}{2!}\left[a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2 + \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right].$$

Выразим Δx, Δy через расстояние между точками M_0 и M ρ и угол φ: $\Delta x = \rho\cos\varphi$; $\Delta y = \rho\sin\varphi$ и подставим в Δu:

$$\begin{aligned}\Delta u \; = \; & \frac{\rho^2}{2}\left[(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\cdot\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) + \right.\\ & \left. + (\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\cdot\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi)\right].\end{aligned}$$

Первые три слагаемых обозначим A, а оставшиеся обозначим B. Рассмотрим случаи

1) $\Delta > 0$, то есть $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Longrightarrow a_{11} \neq 0$.

Преобразуем выражение A

$$A = \frac{1}{a_{11}}\left[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi\right]. \tag{1.32}$$

Очевидно, что выражение, стоящее в квадратных скобках, всегда имеет знак «+» и значит, знак выражения A совпадает со знаком a_{11}. Отметим, что слагаемое B, будучи малой величиной, существенного влияния на знак Δu не окажет. Поэтому, если $a_{11} > 0$, то $A > 0$, значит, $\Delta u > 0$ и, значит, в точке M_0 — минимум. Если $a_{11} < 0$, то $A < 0$, значит, $\Delta u < 0$ и, значит, в точке M_0 — максимум.

2) $\Delta < 0$. Покажем, что в этом случае в точке M_0 экстремума нет. Заметим, что в этом случае может $a_{11} = 0$. Но мы сначала рассмотрим частный случай, когда $a_{11} \neq 0$, тогда для A сохранится прежняя форма

(1.32). Рассмотрим луч $\varphi = 0$, тогда $A = a_{11}$. Знак A, и, следовательно, знак Δu совпадает для любой точки M, лежащей на луче $\varphi = 0$, со знаком числа a_{11}. Выберем другой луч так, чтобы $a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi = 0$. На этом луче знак A, а, следовательно, знак Δu противоположны знаку a_{11}. Таким образом, в этом частном случае в точке M_0 экстремума нет.

Пусть теперь $a_{11} = 0$. Покажем, что в точке M_0 по-прежнему нет экстремума

$$\Delta = -a_{12}^2 \quad \Longrightarrow \quad a_{12} \neq 0.$$

Тогда

$$A = 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \sin\varphi[2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi].$$

Выберем угол φ достаточно малым так, чтобы знак суммы, стоящей в квадратных скобках, определялся первым слагаемым. Тогда для двух лучей φ и $(-\varphi)$ выражение в квадратных скобках сохранит знак, а выражение A и вместе с ним полное приращение функции Δu будут иметь разные знаки на этих лучах за счет множителя $\sin\varphi$. Значит, в точке M_0 экстремума нет. Теорема доказана. □

Пример 1.10. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. Найдем критические точки функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow M_0(0,0); \quad M_1(1,1).$$

Проверим достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3.$$

Рассмотрим точку $M_0(0,0)$: $a_{11} = 0$; $a_{22} = 0$; $a_{12} = -3 \quad \Longrightarrow$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9 < 0$$

— нет экстремума.

Рассмотрим точку $M_1(1,1)$: $a_{11} = 6$; $a_{22} = 6$; $a_{12} = -3 \implies$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

— есть экстремум и так как $a_{11} = 6 > 0$, то минимум $u_{\min} = u(1,1) = -1$.

§ 1.15. Наибольшее (наименьшее) значение функции многих переменных

Рассмотрим функцию $u = f(x,y)$. Предположим, что она непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ с границей $F(x,y) = 0$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса она достигает в этой области своих точных границ. Точки, в которых достигаются эти наибольшие и наименьшие значения, могут быть внутренними точками области, и тогда они попадут в число точек подозрительных на экстремум; могут быть граничными точками, то есть принадлежать границе области $\overline{D}$; в этом случае переменные x, y связаны соотношением $F(x,y) = 0$. Тогда мы приходим к задаче исследовать на экстремум функцию $u = f(x,y)$, когда переменные x, y связаны соотношением $F(x,y) = 0$. В самом простом случае из этого соотношения мы находим, например, $y = \varphi(x)$ и тогда $u = f[x;\varphi(x)]$ является функцией одного независимого переменного, а эту функцию одного переменного мы уже исследуем на наибольшее (наименьшее) значение.

Пример 1.11. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

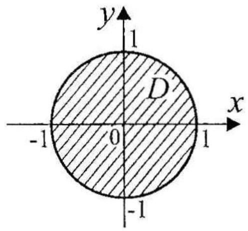
$$u = x^2 + 5x + y^2 - 1$$

в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Решение. Найдем точки подозрительные на экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \implies M_0\left(-\frac{5}{2};0\right) \notin D.$$

Исследуем на границе области D: $y^2 = 1 - x^2$. Тогда $u = x^2 + 5x + 1 - x^2 - 1$ или $u = 5x$, $x \in [-1,1]$.



$u' = 5 \neq 0 \Longrightarrow$ внутри $[-1, 1]$ нет наибольших (наименьших) значений, значит они могут быть только на концах отрезка, то есть в точках $M_1(-1, 0)$, $M_2(1, 0)$. Вычисляя $u(M_1) = -5$; $u(M_2) = 5$, получаем наименьшее и наибольшее значение функции в области $\overline{D}$.

Глава 2. Дифференциальные уравнения

§ 2.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

п. 1. Основные понятия и определения.

Определение 2.1. *Дифференциальным уравнение первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную.*

Так как производную можно представить в виде отношения дифференциалов, то уравнение может содержать не производную, а дифференциалы неизвестной функции и независимой переменной.

Определение 2.2. *Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (дифференциала), входящего в это уравнение.*

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

В частных случаях в левую часть уравнения могут не входить x или y, но всегда обязательно входит y'. Нам придется в основном иметь дело с уравнениями, разрешенными относительно производной, т. е. вида

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

Определение 2.3. *Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение превращает его в тождество.*

Простейшие примеры показывают, что дифференциальное уравнение может иметь бесчисленное множество решений. Простой проверкой легко убедиться, что уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$ имеет решениями функции $y = Cx$, а уравнение $y = -\dfrac{y}{x}$ — функции $y = \dfrac{C}{x}$, где C — любое число.

Уравнение $y' = \dfrac{y+x}{x}$ имеет решениями функции $y = x\ln x + Cx$.

В самом деле, найдя производную $y' = \ln x + 1 + C$ и подставив ее в уравнение, получим тождество

$$\ln x + 1 + C = \frac{x \ln x + Cx + x}{x}.$$

Как мы видим, в решения приведенных дифференциальных уравнений входит произвольная постоянная C; придавая ей различные значения, мы будем получать разные решения.

Итак, любое дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений, которые определяются формулой, содержащей одну произвольную постоянную. Эту совокупность решений будем называть общим решением дифференциального уравнения первого порядка и записывать так:

$$y = \varphi(x, C). \tag{2.3}$$

Придавая произвольной постоянной C определенные числовые значения, мы будем получать *частные решения*.

Определение 2.4. *Равенство*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.4}$$

неявно задающее решение дифференциального уравнения называется общим интегралом.

Интеграл, полученный из общего при конкретном значении произвольной постоянной C, называется частным интегралом.

В дальнейшем при решении конкретных задач нас будут интересовать преимущественно частные решения. Необходимо выяснить, каким же образом из общего решения можно выделить требуемое решение. Зададим для этого начальное условие. *Задать начальное условие дифференциального уравнения первого порядка это значит указать пару соответствующих друг другу значений независимой переменной (x_0) и функции (y_0). Записывают это так:*

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0. \tag{2.5}$$

Покажем на примере, как по общему решению и заданному начальному условию можно отыскивать соответствующее этому условию частное решение.

Выше мы видели, что уравнение $y' = y/x$ имеет общее решение $y = Cx$. Зададим начальное условие $y\big|_{x=2} = 6$. Подставив эти значения x и y в общее решение, получим $6 = 2C$, откуда $C = 3$. Следовательно, функция $y = 3x$ удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и начальному условию.

Вопрос о том, в каком случае можно утверждать, что частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, существует, а также что оно будет единственным, выясняется теоремой, которую мы приведем без доказательства.

Теорема существования и единственности решения. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области, содержащей точку $P_0(x_0, y_0)$, то уравнение $y' = f(x, y)$ имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$.*

Если, кроме того, непрерывна и частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то это решение уравнения единственно.

Интересно отметить, что в условии теоремы не требуется существования производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Теорема эта впервые была сформулирована и доказана Коши. Поэтому часто задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют *задачей Коши*.

Перейдем теперь к геометрической иллюстрации введенных понятий.

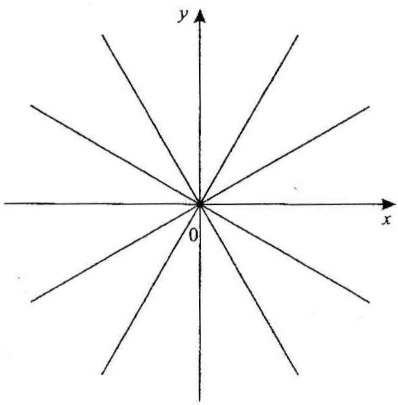


Рис. 1

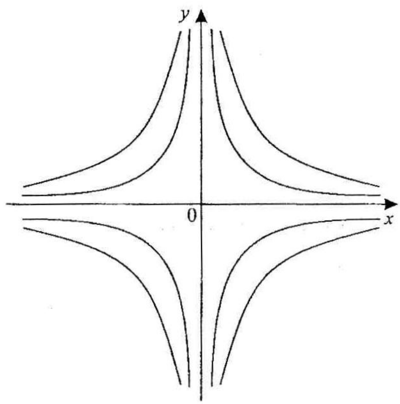


Рис. 2

График любого частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*. Общему решению соответствует *семейство интегральных кривых*. Так как мы уже проверили, что уравнение $y' = y/x$ имеет общее решение $y = Cx$, то соответствующее ему семейство интегральных кривых — пучок прямых, проходящим через начало координат (рис. 1). Уравнение $y' = -y/x$ имеет общее решение $y = C/x$. Ему соответствует семейство равнобочных гипербол, асимптотами которых являются оси координат (рис. 2), а также прямая $y = 0$.

Задание начального условия $y\big|_{x=x_0} = y_0$ означает задание точки $P_0(x_0, y_0)$, через которую должны проходить интегральная кривая, соответствующая искомому частному решению. Таким образом, отыскание частного решения по начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$ геометрически означает, что из семейства интегральных кривых мы выбираем ту, которая проходит через точку $P_0(x_0, y_0)$. Согласно теореме существования и единственности решения через каждую точку, в которой функции $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, проходит одна единственная интегральная кривая. Если в данной точке эти условия нарушены, то это означает, что через эту точку либо вообще не проходит ни одна интегральная кривая, либо проходит несколько.

Точки, в которых условия теоремы существования и единственности решения нарушаются, называются *особыми точками*.

Теперь мы можем указать основное свойство общего решения:

Общее решение $y = \varphi(x, C)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ обладает тем свойством, что из него по любому заданному возможному начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$ может быть найдено частное решение, удовлетворяющее этому условию.

Это означает, что, подставляя в общее решение значения x_0 и y_0, мы получаем уравнение относительно C: $y_0 = \varphi(x_0, C)$, из которого всегда может быть найдено одно-единственное значение $C = C_0$. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ и будет искомым частным решением.

Отметим еще, что отыскание решения дифференциального уравнения часто называют *интегрированием уравнения*. При этом действие интегрирования функций называют *квадратурой*.

Перейдем теперь к приемам решения отдельных типов дифференциальных уравнений.

п. 2. Уравнения с разделяющимися переменными. Рассмотрим уравнение вида

$$f_1(y)\,dy = f_2(x)\,dx, \tag{2.6}$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — заданные функции. В этом дифференциальном уравнении *переменные разделены*, т. е. каждая из переменных содержится только в той части уравнения, где находится ее дифференциал. Уравнение $dy = f(x)\,dx$ является частным случаем рассматриваемого уравнения.

Произведя интегрирование, мы получим связь между переменными x и y, освобожденную от их дифференциалов:

$$\int f_1(y)\,dy = \int f_2(x)\,dx + C.$$

Напомним, что под символов $\int$ мы в этой главе условились понимать какую-то одну первообразную. Ясно также, что произвольную постоянную C можно писать в любой части равенства.

Если задано начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$, то, определяя постоянную C, получим частное решение, удовлетворяющее данному условию. Воспользовавшись определенными интегралами, можно сразу записать искомое частное решение:

$$\int\limits_{y_0}^{y} f_1(y)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx.$$

Очень часто встречаются уравнения, в которых переменные еще не разделены, но их можно разделить, производя простые арифметические операции.

Определение 2.5. *Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.*

Таким будет, например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)}.$$

В нем переменные еще не разделены, однако, умножив обе его части на $f_1(y)\,dx$, мы приходим к уравнению с разделенными переменными.

Легко также разделить переменные, если уравнение записано в дифференциальной форме и имеет вид

$$f_1(x)f_2(y)\,dx + f_3(x)f_4(y)\,dy = 0. \tag{2.7}$$

Деля обе части уравнения на произведение $f_2(y)f_3(x)$, получим

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}\,dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}\,dy = 0.$$

Нам теперь даже не обязательно переносить одно из слагаемых в правую часть. Интегрируя, запишем

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}\,dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}\,dy = C.$$

Следует заметить, что при делении на $f_2(y)f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений.

Пример 2.1. Найдем общее решение уравнения

$$x(y+1)\,dx - (x^2+1)y\,dy = 0.$$

Разделяя переменные, приведем его к виду

$$\frac{x\,dx}{x^2+1} - \frac{y\,dy}{y+1} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = C,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - y + \ln|y+1| = C.$$

Итак, мы нашли общее решение, причем y является неявной функцией от x. Заменяя C на $\ln|C|$, мы можем представить решение в таком виде:

$$\frac{Ce^y}{y+1} = \sqrt{x^2+1}.$$

Кроме этого, есть еще частное решение $y = -1$, графиком которого является горизонтальная прямая $y = -1$. При $C > 0$ любая интегральная кривая лежит выше прямой $y = -1$, а при $C < 0$ — ниже этой прямой (предоставляем читателю это проверить).

Если дано уравнение, в котором переменные не разделяются, то можно попытаться с помощью замены переменных свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

Простейшим из этих уравнений является такое, в котором правая часть зависит только от линейного выражения $ax + by + c$:

$$y' = F(ax + by + c). \tag{2.8}$$

Для решения этого уравнения сделаем замену переменной, приняв в качестве новой искомой функции не y, а u, где y и u связаны соотношением: $u = ax + by + c$.

Тогда $u' = a + by'$ и $y' = \dfrac{u' - a}{b}$.

Подставляя в данное уравнение u вместо $ax + by + c$ и $\dfrac{u' - a}{b}$ вместо y', получим уравнение, в котором неизвестной функцией является u:

$$\frac{u' - a}{b} = F(u),$$

или

$$u' = a + bF(u);$$

это — уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$u = \varphi(x, C).$$

Вспоминая теперь, что $u = ax + by + c$, получим общий интеграл первоначального уравнения:

$$ax + by + c = \varphi(x, C).$$

Пример 2.2. Решить уравнение

$$y' = 3\left(y - \frac{x}{2}\right)^{2/3} + \frac{1}{2}.$$

Это — уравнение рассмотренного типа. Заменяя $y - x/2 = u$, получим $y' = u' + 1/2$. Следовательно, уравнение приведется к виду

$$u' + \frac{1}{2} = 3u^{2/3} + \frac{1}{2}.$$

Решая его, находим:

$$\frac{du}{dx} = 3u^{2/3}; \quad u^{-2/3}\,du = 3dx; \quad 3u^{1/3} = 3x + 3C.$$

(для простоты обозначаем постоянную интеграции через $3C$),

$$u = (x + C)^3.$$

Возвращаясь теперь к старой переменной, получим

$$y - \frac{x}{2} = (x + C)^3 \quad \text{или} \quad y = (x + C)^3 + \frac{x}{2}.$$

Несколько более сложным типом уравнений является уравнение вида

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{2.9}$$

Не рассматривая пока это уравнение в общем случае (мы к нему вернемся в п. 3), рассмотрим сначала тот частный случай, когда коэффициенты в числителе (при x и y) пропорциональны коэффициентам в знаменателе. Тогда $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$. Обозначая эти отношения одной буквой λ, $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$. В этом случае уравнение может быть переписано в виде

$$y' = F\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Теперь сразу видно, что правая часть уравнения зависит только от линейного многочлена $a_2x + b_2y$. Следовательно, заменяя, как и в прошлом случае, $a_2x + b_2y$ через u, мы можем свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 2.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{4x + 2y + 1}{2x + y}.$$

Полагаем $2x + y = u$; тогда $4x + 2y = 2u$, $y = u - 2x$, $y' = u' - 2$, и уравнение приводится к виду

$$u' - 2 = \frac{2u + 1}{u}.$$

Разделяя переменные, находим u как функцию от x:

$$u' = \frac{2u + 1}{u} + 2; \quad \frac{du}{dx} = \frac{4u + 1}{u}; \quad \frac{u\,du}{4u + 1} = dx;$$

$$\int \frac{u\,du}{4u + 1} = \int dx + C; \quad \frac{1}{4}u - \frac{1}{16}\ln|4u + 1| = x + C.$$

Связь между u и x оказалась заданной с помощью соотношения, не разрешенного относительно u. Подставляя сюда $u = 2x + y$, найдем y как неявную функцию от x (общий интеграл):

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{16}\ln|8x + 4y + 1| = C.$$

п. 3. Однородные уравнения.

Определение 2.6. *Уравнение*

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным, если функция $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов:

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.10}$$

Например, уравнение

$$(xy - y^2)\,dx - (x^2 - 2xy)\,dy = 0$$

однородное, так как его можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\dfrac{y}{x}}.$$

Однородным будет также всякое уравнение вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2.11}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени k. Заметим, что функция $f(x, y)$ будет однородной степени k, если для любого t выполняется

$$f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y).$$

Например, $f(x, y) = xy + 2x^2 - y^2$ — однородная второй степени функция, так как $f(tx, ty) = t^2xy + 2t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(xy + 2x^2 - y^2) = t^2 \cdot f(x, y)$.

