МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИЗАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФИЛИАЛ

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Для студентов 2 курса
(специальности 200900, 201000)

Ростов-на-Дону
2002

УДК 517.2

Докучаев С.А., Ефименко В.Н., Костецкая Г.С., Прушинская Л.А.
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля. Теория функций комплексного переменного. Учебное пособие. СКФ МТУСИ, 2002.

Пособие содержит краткие сведения по теории, рекомендации к решению задач по темам: кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы; теория поля, теория функций комплексного переменного.

Приведены решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения. Включены примеры, касающиеся приложений рассматриваемых понятий.

Учебное пособие предназначено для студентов 2-го курса специальностей 200900 и 201000 и полностью соответствует всем требованиям учебных программ.

Рекомендовано к межвузовскому использованию Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области связи.

# ГЛАВА I

# КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

### 1. Определение двойного интеграла

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D плоскости $xOy$. Разобьем область произвольным образом на $n$ частей, обозначим их $D_k, k=1,...,n$. Через $\Delta S_k$ обозначим площадь $D_k$, $d_k$ - диаметр $D_k$ (наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем произвольную точку $P_k(\xi_k,\eta_k)\in D_k, k=1,2,..n$, вычислим $f(P_k)=f(\xi_k,\eta_k), k=1,..n$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k \tag{1}$$

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) при условии, что $\max d_k \to 0$ и он не зависит ни от способа разбиения области $D$ на части, ни от выбора точек $P_k, k=1,..n$, то его называют двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D и обозначают

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k \tag{2}$$

### 2. Свойства двойных интегралов

1. $\iint\limits_D (f_1(x,y)\pm f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$

2. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

3. $D=D_1\bigcup D_2, D_1\bigcap D_2=\emptyset$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4. Если $m\le f(x,y)\le M$ в области $D$, то $\exists\ m\le\mu\le M$ :

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot S_D$$, где $S_D$ - площадь области D

5. Если $f(x,y)$ непрерывна в $D$, то $\exists$ точка $M(x_0,y_0)\in D$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(M)\cdot S_D$$

### 3. Вычисление двойных интегралов

Пусть $D=\{(x,y): a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ - непрерывны на [a,b] (рис. 1). Очевидно, что в этом случае прямая параллельная оси $Oy$ пересекает границу области D не более чем в 2-х точках. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{3}$$

Пусть теперь $D=\{(x,y): c\le y\le d, \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\}$, где $\phi_1(y),\phi_2(y)$ - непрерывны на [c,d] (рис.2). В этом случае прямая параллельная оси $Ox$ пересскает границу области $D$ не более чем в двух точках. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \tag{4}$$

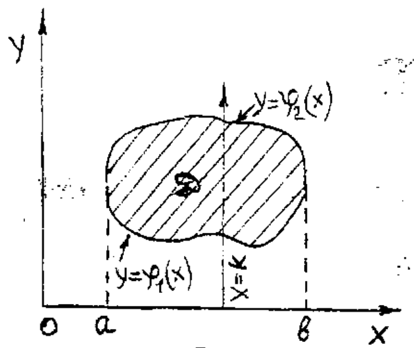


Рис. 1

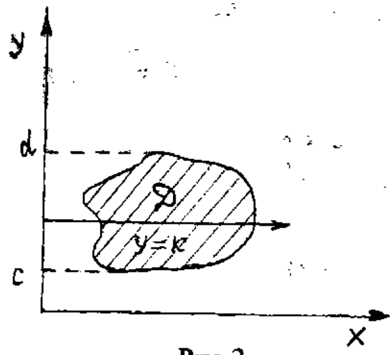


Рис.2

Описанные выше области называются простыми соответственно относительно оси $Ox$ и оси $Oy$. Если же прямые параллельные координатным осям пересекают область $D$ не более чем в 2-х точках, то такая область называется простой и

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (5)$$

В более общих случаях область интегрирования $D$ сводится к этим простым областям путем разбиения на части прямыми параллельными координатным осям.

**Пример** 1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде двукратного, причем расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если область D ограничена линиями $y=x^2$, $x=y^2$.

**Решение.** Для построения области D найдем абсциссы точек пересечения парабол $y=x^2$ и $x=y^2$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow x=(x^2)^2 \Rightarrow x^4-x=0; x(x^3-1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1$$

Начертим область D (рис. 3).

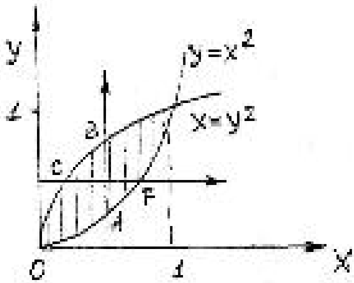


Рис. 3

Возьмем сначала внешнее интегрирование по переменной $x$. Очевидно, что $x$ меняется от 0 до 1, т.е. $0 \le x \le 1$. Чтобы найти пределы изменения переменной $y$ проведем прямую параллельную оси $Oy$, проходящую через область $D$ и отметим точки входа и выхода.

Точка входа A лежит на параболе $y=x^2$, а точка выхода B лежит на параболе $x=y^2$, т.е. $y=\sqrt{x}$, поэтому

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

Теперь внешнее интегрирование будем проводить по $y$, при этом $0 \le y \le 1$. Чтобы найти пределы изменения переменной $x$ поступим аналогично предыдущему: проведем прямую параллельную оси $Ox$ и отметим точки входа и выхода. Точка входа $C$ лежит на параболе $x = y^2$, а точка выхода F – на параболе $y = x^2$, т.е. $x = \sqrt{y}$, поэтому

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$$

Таким образом область $D$ является простой относительно оси $Ox$ и относительно оси $Oy$, т.е. вообще простой.

**Пример 2.** Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y)dxdy$ в виде двукратного, причем расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если область D ограничена линиями $y = x, x = 2, xy = 1$.

**Решение.** Чтобы построить область D найдем абсциссы точек пересечения гиперболы $xy = 1$ и прямых $y = x$ и $x = 2$. Для этого решим системы

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \qquad \begin{cases} xy = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2$$

Изобразим область $D$ (рис. 4):

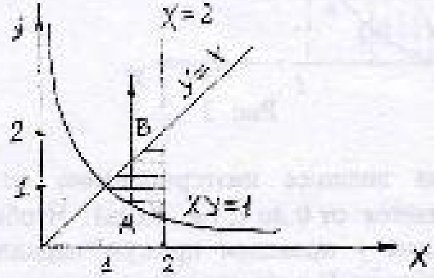



Рис. 4

Выберем сначала внешнее интегрирование по переменной $x$, при этом $1 \le x \le 2$. Чтобы найти пределы изменения переменной $y$ проведем прямую параллельную оси $Oy$ и отметим точки входа и выхода. Точка входа $A$ лежит на гиперболе $xy=1$, т.е. $y=\dfrac{1}{x}$, а точка выхода $B$ на прямой $y=x$, поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$$

Изменим порядок интегрирования. Внешнее интегрирование будем брать по $y$. При этом левая граница области $D$ состоит из двух участков: гиперболы $xy=1$ и прямой $y=x$. Поэтому разобьем область $D$ прямой $y=1$ на две непересекающиеся области $D_1$ и $D_2$. В области $D_1$ переменная у меняется от ординаты точки пересечения гиперболы $xy=1$ и $x=2$ до $y=1$.

То есть $\begin{cases} xy=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow 2y=1,\ y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le y\le 1.$

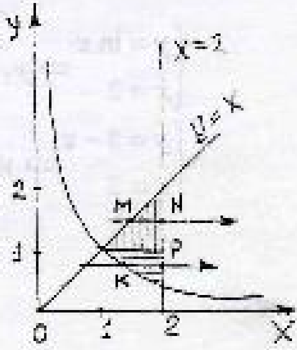
Чтобы найти, как меняется переменная $x$, проведем через $D_1$ прямую параллельную оси $Ox$ и отметим точки входа и выхода. Точка входа $K$ лежит на $xy=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{y}$, а точка выхода $P$ на $x=2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx$$

Аналогично с $D_2$: $1\le y\le 2$; точка входа $M$ лежит на прямой $y=x$, т.е. $x=y$, а точка выхода $N$ на прямой $x=2$. Следовательно,

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^2 f(x,y)dx$$




Пользуясь свойством двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

имеем

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)dx$$

**Пример 3.** Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_1^2 dx \int_{\ln x}^{5-x} f(x,y)dx$

**Решение.** Сначала по пределам интегрирования определим область интегрирования. Полагая $x$ равным пределам интеграла с переменной $x$, а $y$ равным пределам интеграла с переменной $y$, получим:

$$x = 1,\ x = 2,\ y = \ln x,\ y = 5 - x$$

Построив эти линии, получим область интегрирования (рис.5)

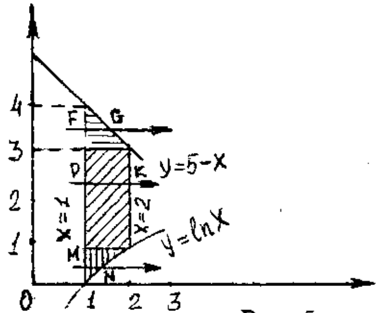



Рис. 5

Изменим порядок интегрирования. Правая граница области $D$ состоит из 3-х участков: прямой $y = 5 - x$, прямой $x = 2$ и кривой $y = \ln x$. Поэтому область $D$ разбивается на 3 простые относительно оси $Ox$ области $D_1, D_2, D_3$. Расставим пределы интегрирования в каждой из них. Для этого сначала найдем точки пересечения

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \ln 2\,; \begin{cases} y = \ln x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \ln 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y_3 = 5 - 2 = 3\,; \begin{cases} y = 5 - x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y_4 = 5 - 1 = 4$$

В области $D_1$: $0 \le y \le \ln 2$. Проведем прямую через $D_1$ параллельно оси $Ox$. Точка входа $M$ лежит на прямой $x = 1$, точка выхода $N$ на кривой $y = \ln x$, т.е. $x = e^y$, поэтому

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\ln 2} dy \int\limits_1^{e^y} f(x,y)dx$$

В области $D_2$: $\ln 2 \le y \le 3$. Проведем прямую через $D_2$ параллельно оси $Ox$. Точка входа $P$ лежит на прямой $x = 1$, точка выхода $K$ на прямой $x = 2$, поэтому

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\ln 2}^{3} dy \int\limits_1^{2} f(x,y)dx$$

В области $D_3$: $3 \le y \le 4$. Проведем прямую через $D_3$ параллельно оси $Ox$. Точка входа $F$ лежит на прямой $x = 1$, точка выхода $G$ на прямой $y = 5 - x$, т.е. $x = 5 - y$, поэтому

$$\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy = \int\limits_3^{4} dy \int\limits_1^{5-y} f(x,y)dx$$

Пользуясь свойством двойного интеграла

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy,$$

окончательно имеем

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\ln 2} dy \int\limits_1^{e^y} f(x,y)dx + \int\limits_{\ln 2}^{3} dy \int\limits_1^{2} f(x,y)dx + \int\limits_3^{4} dy \int\limits_1^{5-y} f(x,y)dx$$

**Пример 4.** Переменив порядок интегрирования, записать в виде одного повторного интеграла

$$\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{y-1}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$$

**Решение.** По пределам интегрирования запишем уравнения линий, которые ограничивают область D: $y = 1$, $y = 4$, $x = \dfrac{y-1}{2}$, $x = \sqrt{4-y}$.

Прямая $y = 3$, по-видимому, делит область интегрирования на две непересекающиеся области.

Начертим область D (рис.6)

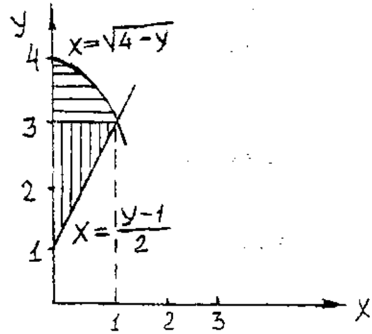



Рис. 6

Очевидно, что она простая относительно оси $Ox$. Выразим $y$ из уравнения $x=\sqrt{4-y}$, получим $y=4-x^2$. Аналогично выразим $y$ из $x=\dfrac{y-1}{2}$, т.е. $y=2x+1$, таким образом: $0 \le x \le 1;\ 2x+1 \le y \le 4-x^2$

Поэтому имеем

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy \text{ или}$$

$$\int_1^3 dy\int_0^{\frac{y-1}{2}} f(x,y)dx+\int_3^4 dy\int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$$

**Пример 5.** Вычислить двойной интеграл $\iint_D \sin(x+y)dxdy$, где $D$ – область, ограниченная линиями $y=0$, $y=x$, $x+y=\dfrac{\pi}{2}$

**Решение.** Начертим область $D$ (рис. 7). Она является простой относительно оси $Oy$ (прямая параллельная оси $Ox$ пересекает область не более чем в 2-х точках).

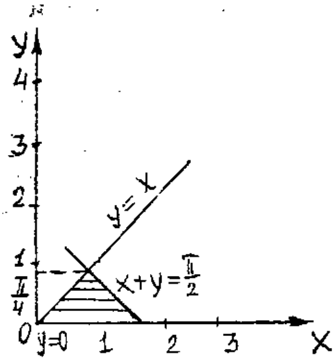



Рис. 7

Найдем ординату точки пересечения прямых $y = x,\ x + y = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 2y = \frac{\pi}{2};\ y = \frac{\pi}{4}$$

Значит $D = \left\{0 \le y \le \dfrac{\pi}{4};\ y \le x \le \dfrac{\pi}{2} - y\right\}$.

Поэтому

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)\,dx$$

Вычислим полученный интеграл, сначала проинтегрировав по $x$, считая $y$ постоянной, а затем полученный интеграл, проинтегрировав по $y$:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy\,(-\cos(x+y))\Big|_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - y + y\right) - \cos 2y\right)dy =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2y\right)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y\,dy = \frac{1}{2}\sin 2y\ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}$$

Отметим, что брать за внешнюю переменную интегрирования $x$

было бы неудобно, так как «верхняя» относительно оси Ох граница области D состоит из двух участков $y = x$, $x + y = \pi/2$.

Ответ: $1/2$.

**Пример 6**. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $x = 0$, $y = \frac{3}{2}x\ (x > 0)$, $y = 4-(x-1)^2$

**Решение.** Изобразим область интегрирования (рис.8), учитывая, что $y = 4-(x-1)^2$ - парабола симметричная относительно оси $Oy$, ветви вниз, вершина в точке (1,4).

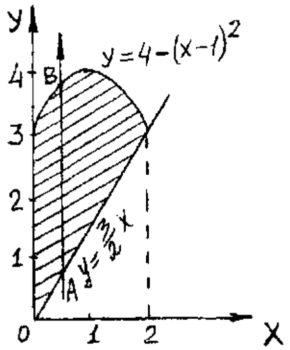



Рис. 8

Найдем точку пересечения параболы $y = 4-(x-1)^2$ и прямой $y = \frac{3}{2}x$ .

$$\begin{cases} y = 4-(x-1)^2 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x = 4-(x-1)^2,$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0;\ 2x^2 - x - 6 = 0,$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4};\ x_1=-\frac{3}{2};\ x_2=2$$

Нас интересует $x=2$. В области $D$ $x$ меняется от 0 до 2, чтобы найти, как меняется $y$ проведем прямую параллельную оси $Oy$ и отметим точки входа и выхода. Очевидно, что $\frac{3}{2}x\le y\le 4-(x-1)^2$, поэтому

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2}(x+y)dy=\int_0^2 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=\frac{3}{2}x}^{y=4-(x-1)^2}=\int_0^2\Big[x(4-(x-1)^2+$$

$$+\frac{(4-(x-1)^2)^2}{2}-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x\right)^2\Big]dx=\int_0^2\Big[4x-x(x^2-2x+1)+\frac{16-8(x-1)^2+(x-1)^4}{2}-$$

$$-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{8}x^2\Big]dx=\int_0^2\Big[3x-x^3+2x^2+8-4x^2+8x-4+\frac{1}{2}(x-1)^4-\frac{21}{8}x^2\Big]dx=$$

$$=\int_0^2\Big[11x-x^3-\frac{37}{8}x^2+4+\frac{1}{2}(x-1)^4\Big]dx=\Big[\frac{11}{2}x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{37}{24}x^3+4x+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^5}{5}\Big]\Bigg|_0^2=$$

$$=22-4-\frac{37}{3}+8+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=26-\frac{37}{3}+\frac{1}{5}=\frac{390-185+3}{15}=\frac{208}{15}$$

Ответ: $\frac{208}{15}$

**4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.**

Рассмотрим области $D$ и $G$ соответственно в плоскостях $xOy$ и $uOv$ (рис.9,10). Будем считать, что между областями $D$ и $G$ установлено взаимно однозначное и непрерывное соответствие. Пусть $u,v$ связаны с $x,y$ соотношениями $x=x(\mathrm{u},\mathrm{v}),\ y=y(\mathrm{u},\mathrm{v})$, где функции $x(u,v),y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в G и определитель преобразования координат $x,y$ в $u,v$ (якобиан) не обращается в нуль ни в одной точке области G

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

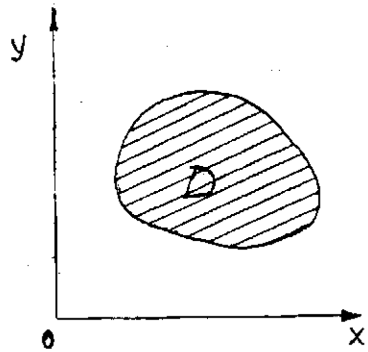



Рис. 9

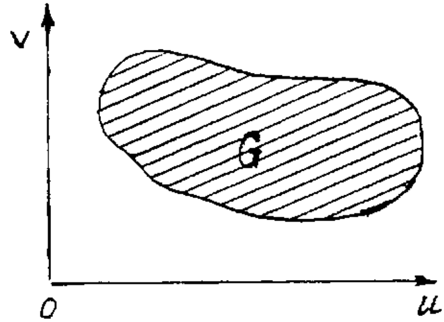



Рис.10

Тогда справедлива формула замены переменных:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv \qquad (6)$$

В тех случаях, когда область интегрирования $D$ представляет собой круг, часть круга, кольцо или часть кольца, удобно переходить к полярным координатам

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, J = r \qquad (7)$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (8)$$

Отметим, что уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, тоже нужно преобразовывать к полярным координатам с помощью формул (7).