В общем случае переменные в однородном уравнении не разделяются. Однако, вводя вспомогательную неизвестную функцию u по формуле

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = xu,$$

мы сможем преобразовать однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Действительно, имеем

$$y' = u + xu',$$

и уравнение $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ принимает вид $u + xu' = \varphi(u)$, т. е.

$$x\,\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};$$

после интегрирования получаем

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Найдя отсюда выражение для u как функции от x и возвращаясь к переменной $y = xu$, получим искомое решение однородного уравнения.

Чаще всего не удается просто найти явное выражение для u. Тогда после интегрирования следует в левую часть вместо u подставить $\dfrac{y}{x}$; в результате мы получим решение уравнения в неявном виде.

Разумеется, мы предполагаем, что $\varphi(u) - u \not\equiv 0$. Если $\varphi(u) \equiv u$, то $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) \equiv \dfrac{y}{x}$ и не нужно делать никаких преобразований, ибо само заданное уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$ — с разделяющимися переменными.

Пример 2.4. Найдем решение однородного уравнения

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Замена $y = xu$ приводит к уравнению

$$u + xu' = \frac{u - u^2}{1 - 2u} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{u - u^2}{1 - 2u} - u\right) = \frac{1}{x}\frac{u^2}{1 - 2u}.$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{1 - 2u}{u^2}\,du = \frac{dx}{x},$$

откуда $\dfrac{1}{u} + 2\ln|u| = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, или $\ln\left(e^{1/u}u^2\right) = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, и значит,

$$u^2 e^{1/u} = \frac{C}{x}.$$

Возвращаясь к переменной y, приходим к общему решению:

$$\frac{y^2}{x} e^{x/y} = C.$$

При $C > 0$ интегральные кривые лежат в полуплоскости $x > 0$, а при $C < 0$ — в полуплоскости $x < 0$.

Уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{2.12}$$

Это уравнение мы уже рассматривали для того случая, когда коэффициенты при x и при y в числителе пропорциональны соответствующим коэффициентам знаменателя (см. выше п. 2). Сейчас мы рассмотрим это же уравнение в том случае, когда пропорциональности нет, т. е. когда $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$ (иначе говоря, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$).

Заметим прежде всего, что если бы свободные члены в числителе и знаменателе (c_1 и c_2) были равны нулю, то уравнение было бы однородным (в этом можно было бы убедиться, разделив числитель и знаменатель на x). Если же c_1 или c_2 отличны от нуля, то замена неизвестной функции y и независимого переменного x позволит свести это уравнение к однородному.

Введем новые переменные ζ и η, связанные с x и y соотношениями:

$$x = \zeta + x_0, \quad y = \eta + y_0,$$

где x_0 и y_0 — пока неизвестные постоянные. Подставив эти выражения для x и y в уравнение (и учитывая, что $d\zeta = dx$, $d\eta = dy$ и, следовательно, $y'_x = \dfrac{d\eta}{d\zeta}$), приведем данное уравнение к следующему виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = F\left[\frac{a_1\zeta + b_1\eta + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2\zeta + b_2\eta + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}\right].$$

Подберем теперь так x_0 и y_0, чтобы выражения в круглых скобках равнялись нулю. Их разыскание сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет определенное решение, так как определитель системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

по условию, отличен от нуля. При таком выборе x_0 и y_0 уравнение становится однородным относительно ζ и η:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = F\left(\frac{a_1\zeta + b_1\eta}{a_2\zeta + b_2\eta}\right).$$

Решая его и подставляя в полученное решение вместо ζ выражение $x - x_0$, а вместо η — выражение $y - y_0$, получим искомый общий интеграл данного уравнения (2.12).

Пример 2.5. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y + 3}.$$

Сделаем замену переменных $x = \zeta + x_0$, $y = \eta + y_0$. Тогда уравнение приведется к виду

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\zeta + \eta + x_0 + y_0 + 1}{\zeta - \eta + x_0 - y_0 + 3};$$

подберем теперь x_0 и y_0 так, чтобы выполнялись равенства:

$$x_0 + y_0 + 1 = 0; \quad x_0 + y_0 + 3 = 0.$$

Решая эту систему, получим $x_0 = -2$; $y_0 = 1$. Тогда уравнение упростится:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\zeta + \eta}{\zeta - \eta}.$$

Это — однородное уравнение. Решая его методом, рассмотренным в предыдущем пункте, получим

$$e^{\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\zeta}} = C\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}.$$

Возвращаясь теперь к старым переменным, получим окончательно общий интеграл:

$$e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x+2}} = C\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2}.$$

п. 4. Линейные уравнения.

Определение 2.7. *Уравнение вида*

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.13}$$

т. е. линейное относительно искомой функции и ее производной, называется линейным. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции независимой переменной x.

Уравнение (2.13) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными путем следующего искусственного приема. Запишем функцию y в виде произведения двух функций: $y = uv$. Одной из них мы можем распорядиться совершенно произвольно; при этом вторая должна быть определена в зависимости от первой таким образом, чтобы их произведение удовлетворяло данному линейному уравнению. Свободой выбора одной из функций u и v мы воспользуемся для максимального упрощения уравнения, получающегося после замены.

Из равенства $y = uv$ находим произольную y':

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.13), имеем

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Выберем в качестве v какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0. \tag{2.14}$$

Тогда для отыскания u получим уравнение

$$u'v = q(x). \tag{2.15}$$

Сначала найдем v из уравнения (2.14). Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dv}{v} = -p(x)\,dx,$$

откуда

$$\ln v = -\int p(x)\,dx \quad \text{и} \quad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Под неопределенным интегралом здесь понимается какая-нибудь одна первообразная от функции $p(x)$, т. е. v является вполне определенной функцией от x.

Зная v, находим далее u из уравнения (2.15):

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = q(x)e^{\int p(x)\,dx}, \quad du = q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx,$$

и значит,

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C.$$

Здесь мы уже будем для u все первообразные. По u и v найдем искомую функцию y:

$$y = uv = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

Полученная формула дает *общее решение* линейного уравнения (2.13).

Пример 2.6. Решить уравнение $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Имеем: $u'v + uv' + \dfrac{1}{x}uv = \dfrac{\sin x}{x}$, или $u'v + u\left(v' + \dfrac{v}{x}\right) = \dfrac{\sin x}{x}$. Пусть $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Отсюда $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$ и, значит, $\ln v = -\ln x$, т. е. $v = \dfrac{1}{x}$. Следовательно, $u' \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$, откуда $u' = \sin x$ и, значит, $u = -\cos x + C$. Имеем окончательно

$$y = uv = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

п. 5. Уравнения Бернулли. К линейным уравнениям часто приводятся уравнения более сложного вида. Рассмотрим, например, так называемое *уравнение Бернулли*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{2.16}$$

При $n = 0$ — это линейное уравнение, а при $n = 1$ можно разделить переменные. При других значениях n оно сводится к линейному при помощи следующего приема: делим обе части уравнения на y^n и записываем его так:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x).$$

Под неопределенным интегралом здесь понимается какая-нибудь одна первообразная от функции $p(x)$, т. е. v является вполне определенной функцией от x.

Зная v, находим далее u из уравнения (2.15):

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = q(x)e^{\int p(x)\,dx}, \quad du = q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx,$$

и значит,

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C.$$

Здесь мы уже будем для u все первообразные. По u и v найдем искомую функцию y:

$$y = uv = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

Полученная формула дает *общее решение* линейного уравнения (2.13).

Пример 2.6. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Имеем: $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x}$, или $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}$. Пусть $v' + \frac{v}{x} = 0$. Отсюда $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ и, значит, $\ln v = -\ln x$, т. е. $v = \frac{1}{x}$. Следовательно, $u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$, откуда $u' = \sin x$ и, значит, $u = -\cos x + C$. Имеем окончательно

$$y = uv = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

п. 5. Уравнения Бернулли. К линейным уравнениям часто приводятся уравнения более сложного вида. Рассмотрим, например, так называемое *уравнение Бернулли*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{2.16}$$

При $n = 0$ — это линейное уравнение, а при $n = 1$ можно разделить переменные. При других значениях n оно сводится к линейному при помощи следующего приема: делим обе части уравнения на y^n и записываем его так:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x).$$

Если ввести вспомогательную неизвестную функцию $y^{-n+1} = z$, то $(-n+1)y^{-n}y' = z'$, и уравнение примет вид

$$z' + (-n+1)p(x)z = (-n+1)q(x).$$

Это линейное уравнение; решая его и переходя от z снова к y, мы и получим решение исходного уравнения.

Пример 2.7. Найти общее решение уравнения

$$xy' + 6y = 2x^2\sqrt{y}.$$

Это уравнение Бернулли. Сделаем замену $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Имеем

$$x(u'v + uv') + 6uv = 2x^2\sqrt{uv},$$

$$xu'v + u(xv' + 6v) = 2x^2\sqrt{uv}.$$

Пусть $xv' + 6v = 0$. Тогда $x\dfrac{dv}{dx} + 6v = 0$ или $\dfrac{dv}{v} + \dfrac{6dx}{x} = 0$; $\ln|v| + 6\ln|x| = 0$; $\dfrac{v}{x^6} = 1$; $v = x^6$. Следовательно,

$$xu' \cdot x^6 = 2x^2\sqrt{u \cdot x^6}, \quad u' \cdot x^7 = 2x^5\sqrt{u},$$

$$u' \cdot x^2 = 2\sqrt{u}; \quad \frac{du}{dx} \cdot x^2 = 2\sqrt{u}; \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2\,dx}{x^2},$$

$$2\sqrt{u} = -\frac{2}{x} + C; \quad \sqrt{u} = \frac{xC - 2}{2x}; \quad u = \frac{(xC-2)^2}{4x^2}.$$

Окончательно имеем

$$y = u \cdot v = \frac{(xC-2)^2 \cdot x^4}{4}.$$

п. 6. Уравнения в полных дифференциалах. Возьмем уравнение первого порядка, записанное в дифференциальной форме:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{2.17}$$

Определение 2.8. *Если левая часть уравнения (2.17) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то это уравнение называется уравнением в подных дифференциалах.*

Выражение же $P\,dx + Q\,dy$, как известно, есть полный дифференциал, если $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Пользуясь ранее рассмотренными методами отыскания функции по ее полному дифференциалу, находим такую функцию $u(x, y)$, что

$$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Тогда уравнение (2.17) можно записать так:

$$du(x,y) = 0.$$

Последнее равенство означает, что между переменными x и y существует зависимость вида

$$u(x,y) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Полученная зависимость и дает общее решение уравнения (2.17). Следовательно, интегрирование уравнения (2.17) сводится к отысканию первообразной от левой части. Воспользовавшись выражениями для этой первообразной получаем общее решение уравнения (2.17) в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C$$

или в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C.$$

Пример 2.8. Найдем общее решение уравнения

$$(2x + y)\,dx + (x - 4y)\,dy = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 4y) = 1,$$

то левая часть уравнения является полным дифференциалом некторой функции $u(x, y)$. Беря за точку (x_0, y_0) начало координат, имеем

$$u(x,y) = \int\limits_{0}^{x} (2x + y)\,dx + \int\limits_{0}^{y} (-4y)\,dy = x^2 + xy - 2y^2 = C.$$

п. 7. Интегрирующий множитель. Далеко не всякое дифференциальное уравнение вида (2.17) является уравнением в полных дифференциалах. Однако для всякого уравнения (2.17), такого, что функции P и Q дифференцируемы в рассматриваемой области, существует функция $\mu(x, y) \not\equiv 0$, после умножения на которую всех членов уравнения (2.17), левая часть уравнения становится полным дифференциалом; эта функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*. Всякое уравнение, при условии дифференцируемости функций P и Q, имеет интегрирующий множитель (это можно доказать), однако далеко не для всякого уравнения этот множитель практически можно найти.

Если интегрирующий множитель найден, то данное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах и затем решается методом, указанным в предыдущем пункте.

Пример 2.9. Решить дифференциальное уравнение

$$(1 - x^2y)\,dx + (x^2y - x^3)\,dy = 0,$$

зная, что оно имеет интегрирующий множитель μ, зависящая только от x.

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах (здесь $P = 1 - x^2y$; $Q = x^2y - x^3$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$). Однако в условии сказано, что уравнение имеет интегрирующий множитель вида $\mu(x)$. Найдем его.

Умножая все члены данного уравнения на $\mu(x)$, приведем его к виду

$$\mu(x)(1 - x^2y)\,dx + \mu(x)(x^2y - x^3)\,dy = 0.$$

Для того чтобы левая часть этого уравнения была полным дифференциалом, надо, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)(1 - x^2y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)(x^2y - x^3)\right]$$

или

$$\mu'(x)(x^2y - x^3) + \mu(x)(2xy - 2x^2) = 0,$$

откуда

$$\mu'(x) = -\frac{2\mu(x)}{x}.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными с неизвестной функцией $\mu(x)$. Решая его, найдем $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \frac{C}{x^2}.$$

Так как нам достаточно найти хотя бы один интегрирующий множитель, примем $C = 1$. Тогда $\mu(x) = 1/x^2$ и данное уравнение после умножения на $\mu(x)$ примет вид

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)\, dy = 0.$$

Это — уравнение в полных дифференциалах (здесь $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2} - y\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(y - x)$). Решая его так же, как и предыдущий пример, найдем общий интеграл данного уравнения

$$\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x} = C.$$

§ 2.2. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков

п. 1. Дифференциальные уравнения второго порядка. Мы перейдем теперь к изучению дифференциальных уравнений вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.18}$$

в левую часть которых входит вторая производная неизвестной функции. Мы будем называть их *дифференциальными уравнения второго порядка.*

Обычно рассматривают уравнения, разрешенные относительно второй производной

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2.19}$$

Начнем с простого примера:

$$y'' = x.$$

Последовательно интегрируя, найдем сначала первую производную: $y' = x^2/2 + C_1$, а затем и саму функцию:

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Так как мы интегрировали дважды, то получили две произвольные постоянные, которые обозначили через C_1 и C_2.

Сформулируем общий вывод, доказательство которого мы проводить не будем.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ имеет бесчисленное множество решений, которые даются формулой

$$y = \varphi(x, C_1, C_2),$$

содержащей две произвольные постоянные. Это совокупность решений называется *общим решением.*

Частное решение уравнения отыскивается при помощи задания начальных условий

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{и} \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Например, найдем частное решение рассмотренного нами уравнения $y'' = x$ при начальных условиях $y\big|_{x=2} = 2$, $y'\big|_{x=2} = 3$. Подставляя эти условия в выражения для общего решения и его производной, получаем систему уравнений

$$3 = 2 + C_1, \quad 2 = \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2,$$

откуда $C_1 = 1$, и $C_2 = -4/3$. Следовательно, искомым частным решением будет

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, мы задаем еще угловой коэффициент касательной (y'_0) к этой кривой. Отметим, что так как общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит *бесчисленное множество интегральных кривых,* лишь одна из которых имеет данный угловой коэффициент. Так, например, легко проверить, что если в общем решении рассмотренного выше примера положить $C_2 = \dfrac{2}{3} - 2C_1$, то график функции $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + \left(\dfrac{2}{3} - 2C_1\right)$ при любом значении C_1 пройдет через заданную точку $(2, 2)$. Выбирая из всех этих кривых ту, для которой угловой коэффициент равен 3, мы и приходим к искомому частному решению.

Чтобы сформулировать теорему существования решения для уравнения второго порядка вида (2.19), будем считать, что правая часть этого уравнения является функцией трех независимых переменных x, y и y', так как при задании начальных условий координаты x_0, y_0 и угловой коэффициент касательной y'_0 ничем между собой не связаны.

Теорема существования и единственности решения. *Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.*

Если, кроме того, непрерывны и частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, то это решение уравнения единственно.

Доказывать теорему мы не будем.

Пользуясь приведенной теоремой, можно, например, сразу сказать, что уравнение $y'' = \dfrac{y'}{x} + y$ имеет единственное решение при начальных условиях $y\big|_{x=1} = 2$, $y'\big|_{x=1} = -1$; при этом, конечно, открытым остается вопрос, как это решение найти. Если для этого же уравнения задать начальные условия при $x = 0$, то теорема существования никакого заключения сделать не позволит, так как правая часть уравнения при этих начальных условиях будет не определена.

Как и для уравнений первого порядка, задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют *задачей Коши*.

п. 2. Частные случаи уравнений второго порядка. Возьмем дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

и рассмотрим частные случаи, легко приводимые к уравнениям первого порядка.

I. Правая часть уравнения не содержит y и y':

$$y'' = f(x). \tag{2.20}$$

Так как $y'' = (y')$, то

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, будем иметь

$$y = \int \left[\int f(x)\,dx \right] dx + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Пример такого уравнения мы уже рассматривали в п. 1.

II. Правая часть уравнения не содержит y:

$$y'' = f(x, y'). \tag{2.21}$$

Положим $y' = z$; тогда $y'' = z'$ и уравнение (2.21) преобразуется в уравнение первого порядка относительно z:

$$z' = f(x, z).$$

Если мы найдем решение этого уравнения $z = \varphi(x, C_1)$, то искомое решение получим интегрированием равенства $y' = z$, т. е.

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2.$$

Пример 2.10. Решим уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

Полагая $y' = z$ и $y'' = z'$, приходим к уравнению первого порядка $z' + \dfrac{z}{x} = x$, которое оказывается линейным. Решив его, найдем $z = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x}$. Тогда $y' = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x}$ и $y = \dfrac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2$.

III. Правая часть уравнения не содержит x:

$$y'' = f(y, y'). \tag{2.22}$$

Положим $y' = p$ и будем считать p функцией от y. Дифференцируя это равенство, получим $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Чтобы исключить x, произведем следующее преобразование:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p.$$

которой угловой коэффициент равен 3, мы и приходим к искомому частному решению.

Чтобы сформулировать теорему существования решения для уравнения второго порядка вида (2.19), будем считать, что правая часть этого уравнения является функцией трех независимых переменных x, y и y', так как при задании начальных условий координаты x_0, y_0 и угловой коэффициент касательной y'_0 ничем между собой не связаны.

Теорема существования и единственности решения. *Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.*

Если, кроме того, непрерывны и частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, то это решение уравнения единственно.

Доказывать теорему мы не будем.

Пользуясь приведенной теоремой, можно, например, сразу сказать, что уравнение $y'' = \dfrac{y'}{x} + y$ имеет единственное решение при начальных условиях $y\big|_{x=1} = 2$, $y'\big|_{x=1} = -1$; при этом, конечно, открытым остается вопрос, как это решение найти. Если для этого же уравнения задать начальные условия при $x = 0$, то теорема существования никакого заключения сделать не позволит, так как правая часть уравнения при этих начальных условиях будет не определена.

Как и для уравнений первого порядка, задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют *задачей Коши*.

п. 2. Частные случаи уравнений второго порядка. Возьмем дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

и рассмотрим частные случаи, легко приводимые к уравнениям первого порядка.

I. Правая часть уравнения не содержит y и y':

$$y'' = f(x). \tag{2.20}$$

Таким образом, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Подставив в уравнение, будем иметь

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

т. е. уравнение первого порядка относительно p как функции от y. Если мы найдем его решение $p = \varphi(y, C_1)$, то искомое решение получим из уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1), \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 2.11. Решим уравнение

$$2yy'' + y'^2 = 0.$$

Полагая $y' = p$ и $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dy}{2y}$ и интегрируя, получим $\ln p = -\dfrac{1}{2}\ln y + \ln C_1$ и $p = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$. Определив теперь y из уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$, придем к искомому решению $y^{3/2} = C_1x + C_2$ или $y = (C_1x + C_2)^{2/3}$. При сокращении на p было потеряно решение уравнения $p = y' = 0$, т. е. $y = \text{const}$. В данном случае оно получается из общего при $C_1 = 0$.

В обоих последних случаях мы заменяли производную y' новой вспомогательной функцией и приходили, таким образом, к уравнению первого порядка. Если уравнение имеет вид $y'' = f(y')$, т. е. если оно одновременно относится и к типу II и к типу III, то следует выбрать тот ход решения, который окажется более удобным.

п. 3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение 2.9. *Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2.23}$$

или

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.24}$$

Общее решение такого уравнения зависит от n произвольных постоянных: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Чтобы выделить частное решение, отвечающее конкретным условиям задачи, нужно задать начальные условия; они имеют следующий вид:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

т. е. при $x = x_0$ задаются значения самой функции и ее первых $(n-1)$ производных. Дифференцируя $(n-1)$ раз общее решение и подставляя начальные условия, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

На вопрос о существовании и единственности частного решения отвечает теорема, совершенно аналогичная уже приведенным ранее для случаев $n = 1$ и $n = 2$. Формулируя ее, нужно считать, что правая часть уравнения (2.23) — функция f — зависит от n независимых переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. *Если эта функция непрерывна в окрестности начальных значений $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и имеет непрерывные частные производные по всем переменным, начиная с y, то уравнение (2.23) имеет единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.*

Укажем один тип уравнений n-го порядка, которые легко решаются при любом n, а именно

$$y^{(n)} = f(x).$$

Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований; при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

Пример 2.12. Решим уравнение $y^{(IV)} = \sin x$. Имеем:

$$y^{(III)} = -\cos x + C_1, \quad y^{(II)} = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \quad y = \sin x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

или

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.24}$$

Общее решение такого уравнения зависит от n произвольных постоянных: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Чтобы выделить частное решение, отвечающее конкретным условиям задачи, нужно задать начальные условия; они имеют следующий вид:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \dots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

т. е. при $x = x_0$ задаются значения самой функции и ее первых $(n-1)$ производных. Дифференцируя $(n-1)$ раз общее решение и подставляя начальные условия, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_n$.

На вопрос о существовании и единственности частного решения отвечает теорема, совершенно аналогичная уже приведенным ранее для случаев $n = 1$ и $n = 2$. Формулируя ее, нужно считать, что правая часть уравнения (2.23) — функция f — зависит от n независимых переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. *Если эта функция непрерывна в окрестности начальных значений $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ и имеет непрерывные частные производные по всем переменным, начиная с y, то уравнение (2.23) имеет единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.*

Укажем один тип уравнений n-го порядка, которые легко решаются при любом n, а именно

$$y^{(n)} = f(x).$$

Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований; при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

Пример 2.12. Решим уравнение $y^{(IV)} = \sin x$. Имеем:

$$y^{(III)} = -\cos x + C_1, \quad y^{(II)} = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \quad y = \sin x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Изменяя обозначения произвольных постоянных, общее решение можно записать в виде

$$y = \sin x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

§ 2.3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейные уравнения второго порядка. Общие свойства

Определение 2.10. *Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение первой степени (линейное) относительно неизвестной функции и ее производных.*

Будем записывать его в виде

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{2.25}$$

Функция $f(x)$ называется *правой частью уравнения*. Если функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение (2.25) называется *линейным уравнением без правой части* (или *однородным*). В противном случае уравнение (2.25) называют *линейным уравнением с правой частью* (или *неоднородным*).

Если в некотором интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ непрерывны, то уравнение (2.25) при любых начальных условиях

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \text{где} \quad x_0 \in (a, b)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее этим условиям. Это следует из того, что к уравнению (2.25), записанному в виде $y'' = -a_1(x)y' - a_2(x)y + f(x)$, применима теорема существования и единственности решения, сформулированная в § 2.2; непрерывна и сама правая часть, и ее частные производные по y (это $-a_2(x)$) и по y' (это $-a_1(x)$).

Заметим еще, что линейное уравнение

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

можно привести к виду (2.25), деля обе его части на $p_0(x)$. При этом в тех точках, где $p_0(x) = 0$, условия теоремы существования могут нарушиться; такие точки называются *особыми*.

п. 1. Линейные уравнения без правой части. Рассмотрим сначала уравнения без правой части, т. е.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{2.26}$$

где для краткости обозначено $a_1 = a_1(x)$ и $a_2 = a_2(x)$. В частных случаях a_1 и a_2 могут быть просто постоянными.

Теорема 2.1. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения линейного уравнения (2.26), то функция $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых постоянных C_1 и C_2 также является решением уравнения.*

Для краткости в дальнейшем мы будем записывать решения в виде y_1 и y_2, а выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называть их линейной комбинацией.

Доказательство. Продифференцируем дважды функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2', \quad y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

Подставим y, y' и y'' в левую часть уравнения (2.26). Получим

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2).$$

Выражения в скобках представляют собой результат подстановки в левую часть уравнения (2.26) соответственно функций y_1 и y_2, а так как они по условию суть решения уравнения, то оба эти выражения тождественно равны нулю и, таким образом, функция $y(x)$ действительно удовлетворяет уравнению (2.26). □

На основе доказанной теоремы мы можем сделать следующий вывод о структуре общего решения линейного уравнения без правой части:

Если y_1 и y_2 — решения уравнения (2.26) такие, что их отношение не равно постоянной величине ($y_2/y_1 \neq \text{const}$), то линейная комбинация этих функций

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

является общим решением уравнения.

п. 2. Линейные уравнения с правой частью. Пусть теперь дано линейное уравнение второго порядка с правой частью

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{2.27}$$

Уравнение без правой части

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{2.28}$$

получающееся из данного уравнения (2.27), если вместо свободного члена $f(x)$ взять нуль, назовем *соответствующим уравнением* (2.27). Докажем теорему о структуре общего решения уравнения с правой частью (2.27).

Теорема 2.2. *Общее решение уравнения с правой частью (2.27) можно составить как сумму общего решения соответствующего уравнения без правой части (2.28) и какого-нибудь частного решения данного уравнения (2.27).*

Доказательство. Обозначим через $\Phi(x)$ общее решение уравнения (2.28), а через $\varphi(x)$ — какое-нибудь частное решение уравнения (2.27). Возьмем функцию

$$y = \Phi(x) + \varphi(x).$$

Имеем

$$y' = \Phi'(x) + \varphi'(x), \quad y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x).$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в левую часть заданного уравнения (2.27), найдем:

$$\Phi''(x) + \varphi''(x) + a_1[\Phi'(x) + \varphi'(x)] + a_2[\Phi(x) + \varphi(x)] =$$

$$= [\Phi''(x) + a_1\Phi'(x) + a_1\Phi(x)] + [\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)].$$

Выражение в первой квадратной скобке равно нулю, ибо $\Phi(x)$ — решение уравнения без правой части (2.28), а выражение во второй квадратной скобке равно $f(x)$, ибо $\varphi(x)$ — решение уравнения с правой частью (2.27). Следовательно, функция $y = \Phi(x) + \varphi(x)$ действительно есть решение уравнения (2.27). Так как это решение зависит от двух произвольных постоянных (от них зависит функция $\Phi(x)$), то оно и есть общее решение, что мы и хотели доказать. $\square$

Итак, для того, чтобы найти общее решение уравнения с правой частью, нужно найти общее решение соответствующего уравнения без правой части и лишь одно какое-нибудь частное решение заданного уравнения. Это можно записать так:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \varphi(x),$$

где y_1 и y_2 — частные решения соответствующего уравнения без правой части, а $\varphi(x)$ — частное решение уравнения с правой частью.

п. 3. Уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части. Решением линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами a_1 и a_2 мы заниматься не будем; задача эта слишком сложна. Мы будем рассматривать только линейные уравнения с постоянными коэффициентами, т. е. уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{2.29}$$

где a_1 и a_2 — постоянные величины. Как и раньше, начнем с уравнений без правой части.

Возьмем однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{2.30}$$

где a_1 и a_2 — постоянные. Поставим перед собой цель — найти общее решение такого уравнения.

Попробуем удовлетворить уравнению (2.30) функцией вида $y = e^{rx}$ (r — константа). Читателя не должна смущать кажущаяся с первого взгляда произвольность выбора этой функции. Внимательно проследив за простейшими выкладками, которые мы сейчас приведем, он убедится, что особенности показательной функции действительно дают повод ожидать, что при некотором определенном r функция e^{rx} будет решением уравнения (2.30).

Имеем

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Следовательно, должно иметь место тождество

$$e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0$$

или, так как $e^{rx} \neq 0$,

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \tag{2.31}$$

Отсюда видно, что функция e^{rx} будет решением дифференциального уравнения (2.30), если r будет корнем квадратного уравнения (2.31).

Уравнение (2.31) называется *характеристическим*.

Чтобы составить характеристическое уравнение, нужно в данном дифференциальном уравнении (2.30) y заменить единицей, а каждую производную искомой функции (y' и y'') — величиной r в степени, равной порядку производной (r и r^2).

Следует различать три возможных случая для корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (здесь везде предполагается, что коэффициенты a_1 и a_2 — действительные числа):

1) r_1 и r_2 — действительные и различные числа $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 и r_2 — действительные и равные числа: $r_1 = r_2$ (r_1 — двукратный корень уравнения (2.31));

3) r_1 и r_2 — комплексные сопряженные числа: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные: $r_1 \neq r_2$. При этом оба корня могут быть взяты в качестве показателей r функции e^{rx}, и мы сразу получаем два решения уравнения (2.30): e^{r_1x} и e^{r_2x}. Ясно, что их отношение не является постоянной величиной: $\dfrac{e^{r_2x}}{e^{r_1x}} = e^{(r_2-r_1)x}$.

Общее решение в случае действительных и разных корней характеристического уравнения дается формулой

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2.13. Решим уравнение

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Его корни суть $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Поэтому общим решением будет

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

Отсюда видно, что функция e^{rx} будет решением дифференциального уравнения (2.30), если r будет корнем квадратного уравнения (2.31).

Уравнение (2.31) называется *характеристическим.*

Чтобы составить характеристическое уравнение, нужно в данном дифференциальном уравнении (2.30) y заменить единицей, а каждую производную искомой функции (y' и y'') — величиной r в степени, равной порядку производной (r и r^2).

Следует различать три возможных случая для корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (здесь везде предполагается, что коэффициенты a_1 и a_2 — действительные числа):

1) r_1 и r_2 — действительные и различные числа $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 и r_2 — действительные и равные числа: $r_1 = r_2$ (r_1 — двукратный корень уравнения (2.31));

3) r_1 и r_2 — комплексные сопряженные числа: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные: $r_1 \neq r_2$. При этом оба корня могут быть взяты в качестве показателей r функции e^{rx}, и мы сразу получаем два решения уравнения (2.30): $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$. Ясно, что их отношение не является постоянной величиной: $\dfrac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x}$.

Общее решение в случае действительных и разных корней характеристического уравнения дается формулой

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2.13. Решим уравнение

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Его корни суть $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Поэтому общим решением будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Найдем частное решение по начальным условиям $y\big|_{x=0}= 2$, $y'\big|_{x=0}= -5$. Составим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$C_1 + C_2 = 2,$$

$$2C_1 - C_2 = -5.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = 3$ и искомым частным решением будет

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные и равные: $r_1 = r_2$. В этом случае мы непосредственно получаем только одно решение $y_1 = e^{r_1 x}$. Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

Продифференцируем дважды функцию y_2:

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 xe^{r_1 x}, \quad y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 xe^{r_1 x}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения (2.30):

$$2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 xe^{r_1 x} + a_1(e^{r_1 x} + r_1 xe^{r_1 x}) + a_2 xe^{r_1 x} =$$

$$= e^{r_1 x}[x(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) + (2r_1 + a_1)].$$

Поскольку r_1 — корень характеристического уравнения, то $r_1^2+a_1r_1+a_2 = 0$; а так как r_1 — двукратный корень, то по формуле Виета $r_1 + r_1 = -a_1$, т. е. $2r_1 + a_1 = 0$. Таким образом, выражение, заключенное в квадратной скобке, равно нулю, и функция $y_2 = xe^{r_1 x}$ действительно является решением уравнения (2.30).

Итак, в случае действительных равных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (2.30) имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}.$$

Пример 2.14. Решим уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Найдем частное решение по начальным условиям $y\big|_{x=0}=2$, $y'\big|_{x=0}=-5$. Составим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$C_1+C_2=2,$$

$$2C_1-C_2=-5.$$

Отсюда $C_1=-1$, $C_2=3$ и искомым частным решением будет

$$y=-e^{2x}+3e^{-x}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные и равные: $r_1=r_2$. В этом случае мы непосредственно получаем только одно решение $y_1=e^{r_1x}$. Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию

$$y_2=xe^{r_1x}.$$

Продифференцируем дважды функцию y_2:

$$y_2'=e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x},\quad y_2''=2r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{r_1x}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения (2.30):

$$2r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{r_1x}+a_1(e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x})+a_2xe^{r_1x}=$$

$$=e^{r_1x}[x(r_1^2+a_1r_1+a_2)+(2r_1+a_1)].$$

Поскольку r_1 — корень характеристического уравнения, то $r_1^2+a_1r_1+a_2=0$; а так как r_1 — двукратный корень, то по формуле Виета $r_1+r_1=-a_1$, т. е. $2r_1+a_1=0$. Таким образом, выражение, заключенное в квадратной скобке, равно нулю, и функция $y_2=xe^{r_1x}$ действительно является решением уравнения (2.30).

Итак, в случае действительных равных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (2.30) имеет вид

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}.$$

Пример 2.14. Решим уравнение

$$y''-6y'+9y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

имеет один двукратный корень $r_1 = r_2 = 3$, и значит, общее решение уравнения запишется так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

3) Корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные числа: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. Если допускать в качестве решений комплексные функции действительного переменного, то, как и выше, получаем два решения уравнения (2.30): $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$, причем их отношение, равное $e^{2i\beta x}$, не есть постоянное число. Общее решение можно записать как

$$C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Предоставляем читателю воспользоваться правилами дифференцирования комплексных функций и проверить, что написанное выражение является решением.

Для того, чтобы получить решение в действительной форме, воспользуемся следующим простым правилом: *если уравнение (2.30) с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y = u(x) + iv(x)$, то каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением этого уравнения.* В самом деле, дифференцируя функцию y и подставляя результат в уравнение, получим

$$(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0,$$

или после перегруппировки слагаемых

$$(u'' + a_1 u' + a_2 u) + i(v'' + a_1 v' + a_2 v) = 0.$$

Так как комплексное выражение равно нулю только тогда, когда равны нулю его действительная и мнимая части, то должно быть

$$u'' + a_1 u' + a_2 u = 0 \quad \text{и} \quad v'' + a_1 v' + a_2 v = 0,$$

но это и значит, что функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями.

Так как по формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

то в силу указанного правила функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями уравнения (2.30); ясно, что их отношение не есть постоянная. Зная два частных решения, строим общее решение:

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

где C_1 и C_2 — уже действительные постоянные. Второе решение в комплексной форме $e^{(\alpha-i\beta)x}$ нам даже не понадобилось; строя общее решение по его действительной ($e^{\alpha x}\cos\beta x$) и мнимой ($-e^{\alpha x}\sin\beta x$) частям, мы, очевидно, получим то же самое.

Итак, *в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения общее решение имеет вид*

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Пример 2.15. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Записываем характеристическое уравнение

$$r^2 - 4r + 13 = 0.$$

Его корни суть $r_1 = 2 + 3i$, $r_2 = 2 - 3i$. Поэтому общее решение будет

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

п. 4. Уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой части. Рассмотрим теперь линейное уравнение с постоянными коэффициентами a_1 и a_2 и с правой частью, т. е.

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x). \tag{2.32}$$

Нам уже известно, что общее решение такого уравнения слагается из общего решения соответствующего уравнения без правой части и какого-нибудь частного решения уравнения с правой частью.

Поскольку общее решение уравнения без правой части мы находить умеем, то остается только найти частное решение данного уравнения (2.32).

Сначала мы рассмотрим некоторые частные случаи, в которых решение находится методом неопределенных коэффициентов, а потом укажем и общий метод.

1. Пусть правая часть уравнения (2.32) имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{mx},$$

где $P(x)$ — многочлен. Тогда уравнение (2.32) имеет частное решение вида

$$y = x^k Q(x)e^{mx},$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем если число m не является корнем характеристического уравнения $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, то $k = 0$, а если является, то k — кратность этого корня.

Принимая решение в указанной форме, мы находим неизвестные коэффициенты многочлена $Q(x)$ по методу неопределенных коэффициентов.

Правило сохраняет свою силу и тогда, когда $m = 0$, т. е. в правой части стоит только многочлен; в этом случае надо проверить, не является ли число 0 корнем характеристического уравнения. В частных случаях многочлен $P(x)$ может быть нулевой степени, т. е. постоянной величиной.

Приведем примеры, которые помогут читателю уяснить указанный прием отыскания частного решения.