**Пример 7.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, если область $D$ ограничена половиной дуги окружности $x^2 + y^2 = ax$ и отрезком оси $Ox$ от точки с абсциссой равной 0 до точки с абсциссой равной $a$.

**Решение.** Для построения области D найдем центр окружности:

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 -$$

окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{2},0\right)$ и $R=\frac{a}{2}$. Изобразим область D – полукруг (рис. 11)

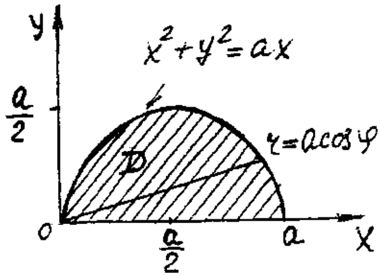



Рис. 11

Введем полярные координаты

$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$

Уравнение окружности в полярных координатах принимает вид

$r^2=ar\cos\varphi$ или $r_1=0, r_2=a\cos\varphi$

Подынтегральная функция имеет вид $y=r\sin\varphi$. Угол $\varphi$ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (полукруг находится в I четверти). При каждом фиксированном $\varphi$ радиус $r$ меняется от 0 (в начале координат) до $r=a\cos\varphi$ ( на окружности ). Тогда имеем

$$\iint\limits_D ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\sin\varphi rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=-\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\cos\varphi=-\frac{a^3}{12}\cos^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3}{12}$$

Ответ: $\frac{a^3}{12}$.

**Пример 8**. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^2 dxdy$, где область интегрирования D ограничена кривыми $x^2+(y-1)^2=1$, $x^2+(y-2)^2=4$.

**Решение.** Данные кривые являются окружностями

$x^2+(y-1)^2=1$ - центр в точке (0,1), $R_1=1$.

$x^2+(y-2)^2=4$ - центр в точке (0,2). $R_2=2$

Изобразим область D (рис.12).

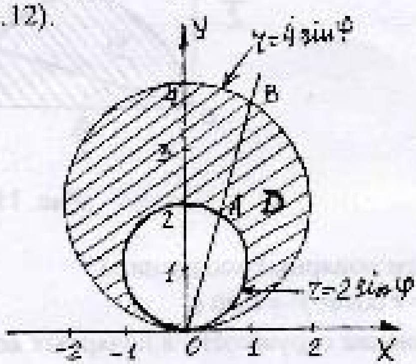



Рис.12

Введем полярные координаты

$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$

и преобразуем уравнения данных окружностей к полярным координатам

а) $x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi+(r\sin\varphi-1)^2=1$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-2r\sin\varphi=0 \Rightarrow r^2-2r\sin\varphi=0 \Rightarrow r(r-2\sin\varphi)=0$

$r_1=0$ ( это уравнение определяет единственную точку – полюс O(0,0))

$r_2=2\sin\varphi$ (это уравнение определяет всю окружность $x^2+(y-1)^2=1$ за исключением точки O(0.0)).

Итак, $r_1(\varphi)=0, r_2(\varphi)=2\sin\varphi$

б) $x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi+(r\sin\varphi-2)^2=4$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-4r\sin\varphi+4=4 \Rightarrow r^2-4r\sin\varphi=0 \Rightarrow r(r-4\sin\varphi)=0$

$r_3=0, r_4=4\sin\varphi$ - описывает всю окружность $x^2+(y-2)^2=4$ за исключением точки $O(0,0)$

Подынтегральная функция имеет вид $xy^2 = r\cos\varphi\, r^2 \sin^2\varphi =$ $= r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi$. Угол $\varphi$ меняется от 0 до $\pi$ (I и II четверти). Чтобы найти, как меняется $r$ проведем радиус и отметим точки входа и выхода. Точка входа $A$ лежит на окружности $r = 2\sin\varphi$, а точка выхода $B$ – на окружности $r = 4\sin\varphi$, т.е. $2\sin\varphi \le r \le 4\sin\varphi$. Используя формулу перехода к полярным координатам в двойном интеграле, имеем

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \iint\limits_D r^3 \sin^2\varphi\cos\varphi\, rdrd\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^4 \sin^2\varphi\cos\varphi\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^4 dr = \frac{1}{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\, r^5 \Big|_{r=2\sin\varphi}^{r=4\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\,(1024\sin^5\varphi - 32\sin^5\varphi)d\varphi = \frac{992}{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^7\varphi\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{992}{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^7\varphi\, d\sin\varphi = \frac{992}{5}\frac{\sin^8\varphi}{8}\Big|_0^{\pi} = 0$$

Ответ: 0.

## § 2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

### 1. Определение тройного интеграла

Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой пространственной области $B$. Разобьем ее произвольным образом на $n$ частей $B_i, i = 1,\dots,n$. Через $\Delta V_i$ обозначим объемы этих областей $B_i$, а через $d_i, i = 1,\dots,n$ - диаметры $B_i$. Выберем произвольно точки $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ в каждой из областей $B_i$ и вычислим $f(P_i)$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i \qquad (9)$$

Определение Если существует конечный предел интегральной суммы при условии, что наибольший из диаметров $d_i$ стремится к нулю и этот предел не зависит ни от способа разбиения области $B$ на части, ни от выбора точек $P_i$, то его называют тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области $B$ и обозначают

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i \qquad (10)$$

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

## 2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Пусть область интегрирования $B = \{(x,y,z) : (x,y) \in B_{xy}, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$, где $B_{xy}$ - проекция $B$ на плоскость $xOy$, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ - непрерывные функции (рис.13).

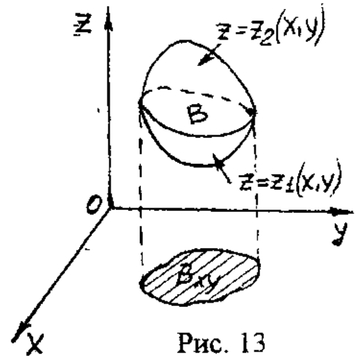



Рис. 13

Тогда

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{B_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (11)$$

То есть вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению определенного интеграла по переменной $z$ (при этом $x,y$ рассматриваются как постоянные) и двойного интеграла с переменными $x,y$ по области $B_{xy}$

Если к тому же известно, что

$$B_{xy} = \{(x,y): a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

то из равенства (11) получим

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

**Пример 9.** Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G xzdxdydz$, если область G ограничена плоскостями: $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.

**Решение.** Построим данные плоскости (рис. 14).

Рис. 14

Ограниченная ими область $G$ есть тетраэдр $OABC$. Снизу область ограничена плоскостью $z=0$, сверху – плоскостью $x+y+z=1$ (или $z=1-x-y$). Поэтому по формуле вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_G xzdxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_0^{1-x-y} xzdz$$

Вычислим внутренний интеграл по $z$, считая при этом $x,y$ – постоянными величинами

$$\iint\limits_{G_{xy}} xdxdy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \iint\limits_{G_{xy}} xdxdy \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y} = \frac{1}{2}\iint\limits_{G_{xy}} x(1-x-y)^2 dxdy =$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{G_{xy}} x(1-2(x+y)+(x+y)^2)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{G_{xy}}(x-2x^2-2xy+x(x^2+2xy+y^2))dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{G_{xy}}(x-2x^2-2xy+x^3+2x^2y+xy^2))dxdy$$

Вычислим теперь полученный двойной интеграл по области $G_{xy}$. Эта область - простая и относительно оси Ох и относительно оси Оу. Имеем

$$\frac{1}{2}\iint_{G_{xy}}(x-2x^2-2xy+x^3+2x^2y+xy^2))dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-2x^2-2xy+$$

$$+x^3+2x^2y+xy^2)dy=\frac{1}{2}\int_0^1(xy-2x^2y-\frac{2xy^2}{2}+x^3y+\frac{2x^2y^2}{2}+x\frac{y^3}{3})\Big|_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[x(1-x)-2x^2(1-x)-x(1-x)^2+x^3(1-x)+x^2(1-x)^2+\frac{x}{3}(1-x)^3]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{x}{3}-3x^2+3x^3+2x^2-x^3-x^4+x^2-2x^3+x^4+x-x^2+x^3-\frac{x^4}{3})dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x}{3}-x^2+x^3-\frac{x^4}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{15}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{15}\right)=\frac{10-20+15-4}{120}=\frac{1}{120}$$

Ответ: $\frac{1}{120}$.

**3. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.**

Замена переменных в тройном интеграле производится аналогично тому, как это делается в двойном интеграле:

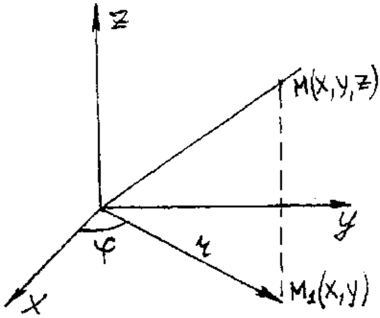
$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|dudvdw \quad (12)$$

где

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Чаще всего используются цилиндрические и сферические координаты

а) цилиндрические координаты



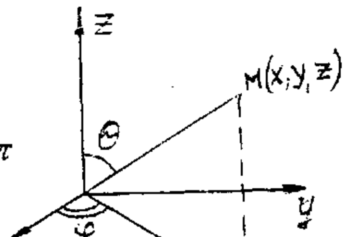

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r < \infty \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

$$|J| = r$$

(13)

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{G_{r\varphi}} d\varphi dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdz \qquad (14)$$

б) сферические координаты




$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & 0 \le r < \infty \\ z = r\cos\theta & 0 \le \theta < \pi \end{cases} \qquad (15)$$

$$|J| = r^2\sin\theta$$

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$$

(16)

**Пример 10.** Вычислить $\iiint\limits_G dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z$.

**Решение.** Первая поверхность – сфера, вторая поверхность – параболоид. Уравнение сферы преобразуем к виду $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. То есть центр в точке (0,0,1), радиус 1. У параболоида вершина в точке (0,0,2), ветви вниз. Сделаем чертеж (рис.15)

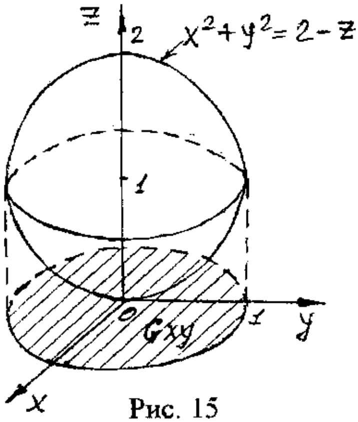



Рис. 15

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Очевидно, что это окружность. Определим, на какой высоте $z$ над плоскостью $xOy$ расположена эта окружность. Подставляя выражение $x^2+y^2$ из второго уравнения в первое, получим

$$(2-z)+(z-1)^2=1 \quad \text{или} \quad 2-z+z^2-2z+1=1 \Rightarrow z^2-3z+2=0,$$

$$z_1=1;\ z_2=2.$$

Но точка (0,0,2) – это вершина параболоида, поэтому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z$=1 над плоскостью $xOy$. Уравнение этой линии получим, подставляя $z$=1 в уравнение любой из данных поверхностей:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1$$

Эта окружность без искажений проектируется в $xOy$, а все тело проектируется в круг $G_{xy}$, ограниченный этой окружностью. Так как область снизу ограничена сферой, то выражая $z$ из ее уравнения, получим $z_1 = 1 \pm \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. Учтем, что на нижней полусфере $z<1$, т.е. $z_1 = 1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$. Сверху область G ограничена параболоидом, поэтому, выражая $z$ из его уравнения, получим $z_2 = 2-(x^2+y^2)$. По правилу вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy(2-(x^2+y^2)-1+\sqrt{1-(x^2+y^2)}) =$$

$$= \iint\limits_{G_{xy}} (1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)})dxdy$$

Поскольку область интегрирования круг, то удобно перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Тогда подынтегральная функция примет вид $1-r^2+\sqrt{1-r^2}$, а $dxdy$ заменится на $rdrd\varphi$. Так как в круге $G_{xy}$ радиус r меняется от 0 до 1, а угол φ от 0 до 2π, то получим

$$\iint\limits_{G_{xy}} (1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)})dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1-r^2+\sqrt{1-r^2})rdr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r-r^3+\sqrt{1-r^2}\cdot r)dr = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}+\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big)\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}[(1-1)^{3/2}-1^{3/2}]\Big)d\varphi = \frac{7}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{7}{6}\pi$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6}$

**Пример 11.** Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz$, если область G – шар $x^2+y^2+z^2 \le 1$

**Решение.** Начертим область G (рис.16)

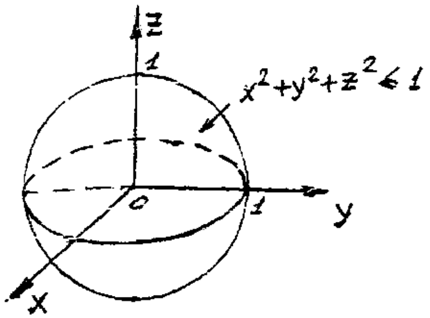



Рис. 15

В данном случае удобно воспользоваться сферическими координатами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$dxdydz \to r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$

Тогда

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} [(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2]\, r^2\sin\theta drd\varphi d\theta =$$

$$= \iiint r^4\sin^3\theta drd\varphi d\theta = \int\limits_0^1 dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} r^4\sin^3\theta d\theta = \int\limits_0^1 r^4dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= \int\limits_0^1 r^4dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}(\cos^2\theta - 1)d\cos\theta = \int\limits_0^1 r^4dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \int\limits_0^1 r^4dr\int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 1\right)d\varphi = \frac{4}{3}\int\limits_0^1 r^4dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}2\pi\frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{15}$.

## § 3. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

### 1. Геометрические приложения

**а)** *Вычисление площадей плоских фигур*

$$S_D = \iint_D dxdy \tag{17}$$

**б)** *Вычисление объема цилиндрического тела*

Если тело ограничено сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$ снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости $xOy$ область $D$, то объем такого тела вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{18}$$

**в)** *Вычисление площади поверхности*

Площадь гладкой поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$, определяется формулой

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy, \tag{19}$$

где $D$ – проекция поверхности на плоскость $xOy$

**г)** *Вычисление объема произвольного тела*

Объем произвольного тела G находится по формуле

$$V = \iiint_G dxdydz \tag{20}$$

**Пример 12.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь области, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

**Решение.** Удобно ввести так называемые обобщенные полярные координаты, положив $x = 2r\cos\varphi, y = 3r\sin\varphi$. Найдем якобиан данного преобразования

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\kappa \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r\cos^2\varphi + 6r\sin^2\varphi = 6r,$$

$$|J| = 6r.$$

Преобразуем уравнение кривой:

$$\left(\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}\right)^2=\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}-\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}$$

$$r^4=r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi);\ r^2=\cos2\varphi;\ r=\sqrt{\cos2\varphi}$$

Функция определена, если $\cos 2\phi \geq 0$, т.е.

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k\leq 2\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$k=0\rightarrow\quad -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$$

$$k=1\rightarrow\quad \frac{3\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{5\pi}{4}$$

Построим данную область (рис.17)

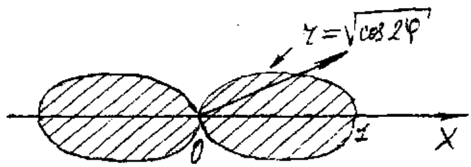



Рис. 17

В силу симметрии достаточно посчитать площадь половинки лепестка.

При этом φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а радиус от 0 до $\sqrt{\cos 2\varphi}$, поэтому

$$S_D=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\cos2\varphi}}6r\,dr=24\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\cos2\varphi}}=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\varphi\,d\varphi=\frac{12}{2}\sin2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=6\cdot1=6\,(e\partial^2)$$

Ответ: 6 $ед^2$.

**Пример 13.** Найти объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$ и плоскостями $x+z=6, z=0$.

**Решение.** Построим цилиндрические поверхности. Направляющими линиями их являются параболы $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$, лежащие в плоскости *xOy*, а образующая параллельна *Oz*. Построим затем плоскости $x+z=6, z=0$.

Данное тело представляет собой цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $x+z=6$, снизу частью координатной плоскости *xOy*, заключенной между параболами $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$ (рис. 18).

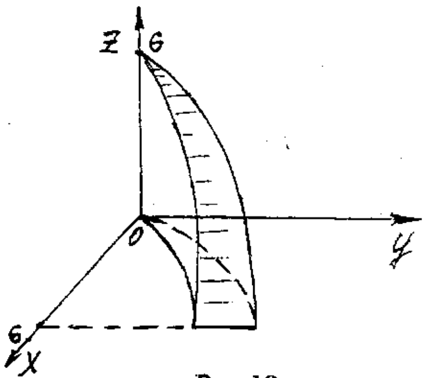



**Рис.18**

Согласно формуле (18) объем этого тела равен двойному интегралу:

$$V=\iint\limits_D(6-x)dxdy=\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\int\limits_0^6(6-x)y\left|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}}\right.dx=\int\limits_0^6(6-x)\sqrt{x}dx=$$

$$=6\frac{x^{3/2}}{3/2}\left|_0^6\right.-\frac{x^{5/2}}{5/2}\left|_0^6\right.=4\cdot 6^{3/2}-\frac{2}{5}6^{5/2}=24\sqrt{6}-\frac{72}{5}\sqrt{6}=\frac{48}{5}\sqrt{6}\,(ед^3)$$

Ответ: $\frac{48}{5}\sqrt{6}\ ед^3$.

**Пример 14.** Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=4, x=3, y=2, x=0, y=0, z=0$.

**Решение.** Заданные плоскости ограничивают шестигранник G (рис.19).

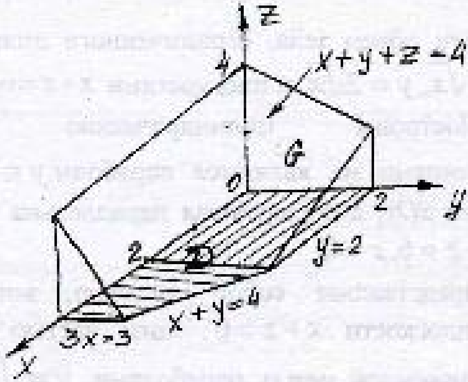



Рис. 19

Согласно формуле (20)

$$V=\iiint\limits_{G} dxdydz=\iint\limits_{D}\Big(\int\limits_{0}^{4-x-y} dz\Big)dxdy=\iint\limits_{D}(4-x-y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{2}(4-x-y)dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{0}^{4-x}(4-x-y)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}\Big(4y-xy-\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=2}dx+\int\limits_{2}^{3}\Big(4y-xy-\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=4-x}dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{2}(3-x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}(16-8x+x^2)dx=2\Big(3x-\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{0}^{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(16x-4x^2+\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{2}^{3}=\frac{55}{6}(ед^3)$$

Ответ: $\frac{55}{6}(ед)^3$

## 2. Физические приложения кратных интегралов

а) *Вычисление массы*

Если пластинка занимает область $D$ плоскости $xOy$ и имеет поверхностную плотность $f(x,y)$, то масса пластинки выражается двойным интегралом:

$$m = \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (21)$$

Если плотность тела, занимающего область G $f(x,y,z)$, то масса этого тела вычисляется по формуле:

$$m = \iiint_G f(x,y,z)dxdydz \qquad (22)$$

б) *Нахождение координат центра тяжести*

Координаты центра тяжести пластинки находятся по формулам

$$x_C = \frac{\iint_D xf(x,y)dxdy}{m}, \qquad y_C = \frac{\iint_D yf(x,y)dxdy}{m}, \qquad (23)$$

где $m$ – масса пластинки (формула (21)), а величины

$$M_x = \iint_D yf(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint_D xf(x,y)dxdy$$

называются статистическими моментами пластинки относительно осей координат $Ox$ и $Oy$.

Аналогично находятся координаты центра тяжести тела, занимающего область G:

$$x_C = \frac{\iiint_G xf(x,y,z)dxdydz}{m} \quad y_C = \frac{\iiint_G yf(x,y,z)dxdydz}{m}$$

$$z_C = \frac{\iiint_G zf(x,y,z)dxdydz}{m} \qquad (24)$$

Величины $\quad M_{yz} = \iiint_G xf(x,y,z)dxdydz,$

$$M_{xz} = \iiint_G yf(x,y,z)dxdydz, \quad ,M_{xy} = \iiint_G zf(x,y,z)dxdydz, \qquad (25)$$

называются статистическими моментами $G$ относительно координатных плоскостей.

**в)** *Нахождение моментов инерции.*

Моменты инерции пластинки относительно осей $Ox, Oy$ и $Oz$, начала координат $O$, а также относительно координатных плоскостей $xOy$, $xOz$, $yOz$, вычисляются по формулам

$$J_x = \iiint_G (y^2 + z^2) f(x,y,z)dxdydz \quad J_y = \iiint_G (x^2 + z^2) f(x,y,z)dxdydz$$

$$J_z = \iiint_G (x^2 + y^2) f(x,y,z)dxdydz \tag{26}$$

$$J_{xy} = \iiint_G z^2 f(x,y,z)dxdydz \qquad J_{xz} = \iiint_G y^2 f(x,y,z)dxdydz$$

$$J_{yz} = \iiint_G x^2 f(x,y,z)dxdydz \tag{27}$$

$$J_O = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) f(x,y,z)dxdydz, \tag{28}$$

Для однородного тела $f(x,y,z) = 1$

**Пример 15.** Найти массу тела с плотностью $f(x,y,z) = x + y + z$, ограниченного плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

**Решение.** Тело, массу которого мы находим, является прямоугольным параллелепипедом. Согласно формуле (22) имеем

$$m = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(x+y+z)^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 [(x+y+1)^2 - (x+y)^2]dy =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 [(x+y+1)^3 - (x+y)^3] \Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 [(x+2)^3 - (x+1)^3 - (x+1)^3 + x^3] =$$

$$=\frac{1}{6}\Big[\frac{(x+2)^4}{4}-\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{x^4}{4}\Big]\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

**Пример 16.** Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $y=3-x^2-z^2$ и плоскостью $y=0$ $(y\geq 0)$ (рис.20).

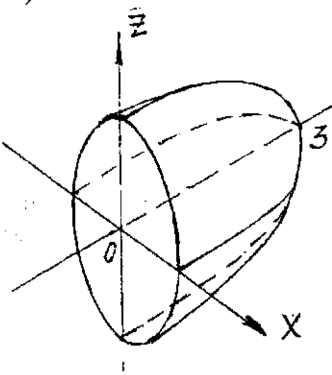



Рис. 20

**Решение.** Так как тело однородно, то $f(x,y,z)=1$. В силу симметрии тела относительно координатных плоскостей $yOz$ и $xOy$ $x_C=z_C=0$. Для нахождения $y_C$ найдем массу тела $m$. Введем цилиндрические координаты

$$x=r\cos\varphi, z=r\sin\varphi, y=y.$$

Тогда имеем

$$m=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_0^{3-r^2}dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}r\cdot y\Big|_{y=0}^{y=3-r^2}dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}r(3-r^2)dr=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\Big(\frac{3}{2}r^2-\frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^{\sqrt{3}}=4\Big(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\Big)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{9\pi}{2}$$

$$y_C = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{3-r^2} y dy}{\frac{9\pi}{2}} = \frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3-r^2} dr =$$

$$= \frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2)^2 dr = -\frac{1}{18\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3-r^2) d(3-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{18\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(3-r^2)^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = 1$$

Ответ: $x_C = z_C = 0; y_C = 1$.

**Пример 17.** Вычислить момент инерции однородной пирамиды относительно координатной плоскости $xOy$, если пирамида ограничена плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

**Решение.** Согласно формулам (27) имеем

$$J_{xy} = \iiint_G z^2 dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z^2 dz = \frac{1}{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} z^3 \Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 dy = -\frac{1}{12}\int_0^1 (1-x-y)^4 \Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 (1-x)^4 dx = -\frac{1}{60}(1-x)^5 \Bigg|_0^1 = \frac{1}{60}$$

Ответ: $\frac{1}{60}$.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Представить $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде двукратного, если область интегрирования $D$ ограничена линиями

а) $y = x, x = 2, xy = 1$

б) $x + y = 10, x - y = 4, y = 0, y = x^3$

в) $x^2 + y^2 = 4, x + y = 2\ (x \geq 0, y \geq 0)$

г) $x^2 + y^2 \geq 4x, x^2 + y^2 \leq 8x, y > x, y \leq 2x$

д) $x^2 + (y+2)^2 \leq 4$

е) $x^2 + y^2 \leq 3x, x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}y$

**2.** Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$  г) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-2-y}^{1} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)dx$

б) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$  д) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy - \int\limits_{1}^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2} f(x,y)dy$

в) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$  е) $\int\limits_{0}^{\sqrt{13}} dx \int\limits_{0}^{6} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{13}}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{49-x^2}} f(x,y)dy$

Вычислить двойные интегралы

**3.** $\iint\limits_{D} xy\,dxdy$, где $D$ – область, ограниченная линиями

$$y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 1$$

**4.** $\iint\limits_{D} (x - y)dxdy$, где $D$ – область, ограниченная линиями

$$y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 3$$

**5.** $\iint\limits_{D} (y - 2)dxdy$, где $D$ – область, ограниченная линиями

$$y = x^2, y = 2x^2, x = 1$$

6. $\iint\limits_D (9x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$ , где D – область, ограниченная линиями

$$y=\sqrt{x},\ y=-x^3,\ x=1$$

7. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ , где $D: x^2+y^2\le 4, y\ge x$

8. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , где $D: 0<x^2+y^2\le 1, y\ge x, y\le\sqrt{3}x$

Найти площадь, ограниченную линиями

9. $3x-2y-6=0, y=4-x^2$

10. $xy=4, x^2=4y, x=0, y=4$

11. $x^2+y^2-2Ry=0, x=0$

12. $y=4e^x, y=\frac{3}{x}$

13. $y=x^2+1, x=3-y$

14. $(x-2)^2+y^2=4, (x-4)^2+y^2=16$

Вычислить тройные интегралы

15. $\iiint\limits_G (x-1)dxdydz$ , где G – область, ограниченная плоскостями

$$x+y+z=2, x=0, y=0, z=0$$

16. $\iiint\limits_G xdxdydz$ , где $G: z\le x^2+y^2, z\le 9$

17. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , где $G: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0$

18. $\iiint\limits_G (x^2-y)dxdydz$ где G – область, ограниченная поверхностями

$$z=x^2+y^2, x^2+y^2=1, z=0$$

Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

**19.** $z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12\,(y \ge 0); x = 0, y = 0, z = 0$

**20.** $z = 0, y = 1, z = x^2 + y^2, y = x^2$

21. $x^2 + z^2 = R^2, x^2 + z^2 = y^2, y = 0$

**22.** $y = \sqrt{2x}, x + y = 4, z = 3y, z = 0$

**Найти площадь поверхности**

23. части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, заключенной в первом октанте

**24.** части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостью $z = 1$

25. шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

# ГЛАВА II

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

### 1. Понятие криволинейного интеграла первого рода

Пусть $f(P)=f(x,y)$ есть функция непрерывная в некоторой области на плоскости $xOy$ и $l$ - некоторая плоская кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Разобьем кривую системой точек на элементарные дуги $l_1, l_2, \ldots, l_n$. На каждой элементарной дуге $l_i$ ($i$=1,2,3,…,$n$) выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и умножим значение функции $f$ в этой точке на длину $\Delta s_i$ элементарной дуги $l_i$. Сумма таких произведений по всем элементарным дугам:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i \tag{1}$$

называется *интегральной суммой*. Обозначим $\max \Delta s_i$ наибольшую из длин всех элементарных дуг.

<u>Определение.</u> *Криволинейным интегралом первого рода* $\int_l f(P)ds$ *от функции* $f(P)$ *по кривой* $l$ *называется предел интегральных сумм при условии* $\max \Delta s_i \to 0$, т.е. при неограниченном увеличении числа элементарных дуг, когда все элементарные дуги стягиваются в точку:

$$\int_l f(P)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i . \tag{2}$$

### 2. Свойства криволинейных интегралов первого рода

Криволинейный интеграл первого рода обладает следующими простейшими свойствами:

1) $\int_l (C_1 f_1 + C_2 f_2)ds = C_1 \int_l f_1 ds + C_2 \int_l f_2 ds;$

2) если кривая $l$ состоит из двух кривых $l_1$ и $l_2$, то

$\int_l f(P)ds = \int_{l_1} f(P)ds + \int_{l_2} f(P)ds\,;$

3) криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления дуги интегрирования, т.е. $\int_{AB} f(P)ds = \int_{BA} f(P)ds$.

### 3. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода пользуются одной из следующих формул:

а) если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$ds = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx \text{ и } \int_l f(P)ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)]\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx; \qquad (3)$$

б) если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t), y = \phi(t), (\alpha \le t \le \beta)$,

то $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\phi'(t)]^2}\,dt$ и

$$\int_l f(P)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \phi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\phi'(t)]^2}\,dt; \qquad (4)$$

в) если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$ $(\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$ ,

то $ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$ и

$$\int_l f(P)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi. \qquad (5)$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы от непрерывной в некоторой пространственной области функции $f(M) = f(x, y, z)$ по длине дуги пространственной кусочно-гладкой кривой $L$, расположенной в этой области, т.е.

$$\int_L f(M)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i .$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), y = y(t), z = z(t), (\alpha \le t \le \beta)$,

то

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

и

$$\int_L f(M)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt. \qquad (6)$$

**Пример 1.** Вычислить $\int_l \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где $l$ - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

**Решение.** Запишем уравнение прямой $l: y=2x$. Для данной линии $ds=\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}dx$. При движении от $O$ к $A$ $x$ меняется от 0 до 1.

По формуле (3) имеем

$$\int_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}}=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1=\ln\left|1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right|.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int_l \sqrt{y^2+z^2}ds$, где $l$ - контур окружности $y^2+z^2=ay(a>0)$.

**Решение.** Введем полярные координаты:
$y=r\cos\varphi, z=r\sin\varphi$.

Уравнение окружности принимает вид:
$r^2=ar\cos\varphi$ или $r=a\cos\varphi$;
тогда
$r'=-a\sin\varphi$ и $ds=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=ad\varphi$.

Так как окружность расположена в той части плоскости $Oxy$, где $y\geq 0$, то угол $\varphi$ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. По формуле (5) имеем

$$\int_l \sqrt{y^2+z^2}ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} rad\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=a^2+a^2=2a^2.$$

**Пример 3.** Вычислить $\int_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, где $L$ - дуга кривой, заданной параметрически: $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\leq t\leq 2\pi)$.

**Решение.** Так как $ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2},\ dt=\sqrt{2+t^2}dt$, то по формуле (6) имеем

$$\int_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)ds=\int_0^{2\pi}\left(2t-\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\right)\sqrt{2+t^2}dt=\int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}dt=$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[\left(2+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

## § 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

### 1. Понятие криволинейного интеграла второго рода

Криволинейный интеграл второго рода от непрерывной в некоторой области плоскости $Oxy$ функции $P(x,y)$ по координате $x$ вдоль дуги плоской кусочно-гладкой кривой $l$, расположенной в этой области, связан с ранее рассмотренным криволинейным интегралом первого рода соотношением:

$$\int_l P(x,y)dx = \int_l P(x,y)\cos\alpha ds,$$

где $\alpha$ - угол между касательной, проведенной к кривой в любой ее точке, и положительным направлением оси $Ox$ (рис.1).

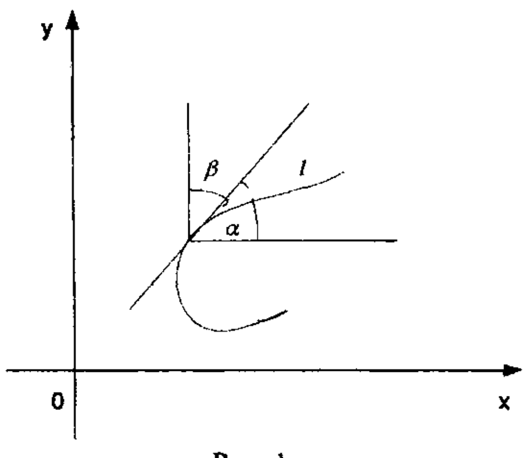



Рис. 1

Аналогично,

$$\int_l Q(x,y)dy = \int_l Q(x,y)\cos\beta ds,$$

где $\beta$ - угол между касательной, проведенной к кривой в любой ее точке, и положительным направлением оси $Oy$ (см.рис.1). Очевидно, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\cos\beta = \sin\alpha$.

Обычно рассматривают сумму интегралов по координате $x$ и по координате $y$, которая записывается в виде:

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (7)$$

Криволинейные интегралы второго рода обладают теми же простейшими свойствами, что и интегралы первого рода. Однако в отличие от последних они зависят от выбора направления обхода кривой, если изменить направление обхода, то интеграл (7) меняет знак, т.е.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

**2. Вычисление криволинейных интегралов второго рода**

Для вычисления интеграла (7) пользуются одной из следующих формул:

а) если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$ и при перемещении из точки $A$ в точку $B$ $x$ меняется от $a$ до $b$, то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)dx; \qquad (8)$$

б) если кривая задана уравнениями $x = \varphi(t), y = \phi(t)$ и при перемещении из точки $A$ в точку $B$ параметр $t$ меняется от $\alpha$ до $\beta$, то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt \qquad (9)$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы второго рода от непрерывных в некоторой пространственной области функций $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, вдоль дуги пространственной кусочно-гладкой кривой $l$, расположенной в этой области, т.е.