Пример 2.16. 1) $y'' - 2y' + y = 1 + x;\quad y\big|_{x=0} = 2;\quad y'\big|_{x=0} = -3.$

Здесь характеристическое уравнение

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

имеет двукратный корень $r = 1$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения будет равно

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Правая часть уравнения имеет рассматриваемую форму, причем $m = 0$, $P(x) = 1 + x$. Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y = Ax + B,$$

где A, B — постоянные, подлежащие отысканию.

Дифференцируя и подставляя в дифференциальное уравнение, находим

$$-2A + Ax + B = 1 + x.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства

$$A = 1, \quad -2A + B = 1,$$

получим $A = 1$, $B = 3$. Итак, частным решением заданного уравнения является функция

$$y = x + 3,$$

а его общим решением — функция

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + (x + 3).$$

После того, как найдено общее решение уравнения, находим по начальным условиям частное. Для этого найдем

$$y' = (C_1 + C_2x)e^x + C_2e^x + 1.$$

Тогда

$$2 = C_1 + 3, \quad -3 = C_1 + C_2 + 1.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_= - 3$. Искомым решением будет функция

$$y = -(1 + 3x)e^x + x + 3.$$

2) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Здесь характеристическое уравнение

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1$, $r_2 = 3$. Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части будет иметь вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Правая часть имеет рассматриваемую форму, причем $P(x) = 3$, т. е. является многочленом нулевой степени; число $m = 2$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k = 0$. Частное решение ищем в виде

$$y = Ae^{2x},$$

где A — постоянная, подлежащая отысканию.

Тогда $y' = 2Ae^{2x}$, $y'' = 4Ae^{2x}$. Подставляя значения y, y' и y'' в уравнение, получим

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x},$$

откуда $A = -3$. Следовательно, частным решением будет функция $y = -3e^{2x}$, а общим

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3e^{2x}.$$

3) $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Здесь левая часть уравнения такая же, как в примере 2). Поэтому общее решение соответствующего уравнения без правой части запишем сразу:

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Так как теперь $m = 1$, т. е. m является однократным корнем характеристического уравнения, то $k = 1$; $P(x) = x$ — многочлен первой степени. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Дифференцируем дважды:

$$\begin{aligned} y' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x, \\ y'' &= 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x \end{aligned}$$

и подставляем в уравнение:

$$2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x - 4[(2Ax + B)e^x +$$
$$+ (Ax^2 + Bx)e^x] + 3(Ax^2 + Bx)e^x = e^x(-4Ax + 2A - 2B) = xe^x.$$

Отсюда

$$2A - 2B = 0, \quad -4A = 1,$$

т. е.

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Итак, мы нашли частное решение $y = -\dfrac{1}{4}(x^2 + x)e^x$, а следовательно, и общее:

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x.$$

2. Пусть правая часть уравнения (2.32) имеет вид

$$f(x) = a\cos nx + b\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то уравнение имеет частное решение вида

$$y = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если же числа $\pm in$ служат корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y = x(A\cos nx + B\sin nx).$$

В частных случаях, когда $a = 0$ или $b = 0$, решение все равно следует искать в указанном полном виде.

Пример 2.17. 1) $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x$.

Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$ имеет корни $r = -2 \pm 3i$. Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части запишется так:

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Так как числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Дважды дифференцируем:

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставляем в уравнение:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$
$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 5\sin 2x.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в обеих частях равенства (справа коэффициент при $\cos 2x$ равен нулю), получим

$$-8A + 9B = 5, \quad 9A + 8B = 0.$$

Отсюда $A = -\frac{8}{29}$, $B = \frac{9}{29}$, т. е. частным решением будет функция

$$-\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общим

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

3. Если в уравнении (2.32) правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{mx}[P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx],$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены, а числа $m \pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y = e^{mx}[R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx],$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Если числа $m \pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то указанную форму частного решения следует умножить на x.

Случай 1 получается из приведенного общего при $n = 0$, а случай 2 при $m = 0$, $P_1(x) = a$, $P_2(x) = b$.

Заметим, что в результате решения может случиться, что степень одного из многочленов $R_1(x)$ и $R_2(x)$ будет меньше взятой первоначально, т. е. некоторые старшие коэффициенты этого многочлена окажутся равными нулю.

Пример 2.18. $y'' + y = 4x \sin x$.

Здесь $m = 0$, $n = 1$ и $\pm i$ суть корни характеристического уравнения $r^2 + 1 = 0$. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y = x[(Ax + B)\cos x + (A_1 x + B_1)\sin x].$$

Имеем

$$y'' = [-Ax^2 + (4A_1 - B)x + (2A + 2B_1)]\cos x +$$
$$+ [-A_1x^2 - (4A + B_1)x + (2A_1 - 2B)]\sin x.$$

Подставляя в уравнение, находим

$$[2A_1x + (A + B_1)]\cos x + [-2Ax + (A_1 - B)]\sin x = 2x\sin x.$$

Это равенство будет тождественным только при

$$2A_1 = 0, \quad A + B_1 = 0, \quad -2A = 2, \quad A_1 - B = 0.$$

Отсюда $A = -1$, $B = 0$, $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. Следовательно, получаем частное решение

$$y = x(\sin x - x\cos x).$$

Общее решение дается формулой

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(\sin x - x\cos x).$$

Практически важно учесть следующее простое замечание.

Пусть правая часть уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ равна сумме двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_1 и y_2 суть решения уравнений с той же левой частью, но с правыми частями, соответственно равными $f_1(x)$ и $f_2(x)$; тогда $y_1 + y_2$ будет решением данного уравнения.

В самом деле,

$$(y_1'' + y_2'') + a_1(y_1' + y_2') + a_2(y_1 + y_2) = (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) +$$
$$+ (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) = f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$

Это значит, что если мы умеем найти решения уравнения, когда правыми частями его являются отдельные слагаемые заданной правой части, то мы очень просто — в виде суммы решений — находим и все искомое решение.

Например, в силу этого замечания уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} + xe^x$$

имеет частное решение

$$y = -3e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$$

и, значит, такое общее решение:

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x.$$

п. 5. Метод вариации произвольных постоянных[1]. Изложим теперь метод, позволяющий отыскивать частное решение линейного уравнения с правой частью

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \tag{2.33}$$

где $f(x)$ — любая функция.

При использовании этого метода нам нужно знать общее решение соответствующего уравнения без правой части. Метод вариации постоянных в равной мере применим как к уравнениям с постоянными коэффициентами, так и к уравнениям, в которых коэффициенты a_1 и a_2 являются функциями от x. Однако, так как мы умеем решать лишь уравнения с постоянными коэффициентами, то и излагаемый метод практически мы сможем применять только к таким уравнениям.

Пусть уравнение без правой части, соответствующее уравнению (2.33)

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{2.34}$$

имеет общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения (2.33) в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{2.35}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению, а y_1 и y_2 — известные частные решения уравнения без правой части (2.34). Будем в дальнейшем для краткости вместо $C_1(x)$ и $C_2(x)$ писать просто C_1 и C_2, помня, что они являются функциями от x. Поскольку определению подлежат две функции C_1 и C_2, то одним соотношением между ними мы можем распорядиться по произволу. Продифференцируем равенство (2.35):

$$y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'.$$

[1]Этот метод принадлежит Лагранжу.

Оказывается, что наиболее целесообразно подчинить C_1 и C_2 такому условию, чтобы выражение для y' имело тот же самый вид, что и при постоянных C_1 и C_2.

Для этого положим

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0. \tag{2.36}$$

Тогда

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Продифференцируем еще раз:

$$y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''.$$

Подставим y, y', y'' в левую часть уравнения (2.33):

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + a_1C_1y_1' + a_1C_2y_2' + a_2C_1y_1 + a_2C_2y_2 =$$
$$= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) = f(x).$$

Выражение в обеих скобках равны нулю, так как y_1 и y_2 являются решениями уравнения без правой части (2.34). Значит, чтобы функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ была решением уравнения (2.33), помимо условия (2.36) должно еще соблюдаться условие

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \tag{2.37}$$

Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы, как мы уже отмечали в нуль не обращается:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

и поэтому мы можем сначала найти C_1' и C_2', а затем интегрированием и сами функции C_1 и C_2. Если при интегрировании производных C_1' и C_2' ввести произвольные постоянные, то мы сразу получим общее решение неоднородного уравнения.

Пример 2.19. Решим уравнение

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Однородному уравнению $y'' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$. Его корни $r = \pm i$. Поэтому $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$.

Запишем решение данного уравнения в виде

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

и составим систему уравнений для отыскания C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} C_1' \cos x + C_2' \sin x &= 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2' = \sin x.$$

Интегрирование дает

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1$$

(см. формулу 69 таблицы интегралов),

$$C_2 = \int \sin x\, dx = -\cos x + k_2,$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Теперь запишем общее решение заданного уравнения:

$$\begin{aligned} y &= \left[\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1\right] \cos x + [-\cos x + k_2] \sin x = \\ &= k_1 \cos x + k_2 \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

п. 6. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Изложенная в предыдущих пунктах теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка легко переносится на линейные уравнения n-го порядка ($n > 2$).

Линейное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.38}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — функции независимой переменной x или постоянные величины.

Так же как и раньше, наряду с данным неоднородным уравнением всегда будем рассматривать соответствующее ему однородное уравнение (без правой части)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{2.39}$$

Чтобы сформулировать основную теорему о структуре общего решения такого уравнения, введем понятие линейной независимости системы функций.

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определенных в одном и том же интервале. Напомним, что линейной комбинацией этих функций мы условились называть выражение

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные величины.

Определение 2.11. *Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называется линейно независимой, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.*

Это означает, например, что не может быть равенства

$$\varphi_1(x) = k_2\varphi_2(x) + \ldots + k_n\varphi_n(x),$$

где $k_2, \ldots, k_n$ — постоянные величины.

Отсюда следует, что ни одна из линейно независимых функций не может тождественно равняться нулю. Если, например, было бы $\varphi_1(x) \equiv 0$, то указанное равенство выполнялось бы при $k_2 = \ldots = k_n = 0$.

В частности, две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не есть константа: $\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \neq \text{const}$.

Система функций, не являющаяся линейно независимой, называется *линейной зависимой.* Например, линейно зависимой будет система

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \varphi_3(x) = x^3, \quad \varphi_4(x) = 2x - x^2.$$

Действительно, функция $\varphi_4(x)$ является линейной комбинацией остальных:

$$\varphi_4(x) = 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

(При этом вовсе не обязательно, чтобы $\varphi_n(x)$ выражалось через все остальные функции.)

Сформулируем теперь теорему о структуре общего решения уравнения (2.39).

Теорема 2.3. *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть n частных линейно независимых решений уравнения (2.39), то общим решением этого уравнения является их линейная комбинация*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n. \tag{2.40}$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и для уравнений второго порядка, и мы рекомендуем читателю провести его самостоятельно.

Если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то по крайней мере одно из них линейно выразится через остальные $n - 1$ и функция (2.40) будет фактически зависеть не от n, а от меньшего числа произвольных постоянных. Она не будет доставлять общего решения.

Существует простое условие линейной независимости частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Именно, этим условием служит неравенство нулю так называемого определителя Вронского (или вронскиана), составленного из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их производных:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Знак неравенства означает, что определитель не может равняться нулю ни при каком значении x. Доказательство этого условия мы не приводим.

О линейно независимых решениях линейного уравнения n-го порядка говорят еще, что они образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение линейного уравнения n-го порядка с правой частью (2.38) слагается из общего решения соответствующего ему уравнения без правой части (2.39) и какого-либо частного решения самого уравнения. Доказательство этого проводится точно так же, как и для уравнений второго порядка.

Метод вариации произвольных постоянных употребляется и в случае линейных уравнений любого порядка n. Для его применения нужно только знать фундаментальную систему решений соответствующего уравнения без правой части.

Рекомендуем читателю самостоятельно придти к следующему выводу.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

то решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

является функция

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — функции независимой переменной, производные которых $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ удовлетворяют следующей системе n линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

(Первые $(n-1)$ уравнений этой системы выбираются по нашему произволу с таким расчетом, чтобы производные до $(n-1)$ порядка включительно от функции $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0$ имели тот же самый вид, что и при постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Если мы теперь найдем n-ую производную и подставим выражения всех производных в данное уравнение, то мы получим последнее уравнение системы.)

Чтобы лучше запомнить систему уравнений для отыскания C_1', C_2', ..., C_n', заметим, что определитель этой системы есть как раз определитель Вронского (отсюда следует, что эта система имеет единственное решение), а правые части уравнений все, кроме последней, равны нулю. В последнем уравнении правая часть равна $f(x)$ — правой части данного неоднородного уравнения.

п. 7. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами любого порядка производится совершенно аналогично решению уравнений второго порядка. Мы ограничимся поэтому только самыми краткими указаниями. Начнем с уравнения n-го порядка без правой части

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — действительные постоянные.

Характеристическим уравнением для него называется уравнение n-й степени

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Имеется место следующее предложение, обобщающее для любого порядка n предложение, полученное нами для $n = 2$:

1) Каждому k-кратному действительному корню r характеристического уравнения соответствует k частных решений вида

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{rx}.$$

2) Каждой паре t-кратных комплексно сопряженных корней $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, характеристического уравнения соответствует $2t$ частных решений вида

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad xe^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \ldots, \quad x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \ldots, \quad x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Общая сумма кратностей всех корней должна равняться степени характеристического уравнения n; поэтому число всех частных решений будет в точности совпадать с порядком уравнения.

Доказательство того, что указанные частные решения линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему решений, мы не приводим.

Чтобы найти общее решение заданного уравнения, нужно взять линейную комбинацию указанных частных решений.

Пример 2.20. $y^{(V)} + y^{(IV)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0,$$

как легко заметить, имеет корень $r = -1$; после деления на $r + 1$ уравнение принимает вид

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0,$$

т. е.

$$(r^2 + 1)^2 = 0.$$

Значит, имеем $r_1 = -1$, $r_2 = r_3 = i$, $r_4 = r_5 = -i$. Поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения запишется так:

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

Отыскание частного решения уравнения с правой частью

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{mx}[P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx],$$

производится по тем же правилам, что и для уравнений с правой частью второго порядка.

Оказывается, что уравнение имеет частное решение вида

$$y = x^k e^{mx}[R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx],$$

где $R_1(x)$, $R_2(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, а k — кратность, с которой $m \pm ni$ входят в число корней характеристического уравнения. Если $m \pm ni$ не являются корнями характеристического уравнения, то k принимают равным нулю. Если правая часть уравнения $f(x)$ не является функцией указанного вида, то следует применить метод вариации произвольных постоянных.

Глава 3. Ряды

§ 3.1. Числовые ряды

п. 1. Определение ряда.

Определение 3.1. *Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, соединенных знаком сложения:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.1}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а член a_n — общим или n-м членом ряда.

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad \ldots; \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Такие суммы называются частичными суммами ряда (3.1). Очевидно, что они образуют бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Определение 3.2. *Ряд (3.1) называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

В противном случае ряд называется расходящимся.

Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда. Символически это записывают так:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример 3.1. Исследовать сходимость геометрического ряда, т. е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Частичная сумма S_n этого ряда при $q \neq 1$ имеет вид

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Отсюда:

1) если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, т. е. ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{1-q}$;

2) если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \infty$, т. е. ряд расходится;

3) при $q = 1$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, т. е. ряд расходится.

4) при $q = -1$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ и $S_n = 0$ при n четном и $S_n = 1$ при n нечетном, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, и ряд расходится.

Таким образом, геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится к сумме $S = \frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

п. 2. Простейшие свойства рядов.

1°. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ запишется в виде

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n \pm \sigma_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится и его сумма равна $S \pm \sigma$. $\square$

2°. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ расходится.

Доказательство. Предположим (от противного), что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ сходится. Тогда справедливо представление

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, а ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся. Мы получили противоречие свойству 1°, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ расходится. $\square$

3°. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $c \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ca_k$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тогда $\sigma_n = cS_n$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = cS$, где S — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится и его сумма равна cS. $\square$

4°. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A), то сходится и ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ (A_k), и обратном, если сходится ряд (A_k), то сходится и ряд (A).

Другими словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Доказательство. Обозначим через $S_k = \sum\limits_{\ell=1}^{k} a_\ell$ сумму отброшенных членов рядов (A), а через $\sigma_n^{(k)} = \sum\limits_{\ell=k+1}^{k+n} a_\ell$ n-ю частичную сумму ряда (A_k). Тогда $(n + k)$-я частичная сумма ряда (A) запишется в виде

$$S_{n+k} = \sum_{\ell=1}^{n+k} a_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell + \sum_{\ell=k+1}^{n+k} a_\ell = S_k + \sigma_n^{(k)}. \tag{3.2}$$

1) Предположим, что ряд (А) сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+k} = S$, где k — фиксированное число. Из равенства (3.2) следует

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+k} - S_k) = \lim_{n\to\infty} S_{n+k} - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k,$$

т. е. ряд (A_k) сходится.

2) Пусть теперь ряд (A_k) сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^{(k)} = \sigma$. Тогда из (3.2) следует

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+k} = \lim_{n\to\infty} (S_k + \sigma_n^{(k)}) = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(k)} = S_k + \sigma,$$

что и означает сходимость ряда (А).

□

Ряд (A_k), полученный из ряда (А) отбрасыванием его первых k членов, называется k-м остатком ряда (А).

п. 3. Необходимое условие сходимости.

Теорема 3.1 (критерий Коши сходимости числового ряда). *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N, зависящий от ε, такой, что для всех $n > N$ и всех целых $p \geqslant 1$ было выполнено неравенство*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Это утверждение сразу следует из критерия Коши существования конечного предела последовательности, примененного к последовательности частичных сумм S_n данного ряда, т. к.
$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$. □

Теорема 3.2 (необходимое условие сходимости). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, зависящий от ε, такой, что для всех $n > N$ и всех целых $p \geqslant 1$ выполняется неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Возьмем $p = 1$. Тогда для всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_{n+1}| < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$. □

Пример 3.2. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{3.3}$$

называемый гармоническим, и докажем, что он расходится. При любом натуральном n имеем

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}}=\frac{1}{2}$$

Поэтому, если $0<\varepsilon<1/2$, то для ряда (3.3) нельзя подобрать номера N, указанного в критерии Коши, т. к. при любом $n=1,2,\ldots$ и $p=n$ не выполняется условие

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|=\left|\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится. Отметим, что общий член гармонического ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n=0$.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, являясь необходимым условием сходимости ряда, не является достаточным для этого.