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Если кривая задана параметрическим уравнением

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

то

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt \quad (10)$$

**Пример 4.** Вычислить $\int_l (x^2-2xz)dx+(z^2-2xz)dz$, где $l$ - дуга параболы $z=x^2$, пробегаемая от точки A(-1,1) до точки B(1,1) (рис.2).

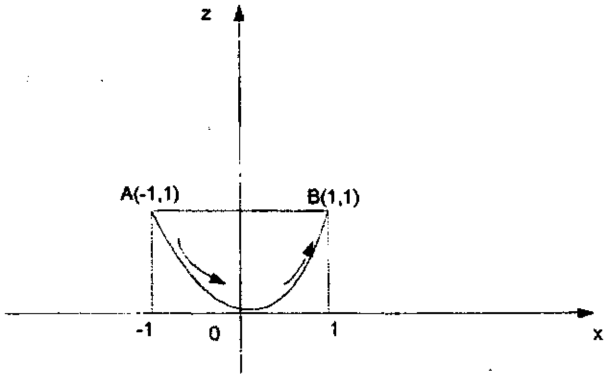



Рис. 2

**Решение.** Так как $z=x^2, z'=2x$ и при движении из точки $A$ в точку $B$ $x$ меняется от $-1$ до 1, то по формуле (8) имеем:

$$\int_l (x^2-2xz)dx+(z^2-2xz)dz=\int_{-1}^{1}\left\{(x^2-2x\cdot x^2)+\left[(x^2)^2-2x\cdot x^2\right]2x\right\}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}.$$

**Пример 5.** Вычислить $\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, где $L$ - отрезок прямой, соединяющий точки A(1,1,1) и B(2,3,4).

**Решение.** Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, имеет вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4}(=t), \text{ или } x=t+1, y=2t+1, z=3t+1.$$

При передвижении от точки $A$ к точке $B$ параметр $t$ меняется от 0 до 1; по формуле (10) имеем:

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 (t+1)dt + (2t+1)2dt + (t+1+2t+1-1)3dt =$$

$$= \int_0^1 (14t+6)dt = \left(7t^2+6t\right)\Big|_0^1 = 7+6 = 13.$$

## § 3. ФОРМУЛА ГРИНА

Пусть $l$ - кусочно-гладкий контур на плоскости $xOy$, а $D$ - ограниченная этим контуром замкнутая область. В области $D$ заданы непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие в этой области непрерывные частные производные. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (11)$$

где направление на контуре $l$ выбрано так, чтобы при движении по контуру область $D$ все время оставалась слева (рис. 3).

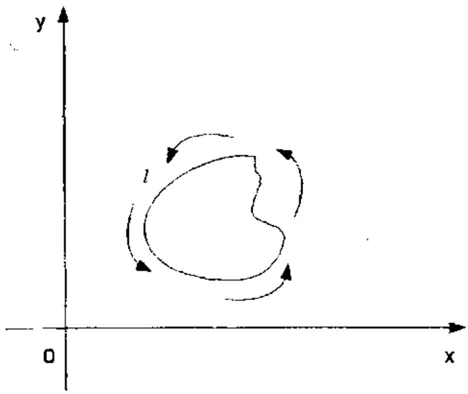



Рис. 3

Условием независимости криволинейного интеграла $\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от пути интегрирования является равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Если же, кроме того $l$ - контур замкнутый, то $\oint\limits_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

**Пример 6.** Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$, где $l$ - контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$ (рис.4).

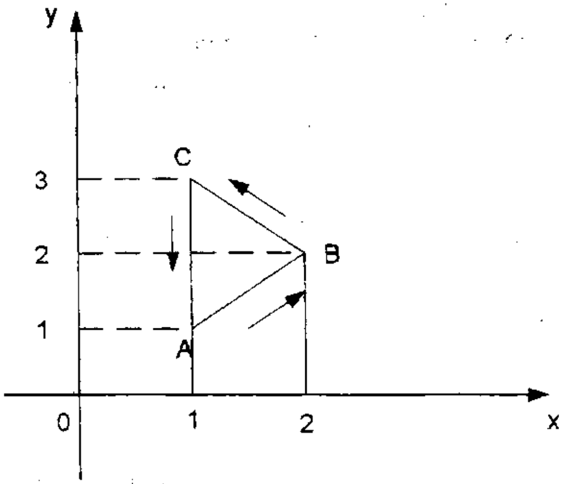



Рис. 4

**Решение.** В данном случае $P = 2(x^2+y^2)$, $Q = (x+y)^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y), \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$. Применяя формулу Грина, получаем:

$$\oint\limits_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \iint\limits_{\Delta ABC} [2(x+y) - 4y]dxdy.$$

Вычисляя двойной интеграл, найдем

$$\oint\limits_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = 2\int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x-y)dy =$$

$$= -\int_1^2 (x-y)^2 \Big|_x^{-x+4} dx = -4\int_1^2 (x-2)^2 dx = -\frac{4}{3}(x-2)^3 \Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

**Пример 7.** Вычислить $\int_l x^2dx + z^2dz$, где $l$ - верхняя половина окружности $x^2 + z^2 = 4$, пробегаемая по ходу часовой стрелки и лежащая в плоскости $xOz$.

**Решение.** В данном случае $P = x^2, Q = z^2$, и так как $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, то результат интегрирования не зависит от пути.

Интегрирование по верхней половине окружности заменим интегрированием по отрезку оси $Ox$, соединяющему точки пересечения окружности А(-2,0) и В(-2,0) с осью $Ox$. На этом отрезке $z = 0$ и $dz = 0$, а $x$ меняется от –2 до 2. Следовательно:

$$\int_l x^2dx + z^2dz = \int_{-2}^{2} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

**Пример 8.** Вычислить $\oint_l \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$, где $l$ - окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

**Решение.** Контур $l$ - замкнутый, $P = \frac{x}{x^2 + y^2}, Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$ и $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, поэтому по формуле Грина данный интеграл равен нулю.

## §4. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1) Площадь области $D$, ограниченной замкнутым контуром $l$, находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint_l xdy - ydx, \tag{12}$$

где направление пути обхода контура $l$ выбрано так, что область $D$ остается все время слева от пути интегрирования.

2) Пусть $l$ есть плоская кривая с линейной плотностью массы $\eta(x, y)$, тогда

а) масса $m$ кривой $l$ вычисляется по формуле:

$$m = \int_l \eta(x, y)ds; \qquad (13)$$

б) координаты центра тяжести кривой $l$ вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{\int_l x\eta(x, y)ds}{m} \text{ и } y_0 = \frac{\int_l y\eta(x, y)ds}{m}; \qquad (14)$$

в) моменты инерции $I_x, I_y$ и $I_0$ соответственно относительно осей $Ox, Oy$ и начала координат равны:

$$I_x = \int_l y^2\eta(x, y)ds,\ I_y = \int_l x^2\eta(x, y)ds,\ I_0 = \int_l \left(x^2 + y^2\right)\eta(x, y)ds \quad (15)$$

3) Пусть $F = P(x, y)i + Q(x, y)j$ есть переменная сила, совершающая работу $W$ вдоль пути $l$ и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой $l$; тогда

$$W = \int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (16)$$

**Пример 9.** Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a\cos t, y = b\sin t$.

**Решение.** Из формулы (12) следует, что

$$S = \frac{1}{2}\oint_l xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos tb\cos t + b\sin ta\sin t)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

**Пример 10.** Найти массу четверти эллипса $x = \cos t, z = 2\sin t$, расположенного в первом квадранте плоскости $Oxz$, если линейная плотность массы $\eta = z$.

**Решение.** Из формулы (13) следует, что $m = \int_l zds$. Из уравнения кривой $l$ находим:

$$ds = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt.$$

Очевидно, что параметр $t$ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$; тогда:

$$m=\int_l zds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}dt=$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 t}d(\cos t)=-2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2 t}d(\cos t)=,$$

Положив $\cos t=u$, получим:

$$m=-2\sqrt{3}\int_1^0\sqrt{\frac{1}{3}+u^2}du=2\sqrt{3}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{3}+u^2}du;$$

$$m=2+\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$$

**Пример 11.** Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, если $(0\le t\le 2\pi)$.

**Решение.** В силу симметрии кривой относительно прямой $x=\pi$ получаем $x_0=\pi$. Найдем теперь $m$, а затем $y_0$. Из уравнения циклоиды находим, что

$$ds=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt,$$

тогда

$$m=\int_l ds=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}=4a+4a=8a;$$

$$y_0=\frac{\int_l yds}{m}=\frac{\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt}{8a}=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}=$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-a\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-a\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4a}{3}.$$

**Пример 12.** Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти однородной окружности

$y = 2\cos t, z = 2\sin t$, лежащей в первом квадранте плоскости $yOz$.

**Решение.** В силу одинакового расположения кривой по отношению координатных осей $I_y = I_z$. По формулам (15) получаем:

$$I_y = I_z = \int_l z^2 ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 4\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2\pi;$$

$$I_0 = \int_l \left(x^2 + y^2\right)ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 8t\Big|_0^{\pi/2} = 4\pi.$$

**Пример 13.** Вычислить работу силы $F = yzi + (y+z)j$ при перемещении точки массы $m$ из точки $O(0,0)$ в точку $A(1,1)$ по прямой $z = y$, лежащей в плоскости $yOz$.

**Решение.** Из формулы (16) следует, что

$W = \int_l yzdy + (y+z)dz$. Так как мы интегрируем по прямой $z = y$ и при перемещении из точки $O$ в точку $A$ $y$ меняется от 0 до 1, получаем:

$$W = \int_0^1 y\cdot ydy + (y+y)dy = \int_0^1 \left(y^2 + 2y\right)dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + y^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вычислить следующие криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int_l y^2 ds$, где $l$ - арка циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2. $\int_l \frac{ds}{x-z}$, где $l$ - отрезок прямой $z=\frac{1}{2}x-2$, соединяющий точки $A(0,-2)$ и $B(4,0)$, лежащие в плоскости $xOz$.

3. $\int_l yzds$, где $l$ - контур прямоугольника с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$, лежащих в плоскости $yOz$.

4. $\int_l yds$, где $l$ - дуга параболы $y^2=2px$, отсеченная параболой $x^2=2py$.

5. $\int_l \left(z^2+y^2\right)^n ds$, где $l$ - окружность $z^2+y^2=a^2$.

6. $\int_l \sqrt{x^2+y^2}ds$, где $l$ - дуга кривой
$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

7. $\int_L \left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, где $L$ - дуга кривой
$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода:

8. $\int_l y^2dx+x^2dy$, где $l$ - верхняя половина эллипса $x=2\cos t$, $y=b\sin t$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

9. $\int_l 2yzdy-y^2dz$, если $l$ - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(2,1)$, лежащие в плоскости $yOz$.

10. $\int_l 2xzdx-x^2dz$, если $l$ - дуга параболы $z=\frac{1}{4}x^2$, пробегаемая от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,1)$, которые лежат в плоскости $yOz$.

11. $\int_l 2xydx-x^2dy$, если $l$ - дуга параболы $x=2y^2$, пробегаемая от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,1)$.

12. $\int_l 2yzdy-y^2dz$, если $l$ - ломаная линия, первое звено которой соединяет точки $O(0,0)$ и $B(2,0)$, а второе – точки $B(2,0)$ и $A(2,1)$, лежащие в плоскости $yOz$.

13. $\int_l \cos zdx-\sin xdz$, если $l$ - отрезок прямой, соединяющей точки

$A(2,-2)$ и $B(-2,2)$, лежащие в плоскости $xOz$.

**14.** $\int_l ydx + xdy$, если $l$ - четверть дуги окружности $x = R\cos t, y = R\sin t$, лежащая в 1 квадранте и пробегаемая против хода часовой стрелки.

**15.** $\int_l \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, если $l$ - дуга кривой $x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t$, пробегаемая от точки A(R,0) до точки B(0,R).

**16.** $\int_l ydx - xdy$, если $l$ - дуга эллипса $x = a\cos t, y = b\sin t$.

**17.** $\int_L yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz$, если $L$ - дуга кривой $x = R\cos t, y = R\sin t, z = \frac{at}{2\pi}$, пробегаемая от точки пересечения линии с плоскостью $z = 0$ до точки ее пересечения с плоскостью $z = a$.

**18.** Применяя формулу Грина, вычислить:

$\oint_l (yz + y + z)dy + (yz + y - z)dz$, где $l$ - эллипс $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

**19.** Применяя формулу Грина, вычислить:

$\oint_l (xz + x + z)dx + (xz + x - z)dz$, где $l$ - окружность $x^2 + z^2 = ax$.

**20.** Доказать, что интеграл $\int_l (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$ не зависит от пути интегрирования, и найти значение интеграла, интегрируя сначала по дуге параболы $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,4)$, а затем по прямой, соединяющей эти точки.

**21.** Найти площадь области, ограниченной параболой $x = z^2$ и прямой $x = 1$ (область лежит в плоскости $xOz$).

**22.** Найти площадь области, ограниченной кривой $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t \ (0 \le t \le 2\pi)$.

**23.** Найти площадь области, ограниченной кривой $x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t) \ (0 \le t \le 2\pi)$.

**24.** Найти массу участка линии $z = \ln x$, лежащей в плоскости $xOz$

между точками с абсциссами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

**25.** Найти координаты центра тяжести четверти окружности радиуса $a$ (окружность расположена в 1 квадранте плоскости $xOy$; $\eta = 1$)

**26.** Найти моменты инерции относительно осей координат и начала координат участка однородной прямой $z = -2y + 1$, лежащего между осями координат в плоскости $yOz$.

**27.** Найти работу силы $F = xyi + (x + y)j$ при перемещении точки массы $m$ из начала координат в точку A(1,1):

а) по параболе $y = x^2$; б) по ломаной, проходящей через точки $O(0,0)$, $B(1,0)$ и $A(1,1)$, звенья которой параллельны осям координат; в) по ломаной, проходящей через точки O(0,0), C(0,1) и A(1,1), звенья которой параллельны осям координат.

# ГЛАВА III

# ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

## § 1. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

**1. Определение поверхностного интеграла первого рода.**

Пусть задана гладкая поверхность $S$, т.е. такая поверхность, в каждой точке которой существует касательная плоскость, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания. Пусть функция $f(M) = f(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке $M \in S$. Разобьем поверхность $S$ произвольным образом на n частичных поверхностей $S_i, i = 1,2,..n$. Обозначим через $\Delta S_i$ площадь $S_i$, $d_i$ - диаметр $S_i$, $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. На каждой частичной поверхности $S_i$ выберем произвольную точку $M_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \tag{1}$$

<u>Определение.</u> Если существует конечный предел интегральной суммы (1) при $d \to 0$ и он не зависит ни от способа разбиения поверхности $S$ на части, ни от выбора точек $M_i, i = 1,..n$, то его называют поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности $S$ и обозначают

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \tag{2}$$

**2. Свойства поверхностных интегралов первого рода.**

1. $\iint_S (f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z))dS = \iint_S f_1(x,y,z)dS \pm \iint_S f_2(x,y,z)dS$

2. $\iint_S kf(x,y,z)dS = k\iint_S f(x,y,z)dS$

3. $S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset$, тогда

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS$$

4. $\iint\limits_S dS = \sigma$, где $\sigma$ – площадь поверхности $S$.

**3. Вычисление поверхностных интегралов первого рода.**

Пусть $S$ – гладкая поверхность, заданная параметрическими уравнениями $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, $(u,v)\in D$, и пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на $S$. Тогда поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности $S$ преобразуется в двойной интеграл по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad (3)$$

где функции $E,G,F$ переменных $u,v$ определяются формулами

$$\begin{aligned} &E=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2,\\ &G=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2,\\ &F=x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v. \end{aligned} \qquad (4)$$

Если поверхность S задана уравнением $z=z(x,y)$, то поверхностный интеграл первого рода по этой поверхности выражается через двойной интеграл по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy \qquad (5)$$

где $S_{xy}$ – проекция поверхности $S$ на плоскость $Oxy$.

Аналогично, если поверхность интегрирования S задана уравнением $x=x(y,z)$ либо $y=y(x,z)$, то поверхностный интеграл $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$ сводится к двойному интегралу по формулам

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz \qquad (6)$$

где $S_{yz}$ – проекция поверхности $S$ на плоскость $Oyz$,

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz \qquad (7)$$

где $S_{xz}$ – проекция поверхности $S$ на плоскость $Oxz$.

**4. Физические приложения поверхностных интегралов первого рода.**

Пусть $S$ - материальная поверхность с поверхностной плотностью

$\rho(x,y,z)$ в точке $M \in S$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS$ — масса поверхности;

б) $M_{xy} = \iint\limits_S z\rho(x,y,z)dS$, $M_{xz} = \iint\limits_S y\rho(x,y,z)dS$,

$M_{yz} = \iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS$ — статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$;

в) $x_0 = \dfrac{M_{yz}}{M}, y_0 = \dfrac{M_{xz}}{M}, z_0 = \dfrac{M_{xy}}{M}$ — координаты центра тяжести поверхности;

г) $I_x = \iint\limits_S (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$ — момент инерции поверхности относительно оси $Ox$;

д) $I_{xy} = \iint\limits_S z^2\rho(x,y,z)dS$ — момент инерции поверхности относительно плоскости $Oxy$;

е) $I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$ — момент инерции поверхности относительно начала координат.

**Пример 1.** Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x-2y+z)dS$, где $S$ – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$).

**Решение.** Поверхность интегрирования $S$ есть треугольник $ABC$ (рис.1).

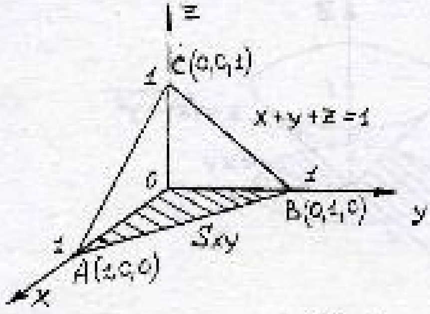



Рис.1

Из уравнения плоскости выразим $z$ через $x,y$: $z$=1-$x$-$y$. Преобразуем заданный поверхностный интеграл в двойной интеграл, используя формулу (5):

$$\iint_S (x-2y+z)dS = \iint_{S_{xy}} (x-2y+1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy =$$

$= \sqrt{3}\iint_{S_{xy}}(1-3y)dxdy$, где $S_{xy}$ - проекция S на плоскость $Oxy$, представляющая собой треугольник $OAB$.

Вычислим полученный двойной интеграл

$$\sqrt{3}\iint_{S_{xy}}(1-3y)dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-3y)dy = \sqrt{3}\int_0^1 (y-\frac{3}{2}y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x}dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1(1-x-\frac{3}{2}(1-2x+x^2))dx = \sqrt{3}\int_0^1(2x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x^2)dx =$$

$$= \sqrt{3}\cdot(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{2})\Big|_0^1 = \sqrt{3}\cdot(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) = 0.$$

Ответ: $\iint_S (x-2y+z)dS = 0.$

**Пример 2.** Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (x^2+y^2)dS$, где $S$ – часть конической поверхности $z^2 = x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z$=0 и $z$=1.

**Решение.** Построим заданную поверхность (рис. 2).

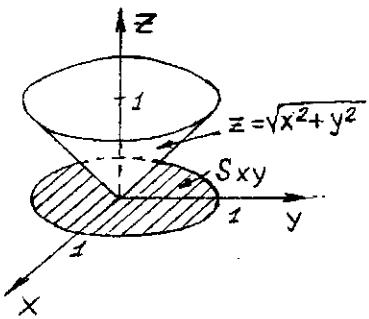



Рис.2

Выразим $z$ из уравнения поверхности, учитывая, что по условию $z>0$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Проекция $S_{xy}$ конической поверхности на плоскость $Oxy$ представляет собой круг $x^2+y^2\le 1$. По формуле (5) получаем

$$\iint_S (x^2+y^2)dS=\iint_{S_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=$$

$$=\iint_{S_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint_{S_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ и сводя двойной интеграл к повторному, находим

$$\sqrt{2}\iint_{S_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\iint_S (x^2+y^2)dS=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

**Пример 3.** Вычислить момент инерции $I_z$ относительно оси $Oz$ однородной сферической оболочки $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$ плотности $\rho_0$.

**Решение.** Имеем $I_z=\iint_S \rho_0(x^2+y^2)dS$. Используя сферические координаты, запишем параметрические уравнения данной полусферы: $x=a\cos\varphi\sin\theta, y=a\sin\varphi\sin\theta, z=a\cos\theta, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi/2$.

По формулам (4) находим

$E=a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta+a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta=a^2$,

$G=a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+a^2\cos^2\varphi\sin^2\theta=a^2\sin^2\theta$,

$F=-a^2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\sin\theta+a^2\sin\varphi\cos\theta\cdot\cos\varphi\sin\theta=0$,

откуда $\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin\theta$.

Выразим подынтегральную функцию в переменных $u,v$: получим $x^2+y^2=a^2\sin^2\theta$.

Вычислим интеграл $I_z$ по формуле (3):

$$I_z = \rho_0 \iint_D a^2 \sin^2\theta \cdot a^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \rho_0 a^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= 2\pi\rho_0 a^4 \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta) d(-\cos\theta) = 2\pi\rho_0 a^4 \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi\rho_0 a^4 \left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$$

Ответ: $I_z = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$.

## § 2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

**1. Понятие стороны поверхности.**

Возьмем на гладкой поверхности $S$ произвольную точку $M$ и проведем через нее нормаль к поверхности $N(M)$. Поверхность $S$ называется двусторонней, если для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности $S$ и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке $M$ направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления (на противоположное) при возвращении в точку $M$.

В каждой точке М двусторонней поверхности можно задать два вектора нормали, противоположных по направлению: $N(M)$ и $-N(M)$ (рис.3). Выбирая один из этих векторов, мы тем самым выбираем одну из двух сторон поверхности.

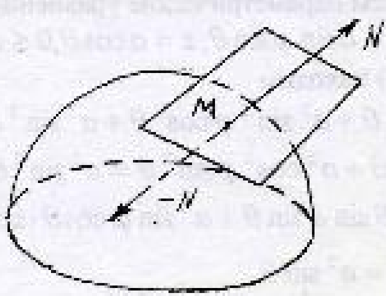



Рис. 3

Если поверхность ограничивает некоторое тело, то у нее различают внешнюю и внутреннюю стороны. Примером такой поверхности является сфера. Если поверхность задана уравнением $z=z(x,y)$, то у нее различают верхнюю и нижнюю стороны.

Вектор нормали, соответствующий верхней стороне поверхности, определяется формулой:

$$N(M)=\left\{-z'_x(M),-z'_y(M),1\right\} \qquad (8)$$

Направляющие косинусы нормали в этом случае находятся так:

$$\cos\alpha=-\frac{z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},\quad \cos\beta=-\frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}. \qquad (9)$$

**2. Определение поверхностного интеграла второго рода.**

Пусть $S$ – гладкая или кусочно-гладкая двусторонняя поверхность. Выберем одну из ее сторон, определяемую вектором нормали $\mathrm{N}(M)$. Пусть $\alpha(M)$, $\beta(M)$, $\gamma(M)$ – углы, которые вектор $\mathrm{N}(M)$ составляет с осями координат, и пусть на поверхности $S$ заданы три непрерывные функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

Определение. Поверхностные интегралы первого рода

$$I_1=\iint\limits_S P(M)\cos\alpha(M)dS,\qquad I_2=\iint\limits_S Q(M)\cos\beta(M)dS,$$

$$I_3=\iint\limits_S R(M)\cos\gamma(M)dS$$

называются поверхностными интегралами второго рода соответственно от функций $P,Q,R$ по выбранной стороне поверхности $S$.

Они обозначаются также следующим образом:

$$I_1=\iint\limits_S P(M)dydz,\quad I_2=\iint\limits_S Q(M)dxdz,\quad I_3=\iint\limits_S R(M)dxdy.$$

Такие обозначения связаны с тем, что элемент площади $dydz$ можно рассматривать как площадь проекции элемента поверхности с площадью $dS$ на координатную плоскость $Oyz$, т.е. $dydz=dS\cos\alpha$ и, аналогично, $dxdz=dS\cos\beta$, $dxdy=dS\cos\gamma$.

Из определения следует, что поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности. Если взять другую сторону поверхности, то вектор $\mathbf{N}(M)$ изменит направление на противоположное; поэтому направляющие косинусы вектора $\mathbf{N}(M)$, а следовательно, и интегралы $I_1, I_2, I_3$ изменят знак.

Сумма

$$I_1 + I_2 + I_3 = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

называется общим поверхностным интегралом второго рода.

**3. Вычисление поверхностных интегралов второго рода.**

Если поверхность S задана уравнением $z=z(x,y)$, то поверхностный интеграл второго рода $\iint_S R(M)dxdy$ выражается через двойной интеграл по формуле

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{S_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy \tag{10}$$

где $S_{xy}$ – проекция поверхности $S$ на плоскость $Oxy$. Знак "+" выбирается при интегрировании по верхней стороне поверхности, знак "-" при интегрировании по нижней стороне.

Аналогично, если поверхность $S$ задана уравнением $x=x(y,z)$, то

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{S_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \tag{11}$$

где $S_{yz}$ – проекция поверхности $S$ на плоскость $Oyz$.

Наконец, в случае, когда поверхность $S$ задана уравнением $y=y(x,z)$, то

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint_{S_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \tag{12}$$

где $S_{xz}$ – проекция поверхности $S$ на плоскость $Oxz$.

Пусть поверхность интегрирования $S$ задана уравнением $z=z(x,y)$ и выбрана верхняя сторона поверхности с вектором нормали $\mathbf{N}(M)=\{-z'_x(M), -z'_y(M), 1\}$ Тогда общий поверхностный интеграл второго рода сводится к двойному по формуле

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{S_{xy}} [-P(x,y,z(x,y))\cdot z'_x - \\ - Q(x,y,z(x,y))\cdot z'_y + R(x,y,z(x,y))]dxdy \tag{13}$$

**4. Формула Стокса.**

Поверхностный интеграл по незамкнутой поверхности $S$ связан с криволинейным интегралом по кривой $L$, ограничивающей эту поверхность, формулой Стокса

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \\ = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \tag{14}$$

где функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в некоторой пространственной области $G$, содержащей поверхность $S$.

Направление обхода кривой $L$ и сторона поверхности $S$ в формуле Стокса согласуются следующим образом: если наблюдатель находится на выбранной стороне поверхности (т.е. направление от ног к голове совпадает с направлением вектора нормали), то при обходе контура $L$ в заданном направлении он оставляет поверхность слева от себя (рис. 4).

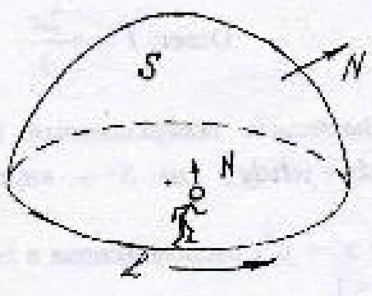



Рис. 4

**5. Формула Остроградского-Гаусса.**

Поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности $S$ можно преобразовать в тройной интеграл по пространственной области $G$, ограниченной поверхностью $S$, и наоборот, с помощью формулы Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \qquad (15)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности.

Функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в области G.

√ **Пример 4.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода $I = \iint\limits_S zdxdy$, где $S$ – нижняя сторона части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1$.

**Решение.** Проекцией данной части конуса на плоскость $Oxy$ является круг $S_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$ (см. рис. 2). Пользуясь формулой (10), сведем поверхностный интеграл $I$ к двойному интегралу: $I = -\iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ и сводя двойной интеграл к повторному, находим

$$I = -\iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $I = -\dfrac{2\pi}{3}$.

**Пример 5.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2 zdydz - 2dxdz + ydxdy$, где $S$ – внутренняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2$, расположенная в первом октанте $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, причем $0 \le z \le 1$.

**Решение.** Заданный поверхностный интеграл является поверхностным интегралом общего вида. Воспользуемся формулой (13), учитывая, что интегрирование проводится по верхней стороне поверхности (рис.5). Проекцией данной части параболоида на плоскость $Oxy$ является четверть круга $S_{xy} : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$.

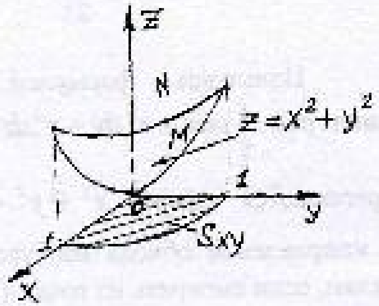



Рис.5

Имеем

$$\iint\limits_S x^2 z\,dydz - 2dxdz + y\,dxdy = \iint\limits_{S_{xy}} [-x^2\cdot(x^2+y^2)\cdot 2x + 2\cdot 2y + y]\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_{xy}} (-2x^5 - 2x^3y^2 + 5y)\,dxdy$$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, находим

$$\iint\limits_{S_{xy}} (-2x^5 - 2x^3y^2 + 5y)\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 (-2r^5\cos^5\varphi - 2r^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+ 5r\sin\varphi)\,r\,dr = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 [-2r^6\cos^3\varphi\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 5r^2\sin\varphi]\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 (-2r^6\cos^3\varphi - 5r^2\sin\varphi)\,dr = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\left(-\frac{2r^7}{7}\cos^3\varphi + \frac{5}{3}r^3\sin\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\frac{2}{7}\cos^3\varphi + \frac{5}{3}\sin\varphi\right)d\varphi = -\frac{2}{7}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d(\sin\varphi) + \frac{5}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{7}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi - \frac{5}{3}\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{7}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{5}{3} =$$

$$= -\frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3} = -\frac{4}{21} + \frac{5}{3} = \frac{31}{21}.$$

Ответ: $\dfrac{31}{21}$.

**Пример 6.** Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L ydx + z^2dy + x^2dz$, где $L$ – окружность, по которой пересекаются сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскость $z = \sqrt{3}$, причем направление обхода контура $L$ выбирается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,2).

**Решение**. Поскольку $P = y, Q = z^2, R = x^2$, имеем
$\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = -2x, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1,$
и поверхностный интеграл второго рода в формуле Стокса равен

$$-\iint\limits_S 2zdydz + 2xdxdz + dxdy.$$

В качестве поверхности $S$ можно взять верхнюю сторону части плоскости $z = \sqrt{3}$ при $x^2 + y^2 \le 1$, которая согласована с указанным в условии направлением обхода контура $L$ (рис. 6).

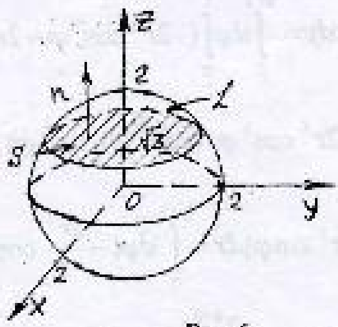



Рис.6

Пусть n={cosα,cosβ,cosγ} – единичный вектор нормали верхней стороны поверхности $S$. Для верхней части плоскости $z = \sqrt{3}$ имеем n=**k**, cosα=cosβ=0, cosγ=1. Поэтому

$$\oint\limits_L ydx + z^2dy + x^2dz = -\iint\limits_S 2zdydz + 2xdxdz + dxdy =$$

$$= -\iint_{S_{xy}} dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = -\pi.$$

Ответ: $\oint_L y dx + z^2 dy + x^2 dz = -\pi$

**Пример 7.** Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл $\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, где $S$ – внешняя сторона сферы $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**Решение.** По формуле Остроградского-Гаусса имеем

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = \iiint_G (2x + 2y + 2z) dxdydz,$$

где $G$ – шар $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \le R^2$. Для вычисления интеграла перейдем к сферическим координатам

$$x - 1 = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta,$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Якобиан перехода равен $r^2 \sin\theta$. Уравнение границы области $G$ имеет вид $r=R$. Следовательно,

$$\iiint_G (2x + 2y + 2z) dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 [1 + r(\cos\varphi\sin\theta +$$

$$+ \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta)] dr = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta [\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}(\cos\varphi\sin\theta +$$

$$+ \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta)]\Big|_{r=0}^{r=R} d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta [\frac{R^3}{3} + \frac{R^4}{4}(\cos\varphi\sin\theta +$$

$$+ \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta)] d\theta = 2\frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta + \frac{R^4}{2}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi +$$

$$+ \sin\varphi) d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta + \frac{R^4}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{R^4}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \cdot (\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} + \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = \frac{8\pi R^3}{3} +$$

$$+\frac{\pi R^4}{4}(-\cos 2\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{8\pi R^3}{3}.$$

**Пример 8.** Вычислить интеграл $I=\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^2dxdy$,

где $S$ – нижняя сторона части параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=2x$.

**Решение.** Дополним поверхность $S$ до замкнутой частью плоскости $z=2x$. Обозначим плоскую часть через $S_1$ и выберем ее верхнюю сторону (рис. 7).

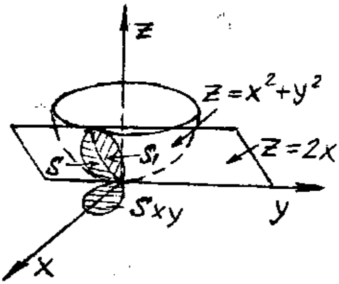



Рис.7

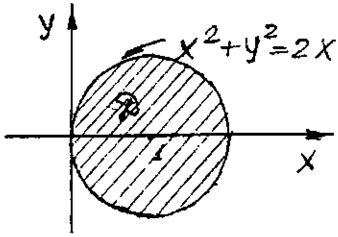



Рис.8

Для вычисления интеграла по замкнутой кусочно гладкой поверхности $S+S_1$ применим формулу Остроградского-Гаусса. Тогда для интеграла $I$ получим

$$I=\iiint\limits_G(3x^2+3y^2+2z)dxdydz-\iint\limits_{S_1}x^3dydz+y^3dxdz+z^2dxdy,$$

где G – тело, ограниченное поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=2x$.

Вычислим тройной интеграл с помощью повторных интегралов. Область $G$ проектируется на плоскость $Oxy$ в область $D$, границей которой является окружность $2x=x^2+y^2$ (рис. 8).