Если же необходимое условие сходимости не выполняется, то ряд расходится.

Пример 3.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n+3}{5n-4}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+3}{5n-4}=\dfrac{4}{5}\neq 0$, т. е. необходимое условие сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

п. 4. Признаки сравнения положительных рядов.

Определение 3.3. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется положительным, если для всех натуральных n выполнено неравенство $a_n \geqslant 0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется строго положительным, если $a_n>0$, $n=1,2,\ldots$*

Теорема 3.3 (критерий сходимости положительных рядов). *Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — положительный ряд ($a_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$) и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ его частичная сумма. Тогда

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n,$$

т. е. последовательность S_n монотонно возрастает.

По теореме о пределе монотонной последовательности конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда эта последовательность ограничена сверху. Согласно определению сходящегося ряда, данное условие равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Теорема 3.4 (первый признак сравнения). *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — положительные ряды и существует номер N_0 такой, что для всех $n > N_0$ выполнено неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда 1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Доказательство. Поскольку поведение конечного числа членов ряда не влияет на характер его сходимости будем считать, что неравенство $a_n \leqslant b_n$ выполнено для всех n.

Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Из неравенства $a_n \leqslant b_n$ следует, что

$$S_n \leqslant \sigma_n. \tag{3.4}$$

1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по теореме 3.3 последовательность его частичных сумм ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех n выполнено неравенство $\sigma_n \leqslant M$. Но тогда из неравенства (3.4) и $S_n \leqslant M$, откуда по той же теореме 3.3 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, т. к., допустив сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получим по только что доказанному сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а это противоречит условию теоремы.

$\square$

Пример 3.4. Исследовать на сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Очевидно, что $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ для всех $n > 1$. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ сходится. Найдем частичную сумму

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} = \\ &= \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, т. е. ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ сходится. Следовательно, по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Теорема 3.5 (второй признак сравнения). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — положительный ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — строго положительный ряд и существует конечный ненулевой предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$ $(0 < K < \infty)$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. 1. Из того, что K является пределом последовательности $\frac{a_n}{b_n}$ при $n \to \infty$ следует существование такого номера N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$\frac{a_n}{b_n} < K + 1 \quad \text{или} \quad a_n < (K+1)b_n.$$

Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. По свойству 3° числовых рядов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+1)b_n$ также сходится. Следовательно, в силу первого признака сравнения ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Поскольку $K > 0$, существует такое число K_1, что $0 < K_1 < K$. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$ следует существование такого номера N_1, что для всех $n > N_1$ справедливо неравенство

$$\frac{a_n}{b_n} > K_1 \quad \text{или} \quad a_n > K_1 b_n.$$

Отсюда в силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K_1 b_n$ следует по первому признаку сравнения расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Отметим эталонные ряды, часто используемые для сравнения:

1) геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ — сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \geqslant 1$, расходится при $|q| \geqslant 1$;

2) гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ — расходится.

3) ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Второй признак сравнения обычно используют для исследования сходимости рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{P_\ell(n)}{Q_k(n)}$, где $P_\ell(n)$, $Q_k(n)$ — многочлены степени ℓ и k соответственно. При этом в качестве ряда сравнения выбирают ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha = k - \ell$.

Пример 3.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+5}{n^3+3n}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ ($k = 3$, $\ell = 1$, $\alpha = 3 - 1 = 2$). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(2n+5)}{n^3+3n} = 2 \neq 0$, то данный ряд, так же как и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, сходится.

Рассмотрим еще один признак сравнения, который имеет вспомогательный характер.

Теорема 3.6 (третий признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — *строго положительные ряды и существует такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *выполнено неравенство* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда 1) из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *2) из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. В силу того, что поведение конечного числа членов ряда не влияет на характер его сходимости можно считать, что неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ верно для всех $n \geqslant 1$. Записывая это неравенство для $n = 1, 2, \ldots, k$ и перемножая левые и правые части полученной цепочки неравенств, имеем

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}; \quad \ldots; \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

$$\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Таким образом, для всех $k \in N$ справедливо неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}$ или $a_{k+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_{k+1}$.

1) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то по свойству 3° числовых рядов ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_k$ также сходится, и следовательно, в силу первого признака сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2) Если же ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то в силу того же признака ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_k$, а следовательно, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходятся. □

п. 5. Признаки сходимости положительных рядов.

Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно судить о сходмости (или расходимости) данного ряда, не сравнивая его с другими рядом. Рассмотрим три из них.

Рассмотрим еще один признак сравнения, который имеет вспомогательный характер.

Теорема 3.6 (третий признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — *строго положительные ряды и существует такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *выполнено неравенство* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда 1) из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *2) из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. В силу того, что поведение конечного числа членов ряда не влияет на характер его сходимости можно считать, что неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ верно для всех $n \geqslant 1$. Записывая это неравенство для $n = 1, 2, \ldots, k$ и перемножая левые и правые части полученной цепочки неравенств, имеем

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}; \quad \ldots; \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

$$\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\ldots\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\ldots\frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Таким образом, для всех $k \in N$ справедливо неравенство $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$ или $a_{k+1} \leqslant \dfrac{a_1}{b_1} b_{k+1}$.

1) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то по свойству 3° числовых рядов ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_1}{b_1} b_k$ также сходится, и следовательно, в силу первого признака сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2) Если же ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то в силу того же признака ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_1}{b_1} b_k$, а следовательно, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходятся. □

п. 5. Признаки сходимости положительных рядов.

Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно судить о сходмости (или расходимости) данного ряда, не сравнивая его с другими рядом. Рассмотрим три из них.

Теорема 3.7 (признак Даламбера). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— строго положительный ряд и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$*. Тогда 1) если* $D < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится; 2) если* $D > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится; 3) если* $D = 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Из определения предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon$ или $D - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$.

1) Пусть $D < 1$. Выберем ε настолько малым, что число $q = D + \varepsilon < 1$, т. е. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$ или $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$.

Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, т. к. $q < 1$. Следовательно, по третьему признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть $D > 1$. Возьмем ε настолько малым, что $q = D - \varepsilon > 1$, т. е. $q < \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ или $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} < \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ расходится, т. к. $q > 1$. Следовательно, по третьему признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3) Рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ и сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Покажем, что для этих рядов $D = 1$.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

□

Пример 3.6. Исследовать сходимость рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{(2n)!}$.

Решение. а) Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд сходится.

б) Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!} : \frac{3^n\cdot n!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n!} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)n!} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд сходится.

Теорема 3.8 (признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— положительный ряд и* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда 1) если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится; 2) если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится; 3) если* $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Из определения предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$ или $q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$.

1) Пусть $q < 1$. Выберем ε настолько малым, что число $q_1 = q + \varepsilon < 1$, т. е. $\sqrt[n]{a_n} < q_1$ или $a_n < q_1^n$.

Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_1^n$ сходится, т. к. $q_1 < 1$. Следовательно, по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть $q > 1$. Возьмем ε настолько малым, что $q - \varepsilon > 1$. Тогда из неравенства $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon$ следует, что $\sqrt[n]{a_n} > 1$ или $a_n > 1$. Это означает, что члены ряда больше 1, начиная с номера $N + 1$. Поэтому предел общего члена ряда $\neq 0$, т. е. не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд расходится.

3) Покажем, что $q = 1$ для расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}} = 1.$$

□

Пример 3.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 < 1$, то по признаку Коши ряд сходится.

Теорема 3.9 (интегральный признак сходимости). *Если функция $f(x)$ неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geqslant 1$, то для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходился необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Доказательство. Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx$ и пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{2} f(x)\,dx + \int\limits_2^{3} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$$

его частичная сумма.

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx$ означает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$. В силу монотонности функции $fx)$ на любом отрезке $[n, n+1]$ выполнено неравенство

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1). \tag{3.5}$$

Интегрируя неравенство (3.5) на отрезке $[n, n+1]$, получим

$$\int\limits_n^{n+1} f(n)\,dx \geqslant \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_n^{n+1} f(n+1)\,dx,$$

откуда

$$f(n) \geqslant \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geqslant f(n+1). \tag{3.6}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то по первому признаку сравнения должен сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx$, а значит и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$. Обратно, если сходится $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx$, то согласно тому же признаку сравнения будет сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1)$, а следовательно, и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. □

Пример 3.8. Исследовать сходимость ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Функция $f(x)$ при $x > 0$ положительная и невозрастающая. Поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$. Известно, что данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Следовательно, таким же свойством обладает и исходный ряд.

п. 6. Знакочередующиеся ряды.

Определение 3.4. *Знакочередующимся рядом называется ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n + \ldots,$$

где $C_n > 0$.

Теорема 3.10 (признак Лейбница). *Если последовательность* $\{C_n\}$ *убывает и стремится к нулю, т. е.* $C_1 \geqslant C_2 \geqslant C_3 \geqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа членов ряда

$$S_{2n} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + C_{2n-1} - C_{2n}.$$

Эта последовательность возрастающая, т. к. $S_{2n+2} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + C_{2n-1} - C_{2n} + C_{2n+1} - C_{2n-2} = S_{2n} + C_{2n+1} - C_{2n+2} \geqslant S_{2n}$ $(C_{2n+1} - C_{2n+2} \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, последовательность S_{2n} ограничена сверху

$$S_{2n} = C_1 - (C_2 - C_3) - (C_4 - C_5) - \ldots - (C_{2n-2} - C_{2n-1}) - C_{2n} \leqslant C_1$$

$$(C_k - C_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad C_{2n} \geqslant 0).$$

Следовательно, по теореме о пределе монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм нечетного числа членов S_{2n+1}. Очевидно, что $S_{2n+1} = S_{2n} + C_{2n+1}$. Поэтому, в силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Итак, при любом n (четном или нечетном) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т. е. ряд сходится. □

Пример 3.9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница: 1) $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \ldots$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

п. 7. Абсолютная и условная сходимость.

Определение 3.5. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 3.11. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Тогда из критерия Коши сходимости числового ряда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ и всех целых $p \geqslant 1$ выполняется неравенство $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. По свойству абсолютных величин имеем

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа членов ряда

$$S_{2n} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + C_{2n-1} - C_{2n}.$$

Эта последовательность возрастающая, т. к. $S_{2n+2} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + C_{2n-1} - C_{2n} + C_{2n+1} - C_{2n-2} = S_{2n} + C_{2n+1} - C_{2n+2} \geqslant S_{2n}$ $(C_{2n+1} - C_{2n+2} \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, последовательность S_{2n} ограничена сверху

$$S_{2n} = C_1 - (C_2 - C_3) - (C_4 - C_5) - \ldots - (C_{2n-2} - C_{2n-1}) - C_{2n} \leqslant C_1$$

$$(C_k - C_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad C_{2n} \geqslant 0).$$

Следовательно, по теореме о пределе монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм нечетного числа членов S_{2n+1}. Очевидно, что $S_{2n+1} = S_{2n} + C_{2n+1}$. Поэтому, в силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Итак, при любом n (четном или нечетном) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т. е. ряд сходится. $\square$

Пример 3.9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница: 1) $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \ldots$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

п. 7. Абсолютная и условная сходимость.

Определение 3.5. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 3.11. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Тогда из критерия Коши сходимости числового ряда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ и всех целых $p \geqslant 1$ выполняется неравенство $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. По свойству абсолютных величин имеем

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу того же критерия Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. $\square$

Замечание. *Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *может расходиться, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходиться. Например, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *сходится по признаку Лейбница, а ряд из абсолютных величин его членов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *(гармонический ряд) расходится.*

Поэтому введем следующее определение.

Определение 3.6. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется условно сходящимся.*

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ условно сходящийся.

Пример 3.10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Он сходится как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, при $\alpha = 2 > 1$. Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно.

Грубо говоря, различие между абсолютно и условно сходящимися рядами заключается в следующем: абсолютно сходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно сходящиеся — в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов существенно отличаются. Абсолютно сходящиеся ряды по своим свойствам напоминают конечные суммы, их можно складывать, перемножать, переставлять местами члены ряда.

Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают. Можно показать (теорема Римана), что от перестановки членов условно сходящегося ряда, можно получить ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

§ 3.2. Функциональные ряды

п. 1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Определение 3.7. *Пусть на некотором множестве X задана последовательность функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Говорят, что $f_n(x)$ сходится поточечно на X, если в каждой точке $x \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x)\}$.*

Если последовательность $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится на множестве X, то функция $f(x)$, определенная при каждом $x \in X$ равенством $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, называется пределом последовательности $f_n(x)$.

Определение 3.8. *Пусть на множестве X задана последовательность функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Множество всех числовых рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{3.7}$$

в каждом из которых точка $x \in X$ произвольно фиксированна, называется функциональным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X, а функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — его членами.

Аналогично случаю числовых рядов сумма

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X$$

называется частичной суммой ряда (3.7).

Определение 3.9. *Ряд (3.7) называется сходящимся на множестве X, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится на этом множестве. При этом предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, $x \in X$, называется суммой ряда. В этом случае говорят, что функция $S(x)$ раскладывается в ряд и пишут $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Множество X называют областью сходимости ряда (3.7).*

При нахождении области сходимости функционального ряда часто используют признаки сходимости числовых рядов и эталонные ряды.

Пример 3.11. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Решение. При фиксированных x данный ряд является рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится при $x=\alpha>1$. Таким образом, область сходимости исходного ряда — множество $\{x:\ x>1\}$.

п. 2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Определение 3.10. *Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется равномерно сходящейся к функции f на множестве X, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех точек $x\in X$ и всех $n>N$ выполняется неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.*

Очевидно, что если последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, то эта последовательность сходится к функции $f(x)$ на рассматриваемом множестве.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится (равномерно сходится) к функции $f(x)$, то пишут $f_n \underset{X}{\to} f$ $(f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f)$.

Используя логические символы, определения сходящейся и равномерно сходящйеся последовательности можно записать в виде

$$f_n \underset{X}{\to} f \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \forall x\in X\ \exists N=N(\varepsilon,x):\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad \forall n>N$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad \forall n>N\ \forall x\in X.$$

Таким образом, если последовательность $\{f_n(x)\}$ только просто сходится к функции f на множестве X, то для каждой точки $x\in X$ существует, вообще говоря, свой номер $N=N(\varepsilon,x)$, для которого при $n>N$ выполняется неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, и может оказаться, что для всех точек $x\in X$ невозможно подобрать общий номер N, обладающий указанным свойством.

Равномерная же сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ означает, что, какое бы число $\varepsilon>0$ ни задать, можно подобрать такой номер N, что в любой точке $x\in X$ значение функции f_n будет отличаться от значения функции f меньше чем на ε (рис. 1).

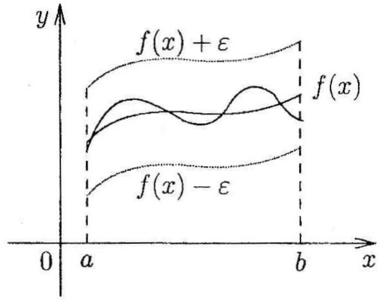


Рис. 1

Определение 3.11. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, *называется равномерно сходящимся на множестве* X, *если на* X *равномерно сходится последовательность его частичных сумм.*

Таким образом, если

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

то равномерная сходимость рассматриваемого ряда означает, что $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$к

Очевидно, что равномерно сходящийся на некотором множестве ряд сходится на этом множестве.

Теорема 3.12 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X,*то последовательность его членов равномерно стремится к нулю на этом множестве.*

(без доказательства)

Теорема 3.13 (признак Вейерштрасса). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $a_n \geqslant 0$, *сходится и для всех* $x \in X$ *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство* $|u_n(x)| \leqslant a_n$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *абсолютно и равномерно сходится на множестве* X.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ называют мажорирующим рядом или мажорантой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

п. 3. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 3.14 (о непрерывности суммы). *Если функции* $u_n(x)$ *непрерывны в точке* $x_0 \in X$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* X, *то его сумма* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *также непрерывна в точке* x_0.

Теорема 3.15 (об интегрируемости суммы). *Пусть* $u_n(x)$ *интегрируемы на* $[a, b]$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда существует*

$$\int\limits_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\, dx. \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) означает, что в условиях теоремы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать.

Теорема 3.16 (о дифференцируемости суммы). *Пусть функции* $u_n(x)$ *дифференцируемы на множестве* X, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится на* X *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *равномерно сходится на* X. *Тогда существует производная суммы* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Таким образом, в условиях теоремы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

п. 4. Степенные ряды.

Определение 3.12. *Ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{3.9}$$

называется степенным рядом.

Структура области сходимости степенного ряда устанавливается с помощью первой теоремы Абеля.

Теорема 3.17 (первая теорема Абеля). *1) Если степенной ряд сходится при $x = x_0 \neq 0$, то при любом x таком, что $|x| < |x_0|$, ряд сходится абсолютно; 2) Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то в любой точке x такой, что $|x| > |x_1|$, он также расходится.*

Доказательство. 1) Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, и потому существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|a_n x_0^n| < M. \tag{3.10}$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (3.9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$, который представим в виде

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

В силу неравенства (3.10) члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

который является геометрическим рядом и сходится, когда его знаменатель $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$, т. е. $|x| < |x_0|$. Следовательно, на основании первого признака сравнения числовых рядов, ряд (3.9) сходится при $|x| < |x_0|$.

2) По условию ряд (3.9) расходится при $x = x_1$. Покажем, что он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$. Предположим противное, т. е. при $|x| > |x_1|$ ряд (3.9) сходится. Тогда по доказанному выше он должен сходиться и в точке x_1, что противоречит условию. Таким образом, для всех x таких, что $|x| > |x_1|$, ряд (3.9) расходится. □

Замечание. *Из теоремы Абеля следует, что существует такое число $R \geqslant 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится.*

Число R называют радиусом сходимости, а интервал $(-R, R)$ — интервалом сходимости степенного ряда.

На концах интервала сходимости, т. е. при $x = -R$ и $x = R$, ряд может как сходиться, так и расходиться (рис. 2).

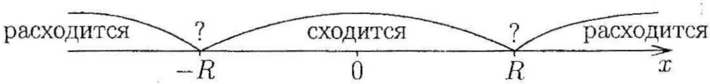


Рис. 2

Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда (3.9) через его коэффициенты. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. По признаку Даламбера ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

т. е. $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Если этот предел существует, то он и является радиусом сходимости ряда (3.9), т. е.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3.11}$$

Замечание. *Следует отметить, что если* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, *то ряд (3.9) сходится на всей числовой прямой* ($R = \infty$), *а если* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, *то ряд сходится только при* $x = 0$ ($R = 0$).