Находим

$$\iiint\limits_G(3x^2+3y^2+2z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{x^2+y^2}^{2x}[3(x^2+y^2)+2z]dz=$$

$$=\iint\limits_D[6x(x^2+y^2)+4x^2-4(x^2+y^2)^2]dxdy$$

Двойной интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$. В полярных координатах уравнение окружности примет вид $r = 2\cos\varphi, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, и поэтому двойной интеграл равен

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r[6r^3\cos\varphi + 4r^2\cos^2\varphi - 4r^4]dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{6}{5}r^5\cos\varphi + r^4\cos^2\varphi - \frac{2}{3}r^6)\Big|_{r=0}^{r=2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 16\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{12}{5}\cos^6\varphi + \cos^6\varphi - \frac{8}{3}\cos^6\varphi)d\varphi = \frac{176}{15}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^6\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{176}{15}[\frac{5}{16}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{3}{64}\sin 4\varphi - \frac{1}{48}\sin^3 2\varphi]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{11}{3}\pi.$$

Вычислим интеграл по верхней стороне области $S_1$, учитывая, что вектор нормали **N** к плоскости $z$=2$x$ равен $\{-z'_x, -z'_y, 1\} = \{-2, 0, 1\}$. По формуле (13) имеем

$$\iint\limits_{S_1} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^2 dxdy = \iint\limits_{S_{1xy}} (-2x^3 + 4x^2)dxdy,$$ где $S_{1xy}$ - проекция $S_1$ на плоскость $Oxy$, которая совпадает с областью D.

Переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_{D} (-2x^3 + 4x^2)dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} (-2r^3\cos^3\varphi + 4r^2\cos^2\varphi)rdr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\frac{64}{5}\cos^8\varphi + 16\cos^6\varphi)d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, данный интеграл $I$ равен $\frac{11\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{6}$.

Ответ: $I = \frac{13\pi}{6}$.

## § 3. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

**1. Скалярное поле.**

Пусть $G$ – область в трехмерном пространстве (или на плоскости). Говорят, что в области $G$ задано скалярное поле, если каждой точке $M \in G$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела; поле плотности зарядов на какой-либо поверхности или в сплошной среде; поле плотности масс какого-либо тела.

Поверхность (линия), на которой функция $u(M)$ принимает постоянное значение, называется поверхностью (линией) уровня скалярного поля (например, поверхность или линия постоянной температуры).

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то скалярное поле описывается функцией трех переменных: $u = u(x,y,z)$, $(x,y,z) \in G$.

**2. Векторное поле.**

Говорят, что в области $G$ задано векторное поле, если каждой точке $M \in G$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{F}(M)$.

Физические примеры векторных полей: электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности $\mathbf{E}$, магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$; поле тяготения, создаваемое системой масс и характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения $\mathbf{F}$, действующей в этой точке на единичную массу; поле скоростей потока жидкости, описываемое в каждой точке вектором скорости $\mathbf{v}$.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то векторное поле $\mathbf{F}(M)$ описывается вектор-функцией трех переменных $\mathbf{F}(x,y,z)$ или тремя скалярными функциями — ее координатами:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}.$$

Удобной геометрической характеристикой векторного поля $\mathbf{F}(M)$ служат векторные линии — кривые, в каждой точке $M$ которых вектор $\mathbf{F}(M)$ направлен по касательной к кривой. Векторные линии поля тяготения, электрического и магнитного полей называются силовыми линиями, а поля скоростей — линиями тока.

В системе координат $Oxyz$ векторные линии определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \qquad (16)$$

**3. Производная по направлению.**

Скалярное и векторное поля $u(M)=u(x,y,z)$ и $\mathbf{F}(M)=\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ называются дифференцируемыми $n$ раз, если функции $u(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ дифференцируемы $n$ раз.

Пусть $u(M)$ — скалярное поле, заданное в области $G$; $\mathbf{l}$ — единичный фиксированный вектор; $M$ — фиксированная точка; $M'$ — любая точка из $G$, отличная от $M$ и такая, что вектор $MM'$ коллинеарен $\mathbf{l}$; $MM'$ — величина направленного отрезка.

Определение 1. Производной скалярного поля $u(M)$ по направлению $\mathbf{l}$ в точке $M$ называется следующий предел:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\right|_M=\lim_{M'\to M}\frac{u(M')-u(M)}{MM'}.$$

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}$ характеризует скорость изменения функции $u(M)$ по направлению $\mathbf{l}$ в точке $M$.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ $\mathbf{l}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (17)$$

В частности, если вектор $\mathbf{l}$ сонаправлен с одной из координатных осей, то производная по направлению $\mathbf{l}$ совпадает с соответствующей частной производной. Например, если $\mathbf{l}=\{1,0,0\}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

**4. Градиент скалярного поля.**

Определение 2. Градиентом скалярного поля $u(x,y,z)$ называется вектор-функция

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Из равенства (17) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}=(grad\,u\cdot\mathbf{l})=|grad\,u|\cos\varphi, \qquad (18)$$

где $\varphi$ – угол между векторами $\mathbf{l}$ и grad $u$ в точке $M$. Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}$

принимает наибольшее значение при φ=0, т.е. в направлении grad $u$ в данной точке. Иначе говоря, вектор grad $u$ в данной точке указывает направление наибольшего роста функции $u$ в этой точке, а |grad $u$| есть скорость роста функции и в этом направлении.

**5. Потенциальное поле.**

Определение 3. Векторное поле **F**$(M)$ называется потенциальным в области $G$, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u$(M):

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, u. \tag{19}$$

Функция $u(M)$ называется скалярным потенциалом векторного поля **F**$(M)$. Если **F**=$\{P, Q, R\}$, то из равенства (19) следует, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Физические примеры потенциальных полей: поле тяготения точечной массы $m$, электрическое поле точечного заряда $e$.

Пусть область $G$ – поверхностно-односвязная, т.е. для любого замкнутого контура $L$, лежащего в $G$, внутри области $G$ найдется поверхность, ограниченная контуром $L$. Тогда потенциал $u(x,y,z)$ потенциального поля **F**$(x, y, z) = =P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ в области $G$ вычисляется по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} P dx + Q dy + R dz \tag{20}$$

**6. Дивергенция.**

Определение 4. Дивергенцией векторного поля $\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + {} +Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ называется скалярная функция

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Слово "дивергенция" означает "расходимость" ("расхождение"). Дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

**7. Ротор.**

Определение 5. Ротором (или вихрем) векторного поля $\mathbf{F} = =P(x,y,z)\mathbf{i} + +Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ называется вектор-функция

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ротор характеризует завихренность поля **F** в данной точке.

Ротор любого потенциального поля равен нулю. Поэтому говорят, что потенциальное поле является безвихревым. Условие rot **F** = 0 является необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля **F** в поверхностно односвязной области.

**8. Соленоидальное поле.**

Векторное поле **F**(*M*) называется соленоидальным в области *G*, если в этой области div**F** = 0. Так как div **F** характеризует плотность источников поля **F**, то в той области, где поле **F** соленоидально, нет источников этого поля.

Например, электрическое поле **E** точечного заряда соленоидально (удовлетворяет условию div**E** = 0) всюду вне точки, где находится заряд (в этой точке div**E** = ∞).

**9. Оператор Гамильтона.**

Введем векторный оператор "набла", или оператор Гамильтона:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

С помощью этого символического (операторного) "вектора" удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

В результате умножения вектора $\nabla$ на скалярную функцию $u(x,y,z)$ получается grad $u$:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = grad u$$

Скалярное произведение вектора $\nabla$ на вектор-функцию $\mathbf{F}(x, y, z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ дает div F:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = div\mathbf{F}$$

Векторное произведение вектора $\nabla$ на вектор-функцию $\mathbf{F}(x,y,z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ дает rot **F**:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\mathbf{F}.$$

**10. Дифференциальные операции второго порядка.**

Пусть в области *G* заданы скалярное поле *u*(*M*) и векторное поле **F**(*M*) = {*P*, *Q*, *R*}, причем функции *u*, *P*, *Q*, *R* имеют в области *G* непрерывные частные производные второго порядка. Тогда grad $u(M)$ и rot $\mathbf{F}(M)$ являются дифференцируемыми векторными полями, а div $\mathbf{F}(M)$ — дифференцируемым скалярным полем.

К векторным полям grad $u(M)$ и rot $\mathbf{F}(M)$ можно применить операции вычисления дивергенции и ротора, а к скалярному полю div $\mathbf{F}$(M) — операцию вычисления градиента. Таким образом. получаем повторные операции: div grad $u$, rot grad $u$, div rot $\mathbf{F}$, rot rot $\mathbf{F}$, grad div $\mathbf{F}$.

Операцию div grad $u$ называют оператором Лапласа и обозначают символом $\Delta$:

$$\text{div grad}\, u = \Delta u.$$

С помощью оператора Гамильтона сператор Лапласа записывается в виде

$$\Delta u = divgradu = (\nabla \cdot (\nabla u)) = \nabla^2 u.$$

Учитывая, что

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

получаем

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Операции rot grad $u$ и div rot $\mathbf{F}$ приводят к нулю:

$$rotgradu = (\nabla \times \nabla u) = 0$$

(потенциальное векторное поле grad $u$ является безвихревым) и

$$divrot\mathbf{F} = (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})) = 0$$

(векторное поле rot $\mathbf{F}$ является соленоидальным).

Две остальные повторные операции rot rot $\mathbf{F}$ и grad div $\mathbf{F}$ связаны соотношением

$$rotrot\mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = graddiv\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F},$$

где $\Delta\mathbf{F} = \Delta(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \Delta P\mathbf{i} + \Delta Q\mathbf{j} + \Delta R\mathbf{k}$ — вектор-функция, координатами которой являются результаты применения оператора Лапласа к функциям $P$, $Q$, $R$..

**Пример 9.** Найти градиент скалярного поля $u=xyz$ в точке M(-2,3,4). Чему равна в этой точке производная поля $u$ в направлении вектора $\mathbf{a}=\{3,-4,12\}$?

**Решение.** Согласно определению градиента имеем

$$gradu(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\mathbf{k} = \{yz, xz, xy\}\big|_{M(-2,3,4)} =$$

$$= \{12,-8,-6\}.$$

Найдем теперь производную по направлению. Единичным вектором сонаправленным с **a**, является вектор $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{13}\{3,-4,12\}$. По формуле (17) получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\right|_M = \frac{3}{12}\cdot 12 + \frac{4}{13}\cdot 8 - \frac{12}{13}\cdot 6 = -\frac{4}{13}.$$

**Пример 10.** Найти градиент сферического скалярного поля $u=\varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (т.е. зависящего только от расстояния точки $(x,y,z)$ до начала координат).

**Решение.** Согласно определению градиента имеем

$$grad\varphi(r) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(r)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(r)\mathbf{k} =$$

$$= \{\varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial y}, \varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\}$$

Учитывая равенство $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r}$ и аналогичные равенства $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$, получаем

$$grad\varphi(r) = \{\varphi'(r)\frac{x}{r}, \varphi'(r)\frac{\partial y}{r}, \varphi'(r)\frac{z}{r}\} = \frac{\varphi'(r)}{r}\{x,y,z\} = \frac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r}.$$

**Пример 11.** Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ в точке $M(-2,4,5)$.

**Решение.** Согласно определению дивергенции векторного поля $\mathbf{F}=\{P,Q,R\}$ находим

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = (1 + 2y + 3z^2)\big|_{M(-2,4,5)} =$$

$$= 1 + 8 + 75 = 84$$

**Пример 12.** Найти дивергенцию сферического векторного поля $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$.

**Решение.** Данное поле в координатах имеет вид $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r} = \{f(r)x, f(r)y, f(r)z\}$. Согласно определению дивергенции находим

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) =$$

$$= f'(r)\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{z^2}{r} + f(r) = f'(r)r + 3f(r).$$

**Пример 13.** Дано векторное поле $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. Найти rot **F** в точке $M(1,2,3)$.

**Решение.** Согласно определению ротора имеем

$$rot\mathbf{F}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial y^2}{\partial y} - \frac{\partial x^2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial z^2}{\partial z} - \frac{\partial y^2}{\partial x}\right) +$$

$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial z^2}{\partial y}\right) = 2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}\big|_M = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

**Пример 14.** Доказать, что сферическое векторное поле $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$ потенциально.

**Решение.** Поле **F** определено во всем пространстве. Пространство является поверхностно односвязной областью; поэтому необходимое и достаточное условие потенциальности поля **F** имеет вид rot **F** = 0. Находим

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(r)z - \frac{\partial}{\partial z}f(r)y\right) +$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}f(r)x - \frac{\partial}{\partial x}f(r)z\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(r)y - \frac{\partial f(r)x}{\partial y}\right) =$$

$$= \mathbf{i}f'(r)\left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r}\right) + \mathbf{j}f'(r)\left(\frac{zx}{r} - \frac{xz}{r}\right) + \mathbf{k}f'(r)\left(\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r}\right) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, **F** – потенциальное поле.

**Пример 15.** Доказать, что электрическое поле $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r}$ точечного заряда e, помещенного в начале координат, соленоидально в любой точке, кроме начала координат.

**Решение.** Воспользуемся условием соленоидальности векторного поля $\mathbf{F}$: $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Данное поле в координатах имеет вид $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r} = \frac{ke}{r^3}\{x, y, z\}$. Находим

$$div\mathbf{E} = ke\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \dfrac{r^3 - x\cdot 3r^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$ и, аналогично, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$, то

$$div\mathbf{E} = ke\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

(при $r \neq 0$). Физически этот результат означает отсутствие источников поля в любой точке, кроме начала координат. В начале координат $div\mathbf{E} = \infty$.

**Пример 16.** Вычислить $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Решение.** Учитывая равенство $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$ и аналогичные равенства $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}$, находим

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\right) = \frac{r^3 - 3r^2\frac{x}{r}x}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2\frac{y}{r}y}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2\frac{z}{r}z}{r^6} =$$

$$= -\frac{3r^3 - 3r^2\,\dfrac{x^2+y^2+z^2}{r}}{r^6} = -\frac{3r^3-3r^3}{r^6} = 0 \quad \text{при } r \neq 0.$$

## § 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

**1. Поток векторного поля.**

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{F}(M)$, определенное в пространственной области $G$, и некоторую кусочно гладкую двустороннюю поверхность. Пусть $\mathbf{n}(M)$ — единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности $S$.

Поверхностный интеграл $\varPi = \iint\limits_S (\mathbf{F},\mathbf{n})dS$ называется *потоком векторного поля F(M) через выбранную сторону поверхности S.*

Если взять другую сторону поверхности, то вектор $\mathbf{n}$ изменит направление на противоположное; поэтому скалярное произведение $(\mathbf{F},\mathbf{n})$, а значит, и поток изменит знак.

Если в системе координат $Oxyz$ $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$, а $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то выражение для потока векторного поля $\mathbf{F}(M)$ можно записать в виде

$$\varPi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \quad (21)$$

**2. Формула Остроградского-Гаусса в векторной форме.**

Пусть в области $G$ определено векторное поле $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$; $S$ — замкнутая поверхность, ограничивающая область $G$; $\mathbf{n}(M) = \{\cos a, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S$ в точке $M$.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_S (\mathbf{F},\mathbf{n})dS = \iiint\limits_G div\mathbf{F}dV \quad (22)$$

*Физический смысл формулы Остроградского-Гаусса:* поток векторного поля $\mathbf{F}$ через замкнутую поверхность в сторону внешней нормали равен тройному интегралу по области, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции векторного поля $\mathbf{F}$. Чтобы поток был отличен от нуля, внутри области $G$ должны быть источники (или стоки) поля. Из формулы Остроградского-Гаусса следует, что тогда и div **F** будет отлична от нуля. Таким образом, div **F** характеризует источники поля. Само векторное поле как бы расходится от источников. Отсюда и происходит название "расходимость" или "дивергенция".

**3. Циркуляция векторного поля.**

Рассмотрим векторное поле F($M$), определенное в пространственной области $G$, и некоторую кусочно гладкую кривую $L \in G$, на которой указано направление обхода. Пусть $\boldsymbol{\tau}(M)$ — единичный касательный вектор к кривой $L$ в точке $M$, направленный в сторону обхода кривой.

Криволинейный интеграл $Ц = \int\limits_L (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) dl$ называется *циркуляцией векторного поля* **F** *вдоль кривой L в заданном направлении.*

Если взять другое направление обхода кривой, то вектор **τ** изменит направление на противоположное, поэтому скалярное произведение (**F**,**τ**), а значит, и циркуляция изменит знак.

Если F — силовое векторное поле, то циркуляция $\int\limits_L (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) dl$ представляет собой работу силового векторного поля вдоль кривой $L$ в заданном направлении.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ F = $\{P, Q, R\}$, а $\boldsymbol{\tau}$ = $=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то циркуляцию векторного поля **F** можно записать в виде

$$Ц = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dl = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz \qquad (23)$$

Если ввести вектор $d\mathbf{r}$ = $\{dx, dy, dz\}$, то формулу (23) можно переписать в векторном виде $Ц = \int\limits_L (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$.

**4. Формула Стокса в векторной форме.**

Пусть в области $G$ определено векторное поле **F** $=\{P, Q, R\}$; $L$ — замкнутый контур, лежащий в области $G$; $S$ — произвольная поверхность, границей которой является контур $L$; $S \subset G$ (говорят: поверхность $S$ натянута на контур $L$); n($M$) = $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности $S$.

Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint\limits_L (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) dl = \iint\limits_S (rot\mathbf{F}, \mathbf{n}) dS, \qquad (24)$$

или

$$\oint_L (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \iint_S (rot\mathbf{F}, \mathbf{n})dS.$$

*Физический смысл формулы Стокса:* циркуляция векторного поля **F** вдоль замкнутого контура равна потоку ротора векторного поля **F** через поверхность, натянутую на этот контур.

Чтобы циркуляция была отлична от нуля для малого контура, окружающего некоторую выбранную точку поверхности, поле **F** должно поворачиваться (иметь завихрение) вблизи этой точки. Из формулы Стокса следует, что тогда и rot **F** вблизи этой точки будет отличен от нуля. Таким образом, rot **F**($M$) характеризует завихрение поля в точке $M$. Отсюда и происходит название "вихрь" или "ротор".

**Пример 17.** Найти циркуляцию вектора $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ ($a$=const) вдоль окружности $L: x^2 + y^2 = 1, z = 1$ в положительном направлении.

**Решение.** Запишем параметрические уравнения окружности $L$:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1, 0 \le t < 2\pi.$$

По определению циркуляции имеем

$$Ц = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_C ydx - xdy + adz\ .$$

Так как

$$dx = -\sin tdt, dy = \cos tdt, dz = 0,$$

то

$$Ц = \int_C ydx - xdy + adz = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t)dt - \cos t \cdot \cos tdt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -2\pi.$$

Ответ: $Ц = -2\pi$.

**Пример 18.** Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = (x + 3y + 2z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ по контуру треугольника с вершинами $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$, обходимому в положительном направлении.

**Решение.** Для нахождения циркуляции вдоль замкнутого контура треугольника $ABC$ воспользуемся формулой Стокса

$$Ц = \oint_L (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \iint_S (rot\mathbf{F}, \mathbf{n})dS.$$

где $L$ – контур треугольника $ABC$, а $S$ – поверхность, натянутая на этот контур.

Очевидно, что треугольник $ABC$ лежит в плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$, отсекающей на координатных осях $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно отрезки 2,3,1 (рис.9).

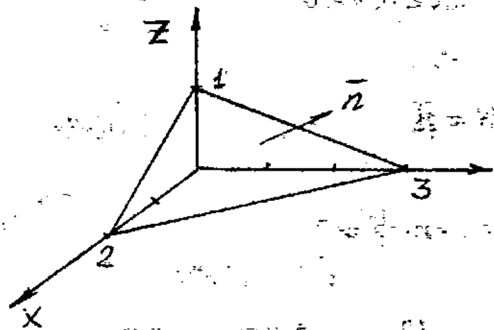



Рис.9

За поверхность S примем часть этой плоскости, лежащую в первом октанте, т.е. $S: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

Найдем ротор векторного поля $\mathbf{F}$:

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+3y+2z & 2x+z & x-y \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial(x-y)}{\partial y} - \frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\right)+$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial z} - \frac{\partial(x-y)}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial(2x+z)}{\partial x} - \frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial y}\right)=$$

$$= -2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k} = \{-2,1,-1\}.$$

Перепишем уравнение плоскости в виде $3x+2y+6z=6$. Выберем верхнюю сторону плоскости, согласующуюся с положительным направлением обхода контура $L$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ на верхней стороне равен $\{\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}, \frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}},$

$\frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}\} = \{\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\}$. Имеем:

$$Ц = \iint_S (rot\mathbf{F}, \mathbf{n})dS = \iint_S (\{-2,1,-1\}, \{\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\})dS = \iint_S (-\frac{10}{7})dS.$$

Спроектируем поверхность S на плоскость Oxy в треугольник $S_{xy} : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \le 1, x \ge 0, y \ge 0$. Учитывая, что $dS = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \frac{7}{6}dxdy$, получаем

$$\iint_S (-\frac{10}{7})dS = \iint_{S_{xy}} (-\frac{10}{7}) \cdot \frac{7}{6} dxdy = -\frac{5}{3}\iint_{S_{xy}} dxdy = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = -5.$$

Последний интеграл найден как площадь прямоугольного треугольника с катстами 2 и 3.

Ответ: Ц=-5.

**Пример 19.** Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = (2z - x)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ через сторону треугольника $S$, вырезанного из плоскости $x+4y+z-4=0$ координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью $Oz$ острый угол.

**Решение.** Перепишем уравнение плоскости в виде $\frac{x}{4} + \frac{y}{1} + \frac{z}{4} = 1$, откуда видно, что она отсекает отрезки 4,1,4 соответственно на координатных осях $Ox, Oy, Oz$ (рис.10).

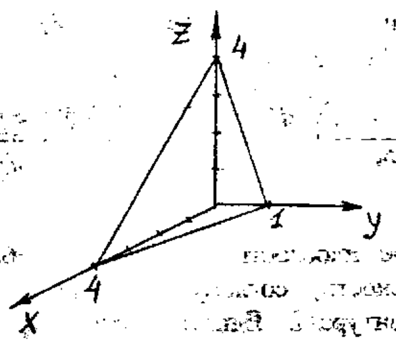



Рис. 10

Единичный вектор нормали к плоскости $x+4y+z-4=0$, образующий с осью $Oz$ острый угол ($\cos\gamma>0$), имеет вид $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{18}}\mathbf{i}+\frac{4}{\sqrt{18}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{18}}\mathbf{k}$.

Согласно определению потока имеем

$$\varPi=\iint\limits_{S}(\mathbf{F},\mathbf{n})dS=\iint\limits_{S}(\{(2z-x),(x+2z),3z\},\{\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}}\})dS=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{18}}\iint\limits_{S}(2z-x+4x+8z+3z)dS=\frac{1}{\sqrt{18}}\iint\limits_{S}(13z+3x)dS$$

Спроектируем поверхность S на плоскость $Oxz$ в треугольник $S_{xz}: x+z\le 4, x\ge 0, z\ge 0$. Учитывая, что $dS=\frac{dxdz}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{18}}{4}dxdz$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{18}}\iint\limits_{S}(13z+3x)dS=\frac{1}{4}\iint\limits_{S_{xz}}(13z+3x)dxdz=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{0}^{4-x}(13z+3x)dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{4}(13\frac{z^2}{2}+3xz)\Big|_{z=0}^{z=4-x}dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{4}[13\frac{(4-x)^2}{2}+3x(4-x)]dx=\frac{128}{3}.$$

Ответ: $\varPi=\frac{128}{3}$.

**Пример 20.** Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ через боковую поверхность $S_1$ конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le h$ в сторону внешней нормали.

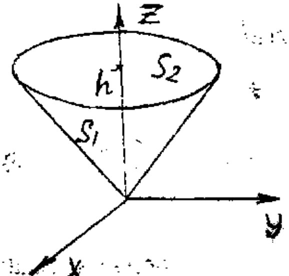



Рис.11

**Решение.** Чтобы применить формулу Остроградского-Гаусса для вычисления искомого потока, дополним заданную поверхность $S_1$ до замкнутой кусочно гладкой поверхности $S$ основанием конуса – кругом $S_2 : x^2 + y^2 \le h^2, z = h$ (рис. 11).

Применим теперь формулу Остроградского-Гаусса к области G, ограниченной замкнутой поверхностью S:

$$\iint_{S_1} (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dS + \iint_{S_2} (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dS = 2\iiint_G (x + y + z) dxdydz .$$

На круге $S_2$ имеем $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + h^2\mathbf{k}, \mathbf{n} = \mathbf{k}$ ; поэтому

$$\iint_{S_2} (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dS = \iint_{S_2} h^2 dS = h^2 \iint_{S_2} dS = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4 .$$

Последний интеграл найден как площадь круга радиуса $h$.

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$. Уравнение конической поверхности примет вид $z=r$. Таким образом,

$$2\iiint_G (x + y + z) dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z] dz =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h [r(h - r)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{r^2}{2}] r dr = \frac{\pi}{2} h^4 .$$

Искомый интеграл по боковой поверхности $S_1$ конуса равен

разности тройного интеграла и поверхностного интеграла по кругу $S_2$:

$$\Pi = \iint_{S_1} (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dS = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2} .$$

Ответ: $\Pi = -\dfrac{\pi h^4}{2}$.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint\limits_S (2x+z+\frac{4}{3}y)dS$, где $S$ – часть плоскости $6x+4y+3z=12$, лежащая в первом октанте.

б) $\iint\limits_S (6x+4y+3z)dS$, где $S$ – часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенная в первом октанте.

в) $\iint\limits_S \sqrt{1-x^2-y^2}dS$, где S – полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

г) $\iint\limits_S x^2y^2dS$, где S – полусфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

д) $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, где S – поверхность, отсекаемая от параболоида $2z=x^2+y^2$ плоскость $z$=1.

е) $\iint\limits_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, где S – цилиндр $x^2+y^2=1$, ограниченный плоскостями $z$=0,$z$=1.

2. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint\limits_S (z-x)dxdy$, где S – верхняя часть плоскости $x+2y+z=2$, расположенная в первом октанте.

б) $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, где S – внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1, z\le 0$.

9350

в) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, где S – нижняя сторона части конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $0\le z\le 1$.

3. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности S (если поверхность не замкнутая, дополнить ее до замкнутой):

а) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, где S – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

б) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, где S – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \le z \le 2$.

в) $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где S – граница цилиндрического тела $x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le h$.

г) $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, где S – поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

д) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – поверхность куба, образованного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

е) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

**4.** Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл:

а) $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где $L$ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x+y+z=0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки (2,0,0).

б) $\oint\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, где L – эллипс $x^2 + y^2 = 1$, $x+z=1$, пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки (2,0,0).

в) $\oint\limits_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, где L – граница сечения куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ плоскостью $x+y+z=3/2$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки (2,0,0).

г) $\oint\limits_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, где L – контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Направление обхода кривой L берется против хода часовой стрелки, если смотреть из точки (2,0,0).

**5.** Вычислить массу части поверхности $x^2 + y^2 = 2z$ при $z \le 1$, плотность которой в точке $M(x,y,z)$ равна $z$.

**6.** Вычислить массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $z \ge 0$, плотность которой $\rho(M)=z/a$.

**7.** Вычислить статические моменты относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки $x+y+z=1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ плотности $\rho(M)=1$.

8. Вычислить координаты центра тяжести части однородной конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2x$.

9. Вычислить момент инерции относительно оси $Oz$ части однородной конической поверхности $x^2+z^2=y^2$, $y>0$ плотности $\rho(M)=1$, заключённой внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

10. Вычислить момент инерции относительно начала координат однородной полной поверхности цилиндра $x^2+y^2\le 4, 0\le z\le 1$, если поверхностная плотность $\rho(M)=1$.

11. Найти производную скалярного поля $u$ по направлению **l** в точке $M$:

а) $u=x^3-3x^2y+3xy^2+1$, **l**=**MN**, $M(3,1)$, $N(6,5)$.

б) $u=x^2-xy+y^2$, **l**=6**i**+8**j**, $M(1,1)$.

в) $u=xy^2+z^3-xyz$, $M(1,1,2)$, вектор **l** образует с осями $Ox$, $Oy$, $Oz$ углы соответственно $60^0, 45^0, 60^0$.

12. Найти градиент скалярного поля:

а) $u=x^3y^2z$ в точке $M(1,2,3)$;

б) $u=(x-y)(y-z)(z-x)$ в точке $M(3,1,2)$.

в) $u=(x-1)(y-2)(z-3)$ в точке $M(2,3,4)$.

13. В каких точках градиент скалярного поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$:

а) параллелен оси Oz; б) перпендикулярен оси Oz; в) равен нулю?

14. В каких точках градиент скалярного поля $u=x^2+y^2-2xy$:

а) перпендикулярен прямой $y=x$; б) равен нулю?

15. Найти угол между градиентами скалярного поля $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ в точках $M(1,2,2)$ и $N(-3,1,0)$.

16. Доказать, что а) $grad\, r=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$; б) $grad\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$; в) $grad\sin r=\cos r\dfrac{\mathbf{r}}{r}$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}, r=|\mathbf{r}|$.

17. Найти дивергенцию векторного поля **F**, если:

а) $\mathbf{F}=(x-y)(y-z)\mathbf{i}+(y-z)(z-x)\mathbf{j}+(z-x)(x-y)\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)(x + y)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)(y + z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)(z + x)\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)(y - z)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\mathbf{k}$.

**18.** Вычислить: а) $\operatorname{div} \mathbf{r}$; б) $div\frac{\mathbf{r}}{r}$; в) $div(r^4\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$.

**19.** Проверить соленоидальность следующих векторных полей:

а) $\mathbf{F} = (x^2yz + y^3)\mathbf{i} + (xy^2z - x^3)\mathbf{j} - 2xyz^2\mathbf{k}$.

б) $\mathbf{F} = \frac{x}{yz}\mathbf{i} + \frac{y}{xz}\mathbf{j} - \frac{x+y}{xy}\ln z\mathbf{k}$.

в) $\mathbf{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} + \frac{(x^2 - y^2)z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\mathbf{k}$.

**20.** Показать, что магнитное поле напряженности $\mathbf{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, создаваемое электрическим током I, текущим по бесконечному проводу, совпадающему с осью $Oz$, соленоидально всюду, кроме точек оси $Oz$.

**21.** Твердое тело вращается вокруг оси $Oz$ с постоянной угловой скоростью ω. Поле скоростей точек тела определяется формулой $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k}, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Показать, что это поле соленоидально всюду, кроме точек оси $Oz$.

**22.** Найти ротор векторного поля:

а) $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

б) $\mathbf{F} = y^2z^3\mathbf{i} + 2xzy^2\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$.

в) $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + z(x + 2y)\mathbf{j} + y(x + y)\mathbf{k}$.

г) $\mathbf{F} = \frac{y}{x^2}\mathbf{j} - \frac{1}{x}\mathbf{k}$.

**23.** Вычислить: а) rot ($r$ $\mathbf{r}$); б) $rot\frac{\mathbf{r}}{r}$; в) $rot\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$.

**24.** Показать потенциальность следующих векторных полей:

а) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

б) $\mathbf{F} = (3x^2y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\mathbf{j}$.

в) $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$.

**25.** Показать, что электрическое поле напряженности $\mathbf{E} = \dfrac{ke}{r^3}\mathbf{r}$ точечного заряда, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$, является потенциальным при $r \neq 0$.

**26.** Найти grad div**F**, если $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

**27.** Найти rot rot**F**, если $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$.

**28.** Для векторного поля $\mathbf{F} = x^2y^2\mathbf{i} + y^2z^2\mathbf{j} + z^2x^2\mathbf{k}$ вычислить rot rot**F**, grad div**F**, $\Delta\mathbf{F}$ и проверить справедливость формулы rot rot**F** = grad div**F** - $\Delta\mathbf{F}$.

**29.** Доказать, что векторное поле $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + e^x\mathbf{k}$ удовлетворяет уравнению rot rot**F** + **F** = **0**.

**30.** Показать, что функция $u = \ln\dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа на плоскости: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

**31.** Показать, что электрическое поле $\mathbf{E} = \dfrac{ke}{r^3}\mathbf{r}$ точечного заряда $e$, удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа $\Delta\mathbf{E} = 0$.

**32.** Вычислить поток векторного поля **F**=(z+1)**k** через:

а) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ в сторону внешней нормали к сфере.

б) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$ в сторону внутренней нормали к сфере.

в) внешнюю сторону основания полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.

**33.** Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ через:

а) верхнее и нижнее основание цилиндра $x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq H$ в сторону внешних нормалей.

б) внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра.

**34.** Найти поток векторного поля **F** через выбранную сторону поверхности $S$:

а) $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, S – верхняя сторона треугольника, вырезанного из плоскости $x+y+z-1=0$ координатными плоскостями.

б) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, S – верхняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, расположенной в первом октанте.

в) $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$, S – верхняя сторона части плоскости $2x+2y-z=1$, ограниченной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

**35.** Применяя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$ через:

а) поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ в сторону внешней нормали.

б) сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в сторону внешней нормали.

**36.** Применяя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = x\cos y\mathbf{i} - \sin y\mathbf{j} + (z-1)^2\mathbf{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 2$ в сторону внешней нормали.

**37.** Применяя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить поток векторного поля $\mathbf{F} = xy^3\mathbf{i} + yx^3\mathbf{j} - zy^3\mathbf{k}$ через поверхность параболоида $z = 1 - x^2 - y^2, z \ge 0$ в сторону внешней нормали.

**38.** Найти циркуляцию векторного поля F вдоль контура $L$, обходимого в положительном направлении:

а) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, L – окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

б) $\mathbf{F} = (x + z)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, L – эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, z = 0$.

в) $\mathbf{F} = (x - 2)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$, L – контур треугольника с вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

**39.** Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ плоскостью: а) $x+y+z=0$ б) $x-y+z=-1$. Контур пробегается против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,2,0).

**40.** Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = (z - x^2)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j} + (y - z^2)\mathbf{k}$ вдоль:

а) контура треугольника с вершинами $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$.

б) контура треугольника с вершинами $A(0,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Контуры пробегаются против часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

# ГЛАВА IV

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## §1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ.