Пример 3.12. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{(2n+1)^2}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле (3.11).

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)^2} : \frac{2^{n+1}}{[2(n+1)+1]^2}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2},$$

т. е. интервал сходимости ряда $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Теперь исследуем сходимость ряда в граничных точках. При $x = -1/2$ данный степенной ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Этот ряд сходится абсолютно, т. к. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ сходится (его можно сравнить со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, используя второй признак сравнения).

При $x = 1/2$ получаем положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, который сходится.

Итак область сходимости данного ряда $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Пример 3.13. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение. Радиус сходимости ряда по (3.11)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

т. е. область сходимости ряда $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3.14. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Решение. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } |x| \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, область сходимости ряда состоит из одной точки $x = 0$.

Ранее было показано, что для почленного интегрирования и дифференцирования функциональных, а значит и степенных рядов, необходима их равномерная сходимость. Условия равномерной сходимости степенных рядов устанавливает вторая теорема Абеля, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 3.18 (вторая теорема Абеля). *Если R — радиус сходимости степенного ряда и этот ряд сходится при $x = R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, R]$ действительной оси.*

п. 5. Разложение функций в степенные ряды.

Теорема 3.19 (необходимое условие). *Если функция $f(x)$ раскладывается в интервале $|x| < R$ ($R < 0$ или $R = +\infty$) в степенной ряд, т. е. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ для всех x таких, что $|x| < R$, $f(x)$ бесконечно дифференцируема в этом интервале. В частности существует $f^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$*

Утверждение теоремы непосредственно следует из второй теоремы Абеля и теоремы о дифференцировании суммы функционального ряда.

Теорема 3.20 (единственность разложения). *Если функция $f(x)$ раскладывается в интервале $|x| < R$ в степенной ряд, то это разложение единственно и имеет вид*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{3.12}$$

Доказательство. По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(-R, R)$ и функция $f(x)$ — его сумма. Следовательно, согласно теореме о дифференцировании суммы функционального ряда, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно дифференцировать на интервале $(-R, R)$ любое число раз. Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \\
f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 x + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots \\
f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 a_2 x + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \ldots \\
\ldots & \quad \ldots \\
f^{(n)}(x) &= n! a_n + \ldots
\end{aligned}$$

Полагая в полученных равенствах $x = 0$ и учитывая, что $f(0) = a_0$, получаем

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{3.13}$$

Таким образом, все коэффициенты ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ определяются единственным образом формулами (3.13). □

Определение 3.13. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *называют рядом Тейлора (Маклорена) для функции* $f(x)$.

Выясним условия при которых функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора. Покажем, что условие бесконечной дифференцируемости $f(x)$ не является достаточным.

Пример 3.15. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема для всех $x \neq 0$. Проверим дифференцируемость в точке $x = 0$. По определению производной имеем

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \overset{\text{замена}}{\left| y = \frac{1}{x} \right|} =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2y \cdot e^{y^2}} = 0.$$

Аналогично $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}}{x} = 0$ и т. д.

Таким образом, если бы $f(x)$ раскладывалась в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, то $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k = 0$, что противоречит тому, что $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$ при $x \neq 0$.

Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некотором интервале $|x| < R$. Представим ее по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора для $f(x)$.

Теорема 3.21 (необходимое и достаточное условие). *Для того чтобы $f(x)$ раскладывалась на интервале $|x| < R$ в ряд Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n=0}^{\infty} R_n(x) = 0$ для всех x таких, что $|x| < R$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $f(x)$ раскладывается на интервале $|x| < R$ в ряд Тейлора, т. е. $f(x) = \sum\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ при $|x| < R$.

Тогда частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \to f(x)$ при $n \to \infty$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] = 0.$

2. Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R, R)$. Из формулы Тейлора следует, что $R_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ и следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$. Таким образом, ряд Тейлора (3.12) сходится и его сумма равна $f(x)$.

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

2) $\sin x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

3) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots$ для всех $x \in (-1, 1]$.

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$ для всех $x \in (-1, 1)$.

$\square$

п. 6. Ортогональные и ортонормированные системы.

Определение 3.14. *Последовательность интегрируемых на $[a, b]$ функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ называется ортогональной, если выполнены следующие условия*

1) $\int\limits_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x)\, dx = 0$ *при* $n \neq m$, *2)* $\varphi_n(x) \int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,dx > 0$ *для всех* $n \geqslant 1$.

Последовательность называется ортонормированной на $[a,b]$, *если второе условие имеет вид*

$$\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1 \quad \text{для всех } n \geqslant 1.$$

Пример 3.16. Тригонометрическая система 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$, ... ортогональна на $[-\pi,\pi]$.

Действительно, например,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\,dx =$$

$$= \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq m;$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \pi + \frac{\sin 2nx}{4n}\Big|_{\pi}^{\pi} = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично доказывается, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\,dx = 0$, $m \neq n$;

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots; \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx = 0, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

Определение 3.15. *Ряд вида* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ *называется тригонометрическим на* $[-\pi,\pi]$.

п. 7. Ряд Фурье. Аналогично степенному ряду, для тригонометрического ряда имеет место следующая теорема.

Теорема 3.22. *Если $f(x)$ раскладывается на $[-\pi, \pi]$ в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то коэффициенты ряда вычисляются по формулам*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx]. \tag{3.15}$$

Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (3.15), равномерно сходится, то его можно почленно интегрировать на отрезке $[-\pi, \pi]$. Проинтегрировав обе части равенства (3.15), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \pi a_0.$$

Отсюда сразу следует первая из формул (3.13).

Для доказательства оставшихся формул (3.13) достаточно умножить обе части равенства (3.15) на $\cos mx$ или на $\sin mx$ и проинтегрировать обе части получившихся равенств. Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx\cos mx +\right.$$

$$\left.+ b_n\sin nx\cos mx\right]dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \pi a_m.$$

Мы здесь использовали ортогональность функций $\cos nx$, $\sin nx$.

Отсюда $a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$, $m = 1, 2, \ldots$

Аналогично $b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$, $m = 1, 2, \ldots$ □

Определение 3.16. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то тригонометрический ряд $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коэффициенты которого заданы формулами (3.13), называется рядом Фурье функции $f(x)$. При этом пишут*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

п. 8. Сходимость ряда Фурье. Рассмотрим условия, которые следует наложить на $f(x)$, чтобы ее ряд Фурье сходился на $[-\pi, \pi]$.

Определение 3.17. *Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода (рис. 3).*

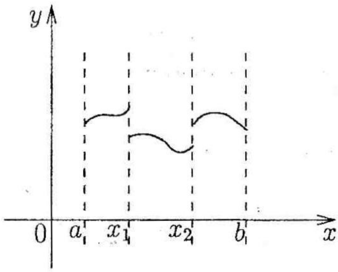


Рис. 3

Определение 3.18. *Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если ее производная кусочно-непрерывна на $[a, b]$.*

Теорема 3.23 (достаточное условие сходимости ряда Фурье). *Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ее ряд Фурье сходится на $[-\pi, \pi]$ абсолютно и равномерно.*

(без доказательства)

Введем понятие периодического продолжения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Определение 3.19. *Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда функция $F(x)$, определенная на всей числовой оси и периодическая с периодом 2π, называется периодическим продолжением $f(x)$, если $F(x) = f(x)$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$ (рис. 4).*

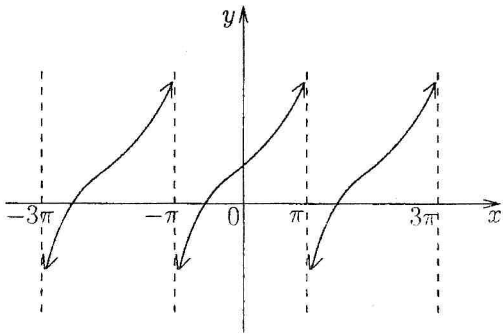


Рис. 4

Заметим, что коэффициенты ряда Фурье для $f(x)$ и $F(x)$ совпадают, т. к. изменение значений функции в конечном числе точек не влияет на интеграл.

Следующая теорема устанавливает условия при которых ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, а точнее к ее 2π-периодическому продолжению.

Теорема 3.24. *Пусть $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ее ряд Фурье сходится в каждой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ к значению $\dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.*

Следствие. *Если $f(x)$ непрерывная 2π-периодическая функция, то всюду на числовой оси она представляется равномерно-сходящимся рядом Фурье.*

п. 9. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является четной, т. е. $f(-x) = f(x)$.

Тогда ее коэффициенты Фурье b_n равны нулю. Действительно,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right].$$

Сделаем замену переменной $x = -t$ в первом интеграле в квадратных скобках. Тогда $dx = -dt$; если $x = -\pi$, то $t = \pi$; если $x = 0$, то $t = 0$. Учитывая четность функции $f(x)$ и нечетность функции $\sin x$, получаем

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin n(-t)\,dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Следовательно,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] = 0.$$

Аналогично, учитывая четность функций $f(x)$ и $\cos x$, получаем следующие выражения для коэффициентов a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Таким образом, разложение в ряд Фурье четной функции содержит только косинусы.

Аналогично можно показать, что если $f(x)$ нечетная функция, то коэффициенты ее ряда Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{3.17}$$

а сам ряд содержит только синусы.

Пример 3.17. Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Так как она нечетная, то ее коэффициенты находятся по формулам (3.17). Имеем

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\pi\cdot\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \cdot (-1)^{n+1}.$$

Это равенство справедливо для любого $x \in (-\pi, \pi)$. В точках $x = \pm\pi$ сумма ряда Фурье по теореме 3.24 равна $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \dfrac{-\pi+\pi}{2} = 0$, т. е. не совпадает со значением $f(x) = x$. Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда является периодическим продолжением функции $f(x) = x$ (рис. 5).

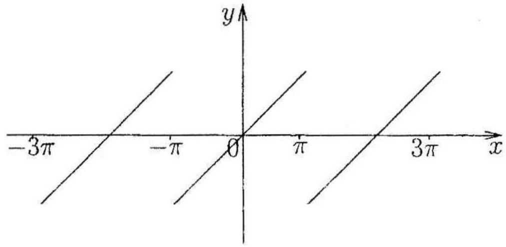


Рис. 5

Пример 3.18. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Так как она четная, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (3.15). Имеем

$$b_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx\right] = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Это равенство справедливо для любого $x \in [-\pi, \pi]$.

п. 10. Разложение функции в ряд Фурье на отрезке $[-\ell, \ell]$. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\ell, \ell]$ (ℓ — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы 3.24. Разложим ее в ряд Фурье.

Введем новую переменную t по формуле $x = \dfrac{\ell t}{\pi}$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) = f(x)$.

Очевидно, функция $\varphi(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на нем условиям теоремы 3.24.

Разложим функцию $\varphi(t)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt; \tag{3.18}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt.$$

Вернемся к старой переменной x: $x = \dfrac{\ell}{\pi}t, \quad t = x\dfrac{\pi}{\ell}, \quad dt = \dfrac{\pi}{\ell}\,dx$. Тогда формула (3.18) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx; \tag{3.19}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Глава 4. Операционное исчисление

§ 4.1. Основные понятия и определения преобразования Лапласа

п. 1. Оригинал и изображение. В операционном исчислении каждой функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие некоторая другая функция $F(p)$ комплексного аргумента $p = s + \sigma i$.

Функция $f(t)$ называется *оригиналом*. Функция $F(p)$ называется *изображением*.

Тот факт, что $f(t)$ и $F(p)$ относятся друг к другу как оригинал и изображение, записывают символически так: $F(p) \fallingdotseq f(t)$ или

$$F(p) \to f(t), \quad F(p) \to f(t), \quad F(p) = L\{f(t)\}.$$

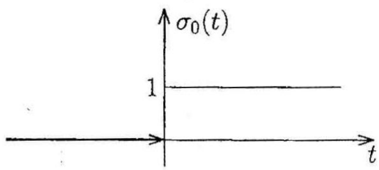
Операцию перехода от оригинала к изображению называют преобразованием Лапласа. При этом изображение $F(p)$ связано с оригиналом $f(t)$ следующим образом:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{4.1}$$

Пример 4.1. Вычислить изображение единичной функции $\sigma_0(t)$, где

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

График этой функции имеет следующий вид:



По определению изображения имеем:

$$\sigma_0(t) \fallingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} \cdot 1 \cdot dt = \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^A e^{-pt}\, dt = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Bigg|_0^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{pe^{Ap}} + \frac{1}{p} \right] = \frac{1}{p}.$$

Итак
$$\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \text{или} \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{4.2}$$

В дальнейшем при записи функции оригинала будем иметь в виде, что эта запись соответствует $t \geqslant 0$, а при $t < 0$, функция равна нулю.

Таким образом, для получения изображения какой-то функции надо вычислить несобственный интеграл (4.1). Известно, что несобственные интегралы бывают сходящимися и расходящимися. Сходимость зависит от поведения подинтегральной функции. Т. к. e^{-pt} является определенной, то все условия необходимые для сходимости несобственного интеграла (4.1) должны касаться функции $f(t)$.

Укажем те достаточные условия, которым должна удовлетворять $f(t)$, чтобы она могла иметь изображение:

Условия Дирихле

1° — для всех t функция $f(t)$ и ее производная или непрерывны, или имеют разрывы первого рода, причем число точек разрыва может быть только конечное на каждом интервале оси $0t$.

2° — функция $f(t)$ — однозначная функция и $f(t) = 0$ для $t < 0$.

3° — существуют такие числа $M > 0$, $S \geqslant 0$, что при любом t функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству:
$$|f(t)| \leqslant Me^{S_0 t}, \tag{4.3}$$
где S_0 — показатель роста $f(t)$.

Условие (4.3) означает, что функции, удовлетворяющие условиям Дирихле, растут при $t \to \infty$ не быстрее, чем показательная функция $e^{S_0 t}$ (в частности, для ограниченной функции $S_0 = 0$). Поэтому функции с разрывами второго рода (например $f(y) = t^{-1}$, $f(t) = \operatorname{tg} t$) или функции типа $f(t) = e^{t^2}$ не удовлетворяют условиям 1°–3°.

Отметим, что условия Дирихле являются лишь достаточными, но не необходимыми для того чтобы интеграл (4.1) существовал. Другими словами, есть функции, имеющие изображение (4.1) но не удовлетворяющие условиям Дирихле 1°–3°. Подробно останавливаться на этом не будем, покажем лишь, что условия Дирихле достаточные для существования изображения.

п. 2. Теорема существования.

Теорема 4.1. *Пусть $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле* 1°–3°. *Тогда эта функция имеет изображение, причем областью определения изображения является полуплоскость* $\operatorname{Re} p > S_0$, *где* S_0 — *показатель роста оригинала* $f(t)$.

Доказательство. По определению изображения функции $f(t)$ имеем:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \quad p = S + i\sigma.$$

Покажем, что интеграл Лапласа существует только в тех точках комплексной плоскости, где $\operatorname{Re} p = S > S_0$.

Для этого достаточно показать, что модуль интеграла Лапласа

$$\left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \right|$$

есть величина, ограниченная в этой полуплоскости и неограниченно возрастающая вне ее.

Действительно, если $\operatorname{Re} p = S > S_0$, то в силу (4.3) будем иметь

$$\left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty |f(t)| \cdot |e^{-pt}|\, dt < \int_0^\infty |e^{-St - i\sigma t}| M e^{S_0 t}\, dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{-St} |\cos \sigma t - i \sin \sigma t| e^{S_0 t}\, dt = M \int_0^\infty e^{-(S-S_0)t} \sqrt{\cos^2 \sigma t + \sin^2 \sigma t}\, dt =$$

$$= -\frac{M}{S - S_0} e^{-(S-S_0)t} \Big|_0^\infty = \begin{cases} \infty, & S \leqslant S_0 \\ \dfrac{M}{S - S_0}, & S > S_0 \end{cases}.$$

Следовательно, интеграл Лапласа сходится (даже абсолютно) только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, что и требовалось доказать. □

п. 3. Теорема единственности оригинала.

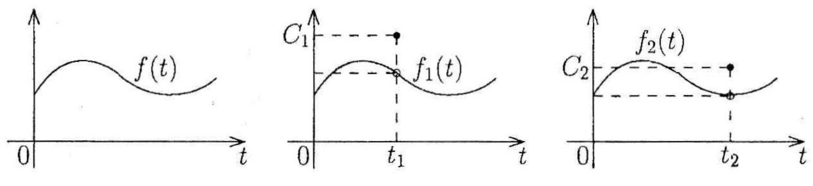
Теорема 4.2. *По определению изображения (см. (4.1)), каждый оригинал имеет единственное изображение. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. функция $F(p)$ может оказаться изображением сразу нескольких оригиналов.*

Построим следующие пример.

Пусть $f(t)$ — функция, имеющая изображение. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — две функции, отличающиеся от $f(t)$ соответственно в точках t_1 и t_2, и совпадающие с $f(t)$ во всех остальных точках. Аналитически $f_1(t)$ и $f_2(t)$ можно записать

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при} \quad t \neq t_1 \\ c_1, & \text{при} \quad t = t_1 \end{cases}; \quad f_2(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при} \quad t \neq t_2 \\ c_2, & \text{при} \quad t = t_2 \end{cases}.$$

Графически все три функции можно изобразить так:



Очевидно, что $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ — различные функции. Однако, изображением этих функций является одна и та же функция, т. к. изменение в одной точке подинтегральной функции в определенном интеграле не изменяет значения этого интеграла (площадь одинакова). Таким образом. справедлива следующая

Теорема 4.3 (о единственности оригинала). *Если в некоторой полуплоскости* $\operatorname{Re} p > S_0$ *функция* $F(p)$ *является изображением двух оригиналов* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$, *то эти оригиналы равны во всех точках, где они непрерывны.*

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы в силу громоздкости и использования фактов, изучаемых нами в курсе математического анализа.

Заметим, что так же как не всякая $f(t)$ может быть оригиналом, так и не всякая функция комплексного пременного p может являться изображением. Покажем, что изображением не может быть функцией периодической. Следовательно, такие аналитические функции как $\sin p$, $\cos p$, $\operatorname{sh} p$, e^p не могут быть изображениями.

Теорема 4.4. *Если $F(p) = 0$ является изображением некоторого оригинала $f(t)$, то $F(p)$ не может быть функцией периодической.*

Доказательство. Применим метод от противного. Предположим, что $F(p)$ — периодическая и имеет период a. Тогда имеем:

$$F(p) \equiv F(p+a) \quad \text{или} \quad F(p) - F(p+a) \equiv 0.$$

В силу (4.1) имеем:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad F(p+a) = \int\limits_0^\infty e^{-(p+a)t} f(t)\,dt.$$

Вычитая, получим:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt - \int\limits_0^\infty e^{-(p+a)t} f(t)\,dt \equiv 0$$

или

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}[(1-e^{-at})f(t)]\,dt \equiv 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части, можно мыслить, как изображение функции $(1-e^{-at})f(t)$. Тогда в силу последнего тождества, эта функция имеет своим изображением тождественный ноль. Другим оригиналом, имеющим изображение ноль, является сам ноль. Значит по теореме единственности оригинала

$$(1-e^{-at})f(t) \equiv 0.$$

Откуда $f(t) \equiv 0$ и значит $F(p) \equiv 0$. Это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о периодичности $F(p)$ не верно. Теорема доказана. □

п. 4. Аналитичность изображения. В предыдущем пункте мы отмечали, что не всякая функция комплексного переменного и в частности, аналитическая функция может быть изображением. Однако, обратное утверждение всегда верно. А именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 4.5. *Если функция $F(p)$ является изображением некоторого оригинала $f(t)$, то в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 — показатель роста функции $F(t)$, функция $F(p)$ аналитическая.*

Доказательство этого факта не составляет труда, поэтому приводить его полностью не будем. Отметим лишь основные моменты доказательства. Для доказательства нужно у $F(p)$ выделить вещественную и мнимую части, используя формулы Эйлера, т. е. представить $F(p)$ в виде:

$$F(p) = u(S,\sigma) + iv(S,\sigma),$$

Затем проверить выполнимость условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{\partial v}{\partial S}.$$

При этом придется дифференцировать под знаком интеграла. Обоснование этой операции и представляет наибольшую сложность в доказательстве теоремы.

§ 4.2. Основные теоремы операционного исчисления

п. 1. Теорема линейности.

Теорема 4.6. *Если $f_k(t) \risingdotseq F_k(p)$ и $\operatorname{Re} p > S_k$ и α_k — постоянная, $k = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(t) \risingdotseq \alpha_k F_k(p) = F(p). \tag{4.4}$$

Доказательство. Используя определение изображения, имеем

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \int_0^\infty e^{-pt} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k F_k(p),$$

что и требовалось доказать. □

п. 2. Теорема подобия.

Теорема 4.7. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и постоянное* $\alpha > 0$, *то*

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4.5}$$

Доказательство. Согласно определению изображения:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} f(\alpha t)\, dt.$$

Сделав замену $\alpha t = z$, $dt = \dfrac{dz}{\alpha}$, получим:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t)\, dt = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

То есть, умножение аргумента оригинала на постоянные $\alpha > 0$ влечет за собой деление изображение и деление его аргумента на α. $\square$

п. 3. Теорема запаздывания.

Теорема 4.8. *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geqslant \tau \end{cases}$. *Тогда*

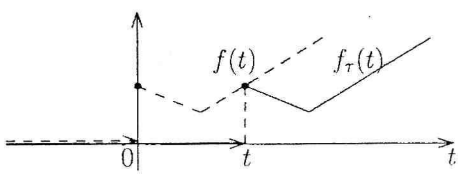
$$f_\tau(t) \risingdotseq F(p) e^{-p\tau}. \tag{4.6}$$

Доказательство. По определению изображения:

$$\int\limits_0^\infty f_\tau(t) e^{-pt}\, dt = \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)\, dt = \left| \begin{array}{l} t-\tau = z, \ t = \tau \to z = 0 \\ t = z + \tau, \ t = \infty \to z = \infty \\ dt = dz, \end{array} \right. =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f(z)\, dz = e^{-p\tau} \int\limits_0^\infty e^{-pz} f(z)\, dz = e^{-p\tau} F(p).$$

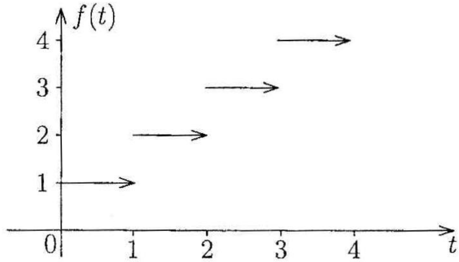
Изобразим графики $f(t)$, $f_\tau(t)$:



То есть, запаздывание аргумента оригинала на $\tau > 0$ влечет за собою умножение изображения на $e^{-p\tau}$. □

Теорема запаздывания позволяет определить изображение кусочно-непрерывных функций.

Пример 4.2. Найти изображение функции, график которой представляет ступенчатую линию:



Решение. Запишем изображенную функцию аналитически, используя для этого единичную функцию $\sigma_0(t)$ (см. выше)

$$f(t) = \sigma_0(t) + \sigma_0(t-1) + \sigma_0(t-2) + \ldots + \sigma_0(t-n) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_0(t-n).$$

Используя теорему запаздывания найдем изображение функции $\sigma_0(t-n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p}, \quad \sigma_0(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-p}, \quad \sigma_0(t-2) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-2p},$$
$$\ldots, \quad \sigma_0(t-n) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-pn}, \quad \ldots$$

Следовательно, используя теорему линейности, имеем:

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p}(1 + e^{-p} + e^{-2p} + \ldots + e^{-np} + \ldots) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-p}}$$

(мы воспользовались формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p \cdot 2} \frac{2e^{p/2}}{e^{p/2} - e^{-p/2}} = \frac{1}{2p} \frac{\operatorname{ch}\frac{p}{2} + \operatorname{sh}\frac{p}{2}}{\operatorname{sh}\frac{p}{2}} = \frac{1}{2p}\left(1 + \operatorname{cth}\frac{p}{2}\right).$$

п. 4. Теорема смещения.

Теорема 4.9. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > S_0$ *и* λ — *постоянная, то*

$$e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p+\lambda), \quad \forall \lambda : \ \operatorname{Re}(p+\lambda) > S_0. \tag{4.7}$$

Доказательство. Согласно определению изображения

$$e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-pt} f(t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-t(p+\lambda)} f(t)\, dt = F(p+\lambda).$$

То есть умножение оригинала на e влечет смещение изображения на λ. □

п. 5. Теорема о дифференцировании оригинала.

Теорема 4.10. *Если производная* $f'(t)$ *удовлетворяет условию существования изображения и* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > S_0$, *то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > S_0. \tag{4.8}$$

Доказательство. По определению изображения имеем:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt.$$

Применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = e^{-pt}$, $dv = f'(t)\, dt$. Тогда

$$du = -pe^{-pt}\, dt, \quad v = \int f'(t)\, dt = f(t).$$

Подставим:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'(t)\, dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty f(t)(-pe^{-pt})\, dt =$$

$$= e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Вычислим первое слагаемое:

$$e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) - e^{-p\cdot 0} \cdot f(0) = -f(0)$$

т. к. $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, в частности оценке (4.3). Поэтому

$$\lim_{t\to\infty}|e^{-pt}f(t)| \leqslant \lim_{t\to\infty}|e^{-pt}|Me^{S_0t} = \lim_{t\to\infty} e^{-St}Me^{S_0t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{\frac{M}{e^{(S-S_0)t}}} = 0, \quad \text{при} \quad S > S_0.$$

Второе слагаемое

$$p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = pF(p).$$

Значит, окончательно:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(0).$$

Следствие 1. *Используя формулу (4.8) найдем изображение второй производной, учитывая, что* $f''(t) = (f'(t))'$

$$f''(t) \risingdotseq p[pF(p) - f(0)] - f'(0)$$

или

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0)] - f'(0).$$

Обобщая, нетрудно получить формулу изображения для производной любого порядка:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (4.9)$$

Следствие 2. *Если* $f(t)$ *такова, что* $f(0) = 0$, *то (4.8) имеет более простой вид*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p).$$

Если, кроме того $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, *то (4.8) упрощается*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p), \quad n = 1, 2, \ldots$$

□

п. 6. Теорема об интегрировании оригинала.

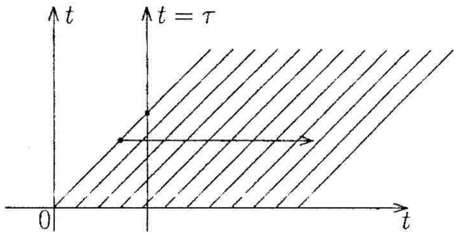
Теорема 4.11. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > S_0$, *то*

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Согласно определению изображения:

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right)dt$$

изобразим область интегрирования и затем изменим порядок интегрирования



$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)\,dt = \int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau \left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_\tau^\infty\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau = \frac{1}{p}f(p).$$

То есть, интегрирование оригинала по промежутку $[0, t]$ влечет за собой деление изображения на p. □

п. 7. Теорема об изображении свертки (теорема умножения).

Определение 4.1. *Сверткой* $f_1 * f_2$ *двух функций* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *называют интеграл*

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{4.11}$$

Сделав замену переменных $t - \tau = z$, получим

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(t-z) f_2(z)\, dz, \quad f_1 * f_2 = f_2 * f_1.$$

Пример 4.3. Найти свертку функций t и $\sin t$.

Решение. По определению свертки:

$$t * \sin t = \int\limits_0^t \tau \sin(t-\tau)\, d\tau,$$

$$u = \tau, \quad dv = \sin(t-\tau)\, d\tau.$$

При этом $dy = d\tau$; $v = \cos(t-\tau)$

$$\begin{aligned} t * \sin t &= \tau \cos(t-\tau)\Big|_0^t - \int\limits_0^t \cos(t-\tau)\, d\tau = t \cdot \cos 0 + \sin(t-\tau)\Big|_0^t = \\ &= t + (-\sin t) = t - \sin t. \end{aligned}$$

Теорема 4.12 (Теорема умножения). *Если* $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > S_1$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > S_2$, *то*

$$f_1 * f_2 \equiv \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(S_1, S_2). \quad (4.12)$$

Доказательство. $f_1 * f_2 \risingdotseq e^{-pt}\left[\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right] dt =$

Изменив порядок интегрирования как в предыдущем пункте, получим

$$\int\limits_0^\infty f_1(\tau)\left[\int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменных

$$t - \tau = z, \quad dt = dz$$

и пересчитав пределы интегрирования, получим

$$f_1 * f_2 = \int_0^\infty f_1(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\,dz\right] d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z)\,dz = F_1(p)F_2(p).$$

Изображению свертки двух функций соответствует умножение их изображений. □

В приложениях часто требуется найти оригинал для произведения $pF_1(p)F_2(p)$. В качестве следствия теоремы умножения покажем, как этот оригинал можно построить.

Следствие. *Если* $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, *то*

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{4.13}$$

Доказательство.

$$pF_1(p)F_2(p) = (pF_1(p) - f_1(0))F_2(p) + f_1(0)F_2(p),$$

но $f_1(0)F_2(p) \risingdotseq f_1(0)f_2(t)$, $pF_1(p) - f_1(0) \risingdotseq f_1'(t)$, следовательно

$$(p \cdot F_1(p) - f_1(0))F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

и по свойству линейности найдем

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{4.14}$$

Полученная формула носит название интеграла Дюамеля. □

п. 8. Теорема о дифференцировании изображения.

Теорема 4.13. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > S_0$, *то*

$$t \cdot f(t) \risingdotseq -F'(p), \quad \operatorname{Re} p > S_0. \tag{4.15}$$

Доказательство. По определению изображения

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)\,dt$$

и продифференцировав это равенство, что допустимо, т. к. $F(p)$ аналитично при $\operatorname{Re} p > S_0$, найдем

$$F'(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}(-tf(t))\,dt \quad\Longrightarrow\quad tf(t) \risingdotseq -F'(p).$$

Повторив эти рассуждения n раз, получим

$$t^n \cdot f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad \operatorname{Re} p > S_0.$$

То есть, дифференцирование изображения влечет за собой умножение на $(-t)$ его оригинала. □

п. 9. Теорема об интегрировании изображения.

Теорема 4.14. *Если функция удовлетворяет условию существования изображения и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > S_0$, то*

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(q)\,dq, \quad \operatorname{Re} q > S_0. \tag{4.16}$$

Доказательство. Обозначим $J(p)$ изображение функции $\dfrac{f(t)}{t}$

$$J(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) \frac{1}{t}\,dt.$$

Дифференцируя это равенство, найдем

$$J'(p) = -\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \equiv -F(p).$$

Интегрируя в пределах от p до ∞ и учитывая равенство нулю изображения на бесконечности, получим:

$$J(p)\Big|_p^\infty = J(\infty) - J(p) = -J(p) = -\int\limits_p^\infty F(q)\,dq.$$

Следовательно,

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = J(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \frac{1}{t}\,dt$$

или

$$\frac{1}{t} f(t) \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\,dq, \quad \operatorname{Re} q > S_0.$$

Т.е. интегрирование изображения по промежутку $[p; \infty]$ соответствует деление оригинала на t. □

п. 10. Изображение периодического оригинала. В электротехнике и радиотехнике часто приходится иметь дело с периодическими функциями. Получим формулу, позволяющую находить изображение таких функций.

Теорема 4.15. *Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом a, т. е.*

$$f(t) = f(t+a) = f(t+2a) = f(t+3a) = \ldots = f(t+na), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{4.17}$$

Доказательство. По определению изображения Лапласа и в силу периодичности $f(t)$ имеем:

$$f(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^a f(t) e^{-pt}\,dt + \int_a^{2a} f(t) e^{-pt}\,dt +$$

$$+ \int_{2a}^{3a} f(t) e^{-pt}\,dt + \ldots + \int_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-pt}\,dt + \ldots = \sum_{n=0}^\infty \int_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-pt}\,dt.$$

Сделаем замену переменных $t = t_1 + na$, $dt = dt_1$ и пересчитаем пределы интегрирования:

$$t = na \to t_1 = 0; \quad t = (n+1)a \to t_1 = a.$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \sum_{n=0}^\infty \int_0^a f(t_1 + na) e^{-p(t_1+na)}\,dt_1$$

Следовательно,

$$\int\limits_p^\infty F(q)\,dq = J(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) \frac{1}{t}\,dt$$

или

$$\frac{1}{t} f(t) \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(q)\,dq, \quad \operatorname{Re} q > S_0.$$

Т.е. интегрирование изображения по промежутку $[p; \infty]$ соответствует деление оригинала на t. □

п. 10. Изображение периодического оригинала. В электротехнике и радиотехнике часто приходится иметь дело с периодическими функциями. Получим формулу, позволяющую находить изображение таких функций.

Теорема 4.15. *Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом a, т. е.*

$$f(t) = f(t+a) = f(t+2a) = f(t+3a) = \ldots = f(t+na), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1 - e^{-ap}} \int\limits_0^a e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{4.17}$$

Доказательство. По определению изображения Лапласа и в силу периодичности $f(t)$ имеем:

$$f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \int\limits_0^a f(t) e^{-pt}\,dt + \int\limits_a^{2a} f(t) e^{-pt}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{2a}^{3a} f(t) e^{-pt}\,dt + \ldots + \int\limits_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-pt}\,dt + \ldots = \sum_{n=0}^\infty \int\limits_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-pt}\,dt.$$

Сделаем замену переменных $t = t_1 + na$, $dt = dt_1$ и пересчитаем пределы интегрирования:

$$t = na \to t_1 = 0; \quad t = (n+1)a \to t_1 = a.$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^a f(t_1 + na) e^{-p(t_1 + na)}\,dt_1$$

учитывая, что $f(t_1+na)=f(t_1)$, получим

$$f(t) \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npa} \int_0^a f(t_1)e^{-pt_1}\,dt_1.$$

Заменяя t_1 на t и вынося интеграл за знак ряда последнее равенство запишем в виде:

$$f(t) \risingdotseq \int_0^a f(t)e^{-pt}\,dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-apn}.$$

Участвующая в этом равенстве сумма является геометрической прогрессией $1+e^{-ap}+e^{-ap}+\ldots$, знаменатель которой $|q|=|e^{-ap}|<1$, $\operatorname{Re} p>0$.

Значит прогрессия имеет конечную сумму, равную

$$\frac{1}{1-e^{-ap}}.$$

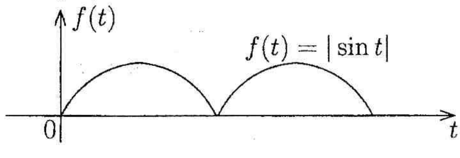
Окончательно,

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a f(t)e^{-pt}\,dt.$$

□

Пример 4.4. Найти изображение выпрямленного двухполупериодного тока, т. е. функции $f(t)=|\sin t|$ с периодом $T=\pi$.

Решение. Изобразим график:



Учитывая, что при $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $|\sin t| = \sin t$ воспользуемся формулой (4.17) при $a=\pi$

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^\pi |\sin t|e^{-pt}\,dt = \frac{1}{1-e^{-\pi p}} \int_0^\pi \sin t e^{-pt}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{1-e^{-\pi p}} \cdot \frac{e^{-pt}(p\sin t+\cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^\pi = \frac{-1}{1-e^{-\pi p}} \cdot \frac{-e^{-\pi p}-1}{p^2+1} =$$

$$= \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{e^{\frac{\pi p}{2}}+e^{-\frac{\pi p}{2}}}{e^{\frac{\pi p}{2}}-e^{-\frac{\pi p}{2}}} = \frac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2}.$$

Все полученные выше теоремы операционного исчисления сведем в таблицу 1. (см. Приложение).

§ 4.3. Изображение некоторых элементарных функций

Изображение оригиналов вычисляется как интеграл, определяющий преобразование Лапласа (см. (4.1). Здесь мы, опираясь на свойства и определение преобразований Лапласа, построим изображение некоторых элементарных функций.

Выше (см. пример 4.1) мы показали, что

$$\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \text{или} \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{4.18}$$

Используя теорему запаздывания, найдем изображение функции

$$\sigma_0(t-\tau) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-p\tau}. \tag{4.19}$$

Отметим еще раз, что при записи функции оригинала эта запись соответствует $t \geqslant 0$, а при $t < 0$ функция равна 0.

Используя теорему смещения (4.7) и формулу (4.18), найдем

$$e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p-\lambda}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda. \tag{4.20}$$

Как следствие (4.20) и свойства линейности преобразования Лапласа (4.4) построим изображение гиперболических и тригонометрических функций:

$$\operatorname{ch} \beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta} + \frac{1}{p+\beta}\right) = \frac{p}{p^2-\beta^2}, \tag{4.21}$$

$$\operatorname{sh} \beta t = \frac{e^{+\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p+\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2-\beta^2}, \tag{4.22}$$

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \beta|,$$

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\beta} + \frac{1}{p+i\beta}\right) = \frac{p}{p^2+\beta^2}, \tag{4.23}$$

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|,$$

$$\sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\beta} - \frac{1}{p+i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}, \tag{4.24}$$

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|.$$

Используя полученные формулы (4.23), (4.24) и теорему смещения (4.7), найдем изображения:

$$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\quad \operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha + |\operatorname{Im}\beta|, \tag{4.25}$$

$$e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\quad \operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha + |\operatorname{Im}\beta|. \tag{4.26}$$

Пользуясь формулой (4.20) и теоремой о дифференцировании изображения (4.15), найдем:

$$te^{\lambda t} \risingdotseq -\left(\frac{1}{p-\lambda}\right)' = \frac{1}{(p-\lambda)^2}$$

$$t^2e^{\lambda t} \risingdotseq -\left(\frac{1}{(p-\lambda)^2}\right)' = \frac{2!}{(p-\lambda)^3}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$t^ne^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\quad \operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\lambda \tag{4.27}$$

В частности, при $\lambda = 0$ будем иметь

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}},\quad \operatorname{Re}p > 0. \tag{4.28}$$

Дифференцируя изображения для $\sin\beta t$ и $\cos\beta t$, найдем:

$$t\cos\beta t \risingdotseq -\left(\frac{p}{p^2+\beta^2}\right)' = \frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2},\quad \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\beta|, \tag{4.29}$$

$$t\sin\beta t \risingdotseq -\left(\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right)' = \frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2},\quad \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\beta|. \tag{4.30}$$

Сведем полученные формулы, в таблицу 2.

Рассмотрим примеры на построение изображений:

Пример 4.5.

$$f(t) = e^{-2t}\cdot\cos^2 3t,\quad F(p) = ?$$

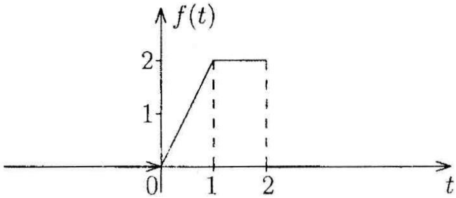
Решение. Представим

$$\cos^2 3t = \frac{1}{2}(1+\cos 6t).$$

Тогда
$$f(t) = e^{-2t}\frac{1}{2}(1+\cos 6t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 6t.$$
Применим теорему линейности преобразования Лапласа и формулы (4.20), (4.25):
$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 6t \risingdotseq \frac{1}{2}\frac{p+2}{(p+2)^2+36} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+2}.$$

Пример 4.6. Найти изображение функции:
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \quad t>2, \\ 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2, & 1<t<2. \end{cases}$$

Решение. Построим график этой функции:



Запишем теперь $f(t)$ с помощью единичной функции $\sigma_0(t)$ одним аналитическим выражением. Функция $f(t)$, равная $2t$, «включается» в момент $t=0$, а в момент $\tau=1$ она «гасится» и «включается» функция 2, которая «гаится» в момент $\tau=2$.

Поэтому:
$$f(t) = 2t\sigma_0(t) - 2t\sigma_0(t-1) + 2\sigma_0(t-1) - 2\sigma_0(t-2).$$
Слагаемые $2t\sigma_0(t-1)$ надо представить в форме $\varphi(t-1)\sigma_0(t-1)$. Сделаем это:
$$2t\sigma_0(t-1) = 2(t-1+1)\sigma_0(t-1) = 2(t-1)\sigma_0(t-1) + 2\sigma_0(t-1).$$
Итак, используя (4.19)
$$\begin{aligned} f(t) &= 2t\sigma_0(t) - 2(t-1)\sigma_0(t-1) - 2\sigma_0(t-1) + 2\sigma_0(t-1) - 2\sigma_0(t-2) = \\ &= 2t\sigma_0(t) - 2(t-1)\sigma_0(t-1) + 2\sigma_0(t-2) \risingdotseq \frac{2}{p^2} - \frac{2e^{-p}}{p^2} - \frac{2e^{-2p}}{p}. \end{aligned}$$

Пример 4.7. Найти изображение $f(t) = \dfrac{\cos 4t - e^{-3t}}{t}$.

Решение. Так как

$$\cos 4t \risingdotseq \frac{p}{p^2+16}, \quad e^{-3t} \risingdotseq \frac{1}{p+3},$$

то используя теорему об интегрировании изображения, будем иметь:

$$\frac{\cos 4t - e^{-3t}}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \left[\frac{s}{s^2+16} - \frac{1}{s+3}\right] ds =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_p^{b} \left[\frac{s}{s^2+16} - \frac{1}{s+3}\right] ds = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|s^2+16| - \ln|s+3|\right]\Big|_p^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{\sqrt{s^2+16}}{s+3}\Big|_p^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{\sqrt{b^2+16}}{b+3} - \ln\frac{\sqrt{p^2+16}}{p+3}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln 1 - \ln\frac{\sqrt{p^2+16}}{p+3}\right] = \ln\frac{p+3}{\sqrt{p^2+16}}.$$

Пример 4.8. Найти изображение

$$f(t) = \operatorname{sh} t \cdot \cos 2t \cdot \cos 3t.$$

Решение. Преобразуем $f(t)$, используя тригонометрические формулы и формулы Эйлера:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{1}{2}[\cos 5t + \cos t] = \frac{1}{4}[e^t \cos 5t + e^t \cos t - \\ &- e^{-t}\cos 5t - e^{-t}\cos t]. \end{aligned}$$

Используя теорему линейности и формулу (4.25), получим:

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{4}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+25} + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+25} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right].$$

Пример 4.9. Найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Решение. Так как

$$\frac{1}{p^2} \risingdotseq t, \quad \frac{1}{p-1} \risingdotseq e^t,$$

то

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} \risingdotseq t * e^t$$

(мы воспользовались теоремой умножения (4.12).

Вычислим эту свертку:

$$t * e^t = \int_0^t (t-\tau)e^\tau\,d\tau = te^\tau\Big|_0^t - \int_0^t e^\tau \cdot \tau\,d\tau = te^t - t -$$

$$-\left(\tau e^\tau\Big|_0^t - \int_0^t e^\tau\,d\tau\right) = te^t - t - te^t + e^t - 1 = e^t - t - 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p^2(p-1)} \risingdotseq e^t - t - 1.$$

§ 4.4. Нахождение оригинала по изображению. Теоремы разложения

В предыдущих параграфах мы, главным образом, решали вопросы нахождения изображения по заданному оригиналу. Были выведены основные теоремы преобразования Лапласа и получены изображения простейших функций.

Теперь рассмотрим обратную задачу. Во многих случаях при решении этой задачи можно пользоваться «каталогом изображений» (см. таблицу 2). Кроме того этой цели могут служить и некоторые рассмотренные теоремы, а именно теоремы умножения, запаздывания и интеграл Дюамеля.

Пример 4.10. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = e^{-\frac{3}{2}p}\frac{p-1}{p^2-p+1}.$$

Решение. Так как

$$\frac{p-1}{p^2-p+1} = \frac{p-1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{p-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}(t)}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Теперь применим теорему запаздывания:

$$e^{-\frac{3}{2}p}\frac{p-1}{p^2-p+1} \risingdotseq e^{\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right).$$

Пример 4.11. Найти оригинал по известному изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p-a)(p-b)}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{p-a} \risingdotseq e^{at}; \quad \frac{1}{p-b} = e^{bt}.$$

Далее воспользуемся формулой Дюамеля:

Принимая $f(t) = e^{at}$, $g(t) = e^{bt}$, будем иметь: $g'(t) = be^{bt}$, $g(0) = 1$, $f_t'(t-\tau) = [e^{a(t-\tau)}]_t' = ae^{a(t-\tau)}$.

Тогда

$$\frac{p}{(p-a)(p-b)} = p\frac{1}{p-a}\frac{1}{p-b} \risingdotseq \int\limits_0^t e^{a\tau}be^{b(t-\tau)}\,d\tau + e^{at} =$$

$$= be^{bt}\int\limits_0^t e^{(a-b)\tau}\,d\tau + e^{at} = \frac{b}{a-b}(e^{at}-e^{bt}) + e^{at} = \frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt}).$$

Часто приходится иметь дело с изображениями, являющимися дробно-рациональными функциями.

Напомним, что дробно-рациональная функция называется правильной, если степень числителя n меньше степени знаменателя m.

Можно показать, что если дробно-рациональная функция является правильной, то она обязательно может быть изображением некоторого оригинала. Таким образом, разложив дробь на простейшие, предварительно, если нужно, выделив целую часть, а затем используя необходимые теоремы, мы получим искомый оригинал. Этот метод применяем в случае действительных, кратных и комплексных корней знаменателя.

Пример 4.12. Разложением дроби на простейшие найти оригинал, соответствующий изображению:

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p(p^3 - p^2 - 6p)}.$$

Решение. Разложим на простейшие

$$\frac{p^2 - p + 2}{p^2(p^2 - p - 6)} = \frac{p^2 - p + 2}{p^2(p-3)(p+2)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p+2}.$$

Определим коэффициенты:

$$p^2 - p + 2 = A(p-3)(p+2) + Bp(p-3)(p+2) + Cp^2(p+2) + Dp^2(p-3).$$

Полагая $p = 0$, $p = 3$, $p = -2$, имеем:

$$p = 0 \to 2 = -6A \to A = -\frac{1}{3}.$$

$$p = 3 \to 8 = 45C \to C = \frac{8}{45}.$$

$$p = -2 \to 8 = 20D \to D = \frac{2}{5}.$$

Для нахождения B приравняем координаты при p^3:

$$O = B + C + D \to B = -C - D = -\frac{26}{45}.$$

Тогда данное изображение имеет оригинал:

$$\frac{p^2 - p + 2}{p^2(p-3)(p+2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{p^2} - \frac{26}{45}\cdot\frac{1}{p} + \frac{8}{45}\cdot\frac{1}{p-3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -\frac{1}{3}t - \frac{26}{45} + \frac{8}{445}e^{3t} + \frac{2}{5}e^{-2t}.$$

А теперь получим формулу, по которой определяется оригинал дробно-рациональной функции, знаменатель которой не имеет кратных корней.

Теорема 4.16 (Теорема разложения). *Пусть дана дробно-рациональная функция:*

$$\frac{F(p)}{\Phi(p)} = \frac{F(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)},$$

где $p = (k = 1, 2, \ldots, n)$ могут быть как действительными, так и комплексными числами, причем:

1) *все корни p_k функции $\Phi(p)$ различны,*

2) *ни один из корней p_k не является корнем функции $F(p)$, т. к. в противном случае и в числителе можно было выделить множитель $p - p_k$, затем сократить. Тогда оригинал данной дроби определяется по формуле:*

$$\frac{F(p)}{\Phi(p)} \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{F(p_k)}{\Phi'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{4.31}$$

Доказательство. Известно что рациональная дробь может быть разложена на простейшие, то есть

$$\frac{F(p)}{\Phi(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-p_k}. \tag{4.32}$$

Для определения A_1 умножим обе части (4.32) на $(p - p_1)$ и перейдем к пределу при $p \to p_1$:

$$\lim_{p\to p_1}(p-p_1)\frac{F(p)}{\Phi(p)} = A_1 + \lim_{p\to p_1}(p-p_1)\left[\frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n}\right].$$

Второе слагаемое в правой части при этом обратится в нуль, поэтому:

$$A_1 = \lim_{p\to p_1}(p-p_1)\frac{F(p)}{\Phi(p)}.$$

Для вычисления этого предела воспользуемся правилом Лопиталя, т. к. имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Поэтому

$$A_1 = \lim_{p\to p_1}\frac{[(p-p_1)F(p)]'}{\Phi'(p)} = \lim_{p\to p_1}\frac{F(p) + (p-p_1)F'(p)}{\Phi'(p)} = \frac{F(p_1)}{\Phi'(p_1)}.$$

Напомним, что p_1 — однократный корень функции $\Phi(p)$, поэтому $\Phi'(p_1) \neq 0$.

Аналогично можно определить A_2, A_3, …, A_n, а именно

$$A_k = \frac{F(p_k)}{\Phi'(p_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя полученные A_k в равенство (4.32), получим

$$\frac{F(p)}{\Phi(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{F(p_k)}{\Phi'(p_k)},$$

Переходя в этом равенстве к оригиналам и имея в виду, что $\dfrac{1}{p-p_k}\risingdotseq e^{p_kt}$, будем иметь:

$$\frac{F(p)}{\Phi(p)}\risingdotseq\sum_{k=1}^{n}\frac{F(p_k)}{\Phi'(p_k)}e^{p_kt},$$

что и требовалось доказать. □

Пример 4.13. Пользуясь теоремой разложения, найти оригинал по заданному изображению:

$$\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Решение. Здесь $F(p)=p^2=1$, $\Phi(p)=p(p+1)(p+2)(p+3)$

$$p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=-2,\quad p_4=-3.$$

Найдем $\Phi'(p_k)$ и $F(p_k)$

$$\begin{aligned}\Phi'(p)&=(p+1)(p+2)(p+3)+p(p+2)(p+3)+p(p+1)(p+3)+\\&\quad+p(p+1)(p+2)\\ \Phi'(0)&=6,\quad \Phi'(-1)=-2,\quad \Phi'(-2)=2,\quad \Phi'(-3)=-6;\\ F(0)&=1,\quad F(-1)=2,\quad F(-2)=5,\quad F(-3)=10.\end{aligned}$$

По формуле (4.31) найдем искомый оригинал:

$$\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}\risingdotseq\sum_{k=1}^{4}\frac{F(p_k)}{\Phi'(p_k)}e^{p_kt}=\frac{F(0)}{\Phi'(0)}e^{0t}+\frac{F(-1)}{\Phi'(-1)}e^{t}+$$
$$+\frac{F(-2)}{\Phi'(-2)}e^{2t}+\frac{F(-3)}{\Phi'(-3)}e^{3t}=\frac{1}{6}-e^{t}+\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{5}{3}e^{3t}.$$

Формула (4.31) позволяет решать большое число практических задач, однако эта формула неприменима, если знаменатель $\Phi(p)$ имеет кратные корни. В этом случае можно использовать обобщенную формулу разложения, которую приведем без доказательства.

Пусть знаменатель правильной дробно-рациональной функции $\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$ имеет корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда оригинал такой функции определяется формулой:

$$\frac{F(p)}{\Phi(p)} \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{r_k-1}}{do^{r_k-1}} \left[(p-p_k)^{r_k} \frac{F(p)}{\Phi(p)} e^{pt}\right] \qquad (4.33)$$

— обобщенная формула разложения.

Пример 4.14. Найти оригинал, соответствующий изображению:

$$\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}.$$

Решение. В этом случае $F(p) = 1$, $\Phi(p) = (p-1)^2(p-2)^3$, $p_1 = 1$ $(r_1 = 2)$, $p_2 = 2$ $(r_2 = 3)$. Поэтому по (4.33)

$$\frac{1}{(p-1)^3(p-2)^3} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p\to 1} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p-2)^3}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(3-1)!} \lim_{p\to 2} \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}\right] = \lim_{p\to 1} \frac{te^{pt}(p-2)^3 - e^{pt}3(p-2)^2}{(p-2)^6} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \lim_{p\to 2} \frac{d}{dp}\left[\frac{te^{pt}(p-1)^2 - e^{pt}2(p-1)}{(p-1)^4}\right] =$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{te^{pt}(p-2) - 3e^{pt}}{(p-2)^4} + \frac{1}{2} \lim_{p\to 2} \frac{d}{dp}\left[\frac{te^{pt}(p-1) - 2e^{pt}}{(p-1)^3}\right] =$$

$$= -te^t - 3e^t + \frac{1}{2} \lim_{p\to 2} \frac{te^{tp-t-2}(p-1) + e^{pt}(p-1)t - 3e^{pt}(pt-t-2)}{(p-1)^4} =$$

$$= -te^t - 3e^t + \frac{1}{2}\left(2t^2e^{2t} - t^2e^{2t} - 2te^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(6te^{2t} + 3te^{2t} + 6e^{2t})\right) = \frac{1}{2}(t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t).$$

Приложение

Таблица 1. Основные теоремы операционного исчисления

Операция	Оригинал	Изображение
1. Линейность	$\sum\limits_{k=1}^{n} C_k f_k(t)$, $C_k = \text{const}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} C_k F_k(p)$
2. Теорема подобия	$f(\alpha t)$, $\alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
3. Теорема запаздывания	$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geqslant \tau > 0 \end{cases}$	$e^{-p\tau} F(p)$
4. Теорема смещения	$e^{-\lambda t} f(t)$	$F(p+\lambda)$
5. Дифференцирование оригинала	$f^{(n)}(t)$	$p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]$
6. Интегрирование оригинала	$\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
7. Теорема умножения	$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
8. Интеграл Дюамеля	$f_1(0) f_2(t) + \int\limits_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$
9. Дифференцирование изображения	$(-1)^n t^n f(t)$	$f^{(n)}(p)$
10. Интегрирование изображения	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int\limits_p^\infty F(q)\, dq$
11. Изображение периодического оригинала	$f(t)$, $T = a$	$\frac{1}{1-e^{-ap}} \int\limits_0^a e^{-pt} f(t)\, dt$

Таблица 2. Оригиналы и их изображения

№№	Оригинал	Изображение	№№	Оригинал	Изображение
1.	$\sigma_0(t)$	$\frac{1}{p}$	8.	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
2.	$\sigma_\tau(t)$	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$	9.	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
3.	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	10.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4.	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	11.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
5.	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	12.	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	13.	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
7.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	14.	$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\frac{pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$

Литература

[1] *Ильин В. А., Поздняк Э. П.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1967.

[2] *Щипачев В. С.* Высшая математика. — М.: Высшая школа, 1990.