Определение 1. *Комплексным числом* $z$ называется выражение вида:

$$z = x + iy \tag{1}$$

(алгебраическая форма числа), где $x$ и $y$ - любые действительные числа, а $i$ - мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Числа $x$, $y$ - называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z \tag{2}$$

Определение 2. Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Определение 3. Комплексное число $z = 0$, тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Определение 4. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$;

Арифметические действия с комплексными числами перестановочны с операцией перехода к сопряженным числам, а именно:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \tag{3}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \tag{4}$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n; \tag{5}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (6)$$

**Пример 1.** Вычислить:

а) $(1+i)(\sqrt{5}-2i)$; б) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{1}{1+2i}-\dfrac{i}{2-i}$; г) $(1+i)^{2000}$;

**Решение.**

а) $(1+i)(\sqrt{5}-2i)=\sqrt{5}-2i+i\sqrt{5}-2i^2=\sqrt{5}+2+i(\sqrt{5}-2)$;

б) $$\frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+i)(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+i^2\sqrt{3}+3i+2i}{4+3}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5i}{7}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}+5i}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{5}{7}i;$$

в) $$\frac{1}{1+2i}-\frac{i}{2-i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}-\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1-2i}{1+4}-\frac{2i-1}{4+1}=$$
$$=\frac{1-2i}{5}-\frac{2i-1}{5}=\frac{1-2i-2i+1}{5}=\frac{2-4i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i;$$

г) $(1+i)^{2000}=\left[(1+i)^2\right]^{1000}=(1+2i-1)^{1000}=(2i)^{1000}=2^{1000}\cdot(i^4)^{250}=2^{1000}$

**Пример 2.** Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$:

а) $z=\dfrac{2}{1-i}$; б) $z=\dfrac{2}{-i}+i(1+i)$; в) $z=(2-i)^2$;

**Решение.**

а) $z=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+2i}{1+1}=1+i\Rightarrow \operatorname{Re} z=1; \operatorname{Im} z=1;$

б) $z=\dfrac{2}{-i}+i(1+i)=-\dfrac{2i}{i^2}+i+i^2=2i+i-1=3i-1\Rightarrow \operatorname{Re} z=-1; \operatorname{Im} z=3;$

в) $z=(2-i)^3=8-3\cdot4\cdot i+3\cdot2\cdot i^2-i^3=8-12i-6+i=2-11i\Rightarrow$
$\operatorname{Re} z=2; \operatorname{Im} z=-11;$

**Пример 3.** Найти действительные $\alpha$ и $\beta$ для которых:

а) $\alpha(2-i)+\beta(2i-1)=4-5i$;

б) $(1+i)\alpha^2+(2+i)\alpha-(1-i)\beta=7(1+i)$;

**Решение.**

а) $\alpha(2-i)+\beta(2i-1)=2\alpha-\alpha i+2\beta i-\beta=4-5i$

$$(2\alpha-\beta)+i(2\beta-\alpha)=4-5i\Rightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=4\\2\beta-\alpha=-5\end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $\alpha=1;\beta=-2$;

б) $\alpha^2+i\alpha^2+2\alpha+i\alpha-\beta+i\beta=7+7i$

$$(\alpha^2+2\alpha-\beta)+i(\alpha^2+\alpha+\beta)=7+7i\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2+2\alpha-\beta=7\\\alpha^2+\alpha+\beta=7\end{cases}$$

Складывая, имеем $2\alpha^2+3\alpha=14$ или $2\alpha^2+3\alpha-14=0$. Решая, получим $\alpha_1=2;\alpha_2=-\dfrac{7}{2}$.

Вычисляем соответствующие значения для $\beta:\beta_1=1,\beta_2=-\dfrac{7}{4}$;

Итак, $\begin{cases}\alpha_1=2\\\beta_1=1\end{cases};\begin{cases}\alpha_2=-\dfrac{7}{2}\\\beta_2=-\dfrac{7}{4}\end{cases}$

**Пример 4.** Доказать:

а) $\mathrm{Re}(z-\bar{z})=0$; б) $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$; в) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$;

**Решение.**

а) $z=x+iy,\bar{z}=x-iy\Rightarrow z-\bar{z}=2yi\Rightarrow\mathrm{Re}(z-\bar{z})=0$;

б) $z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=2iy$;

$\mathrm{Im}\,z=y\Rightarrow z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$;

в) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1\cdot(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

# §2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости $xOy$ точкой $M(x;y)$ либо радиус-вектором с концом в точке $M(x;y)$. Длина $r$ вектора $\overline{OM}$ называется *модулем* числа $z$ и обозначается $|z|$. Угол $\varphi$ между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overline{OM}$ (см рис.1) называется *аргументом* числа $z$ и обозначается $Arg\ z$. Очевидно, что аргумент комплексного числа определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k$ - целое число:

$$Arg\ z = Arg\ z + 2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{7}$$

где $Arg\ z$ - главное значение аргумента, определяемое условием: $-\pi < Arg z \leq \pi$.

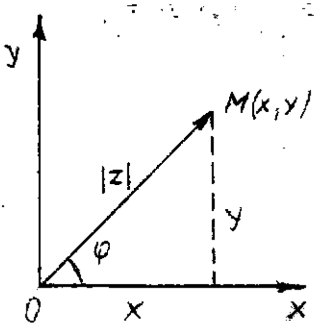



Рис. 1

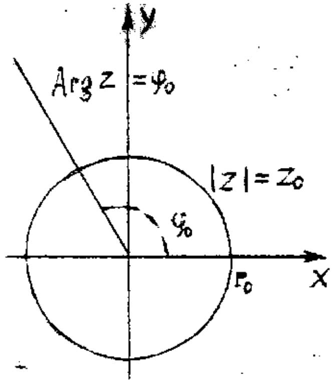



Рис. 2

Из рисунка 1 следует, что

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \tag{8}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, r \geq 0 \quad \varphi = arctg\frac{y}{x} + \pi k, k = 0,\pm1,\ldots$$

(число $k \in Z$ выбирается так, чтобы $\varphi \in (-\pi;\pi]$).

Используя (8) можно комплексное число $z$ записать в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos Argz + i\sin Argz) \qquad (9)$$

Из формулы (9) следует, что множество чисел постоянного модуля $r_0$ изображает окружность с центром в начале координат и радиуса $r_0$. Множество же чисел постоянного аргумента $\varphi_0$ изображается лучом, выходящим из начала координат под углом к оси абсцисс (рис.2).

<u>Определение 5.</u> Два комплексных числа $z_1$ и $z_2$ равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$; где $k = 0, \pm 1, \ldots$:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|,\ Argz_1 = Argz_2 + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}, \text{ где } r = |z|,\ \varphi = Argz. \qquad (10)$$

При умножении и делении комплексных чисел пользуются следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> *Пусть* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi\,),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Тогда*

$$1)\ z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad (11)$$

$$2)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\ z_2 \neq 0 \qquad (12)$$

$$3)\ z^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi] \text{-}\textit{формула Муавра.} \qquad (13)$$

*То есть*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ Arg(z_1 \cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2,\ z_2 \neq 0$$

$$|z^n| = |z|^n,\ Argz^n = nArgz,\ z \neq 0.$$

<u>Определение 6.</u> Корнем $n$-ой степени из комплексного числа $z$ называется такое комплексное число $w$, что:

$$w^n = z. \qquad (14)$$

Положив $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ перепишем (14) используя формулу Муавра (13):

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тогда по определению 5 будем иметь:

$$r = \rho^n,\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k = 0,\pm1,\ldots$$

Или:

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k = 0,\pm1,\ldots$$

Таким образом, всякий корень степени $n$ из числа $z$ имеет вид:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,\pm1,\ldots,n-1 \qquad (15)$$

Формула дает $n$ различных значений корня при $k = 0,\pm1,\ldots,n-1$. При следующих же значениях $k$ значения корней будут повторяться.

Так как модули всех корней $w_k$ равны $\sqrt[n]{r}$, а аргументы отличаются на $\frac{2\pi}{n}$, то геометрически все значения корня $n$-ой степени из комплексного числа $z$ лежат в вершинах правильного $n$-угольника, вписанного в окружность с центром в $O(0,0)$ радиуса $\sqrt[n]{|z|}$.

**Пример 5.** Изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме числа:

$$z_1 = 1,\quad z_2 = -1,\quad z_3 = i,\quad z_4 = -i,\quad z_5 = 1 + i,$$

$$z_6 = -\sqrt{2} - \sqrt{2i},\quad z_7 = -1 + i\sqrt{3},\quad z_8 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Решение.**

Изображение первых шести чисел на плоскости см. на рис.3:

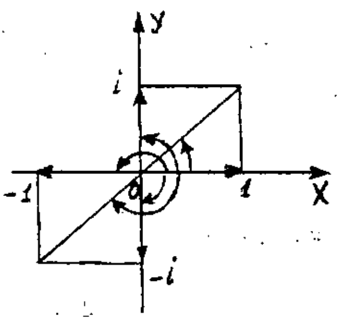



Рис.3.

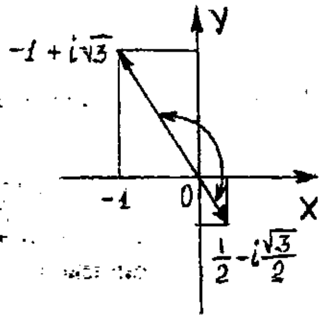



Рис.4.

Уже из расположения чисел на плоскости можно найти следующие аргументы:

$$\arg z_1 = 0,\ \arg z_2 = \pi,\ \arg z_3 = \frac{\pi}{2},\ \arg z_4 = -\frac{\pi}{2},\ \arg z_5 = \frac{\pi}{4},$$

$$\arg z_6 = -\frac{3\pi}{4}.$$

На рисунке 3 стрелками показано, в каком направлении нужно отсчитывать главный аргумент.

Модули этих чисел соответственно равны:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ r_2 = \sqrt{\left(-1^2\right) + 0^2} = 1,\ r_3 = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,$$

$$r_4 = \sqrt{0^2 + \left(-1^2\right)} = 1,\ r_5 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$r_6 = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

Поэтому имеем:

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0,\ z_2 = \cos\pi + i\sin\pi,$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},\ z_4 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_6 = 2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Для чисел $z_7, z_8$ имеем:

$r_7 = \sqrt{\left(-1^2\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $\quad tg\varphi_7 = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$. Следовательно, $\varphi_7 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$. Чтобы найти главное значение аргумента $z_7$, надо взять $k = 1$, так как точка $z_7$ лежит во втором квадранте, т.е. $\arg z_7 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$. Поэтому $z_7 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Аналогично рассуждаем для числа $z_8$:

$$r_8 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,\ tg\varphi_8 = -\sqrt{3},\ \varphi_8 = -\frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Так как точка $z_8$ находится в четвёртом квадранте, то $k=0$, $\arg\varphi_8 = -\dfrac{\pi}{3}$. Итак, $z_8 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Пример 6.** Вычислить:

а) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$; б) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$;

**Решение.**

а) Представим число $z=-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2, tg\varphi=-\sqrt{3} \to \varphi=\frac{2\pi}{3}$$

Тогда:

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Применяя формулу (13),получим:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60*\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(60*\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}.$$

б) Запишем числа $z_1=-1-i\sqrt{3}$ и $z_2=1-i$ в тригонометрической форме:

$$r_1=|z_1|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,\ tg\varphi_1=\sqrt{3},\ \varphi_1=\frac{\pi}{3}+\pi k,$$

$$\arg z_1=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3},$$

($k=-1$, т.к. точка лежит в III четверти).

$$r_2=|z_2|=\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{2},\ tg\varphi_2=-1,\ \varphi_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k,$$

$$\arg z_2=-\frac{\pi}{4}+\pi 0=-\frac{\pi}{4},$$

($k=0$, т.к. точка лежит в IV четверти).

Имеем:

$$z_1=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$z_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Тогда по формуле (13) имеем:

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}=\left(\frac{2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right)^{12}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^{12}=$$

$$=2^6\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{12}=2^6\left[\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi)\right]=$$

$$=2^6(-1)=-2^6$$

**Пример 7.**

а) Вычислить: $\sqrt[4]{1-i}$;

б) Решить уравнение $z^3+i=0$;

**Решение.**

а) представим число $1-i$ в тригонометрической форме:

$|1-i|=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}; \arg(1-i)=arctg(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$ (число лежит в четвертой четверти) $\Rightarrow 1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

Следовательно по формуле (15) получим:

$$w_k=\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right), k=0,1,2,3.$$

Полагая $k=0,1,2,3,$ найдем все значения корня и запишем их в показательной форме:

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right] = \sqrt[8]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}};$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right] = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{7\pi}{16}};$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right] = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{15\pi}{16}};$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right] = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(-\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{16}\right)\right] = \sqrt[8]{2}e^{-i\frac{9\pi}{16}};$$

Отметим, что точки $w_0, w_1, w_2, w_3$ являются вершинами квадрата (см. рис.5).

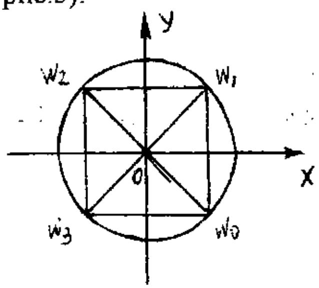



Рис. 5

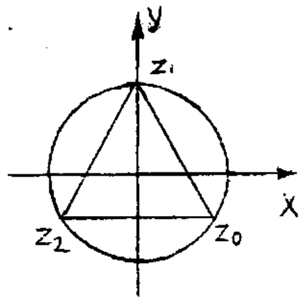



Рис. 6

б) Разрешим уравнение относительно $z$, тогда $z = \sqrt[3]{-i}$.

Так, как $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$z_k = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2;$$

Или в алгебраической форме имеем:

$$z_0 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$z_2 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$$

Числа $z_0, z_1, z_2$ являются вершинами правильного треугольника (см. рис. 6).

**Пример 8.** Определить, какие множества точек удовлетворяют заданным неравенствам:

а) $-\frac{\pi}{2} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4}$; б) $\left|\frac{z+2}{z-2}\right| \le 1$; в) $\operatorname{Im} z^2 \ge 2$;

г) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$; д) $|z+c| + |z-c| \le 2a, a > c > 0$

**Решение.**

а) комплексное число:

$$z+1-i = z-(-1+i)$$

изображается вектором с началом в точке $-1+i$, а концом в точке $z$. Угол между этим вектором и осью $Ox$ есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$. Следовательно данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью $Ox$ углы в $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$ радиан (см. рис.7).

б) умножим обе части неравенства на $|z-2|$, получим равносильное неравенство

$$|z+2| \le |z-2|.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и раскроем скобки, положив $z = x+iy$:

$$(x+2)^2 + y^2 \le (x-2)^2 + y^2$$

$$4x \le -4x, x \le 0$$

Следовательно, искомое множество – левая полуплоскость, включая границу $x = 0$ (см. рис.8).

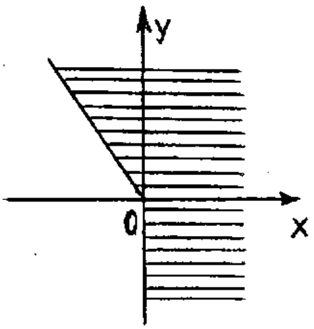



Рис. 7

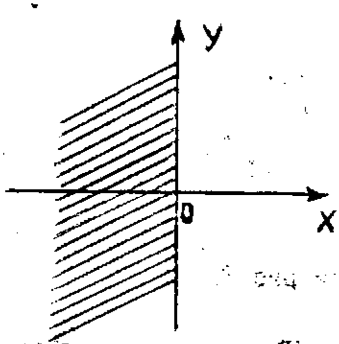



Рис.8

в) Положив $z = x + iy$, получим

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию

$$2xy > 2 \text{ или } xy > 1.$$

Равенство $xy = 1$ или $y = \dfrac{1}{x}$ задаёт гиперболу, ветви которой располагаются в 1 и 3 квадрантах. Непосредственной проверкой убеждаемся, что искомое множество точек располагается над гиперболой в 1 квадранте и под гиперболой в 3 квадранте (см. рис 9).

г) Пусть $z = x + iy$. Имеем:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \operatorname{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

По условию:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \text{ или } x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Это окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (см. рис. 10).

д) $|z+c|$ - расстояние между точками $z$ и $-c$;

$|z-c|$ - расстояние между точками $z$ и $c$. По условию сумма расстояний от точки $z$ до двух данных точек $z_1=-c$ и $z_2=c$ есть величина постоянная. Значит, точка $z$ лежит внутри эллипса, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2=a^2-c^2$. Отметим, что уравнение эллипса можно было вывести непосредственно, полагая, как и раньше, $z=x+iy$ и возводя в квадрат (рис. 11).

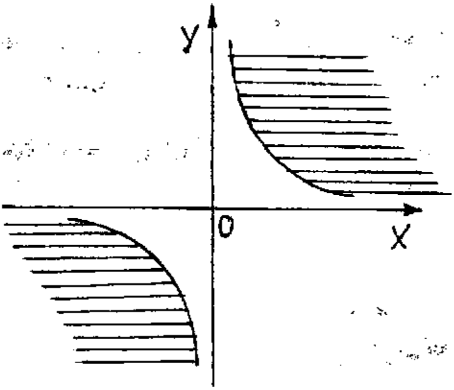



Рис. 9

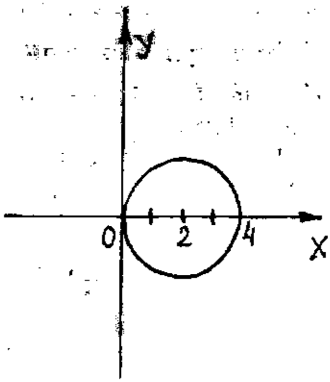



Рис. 10

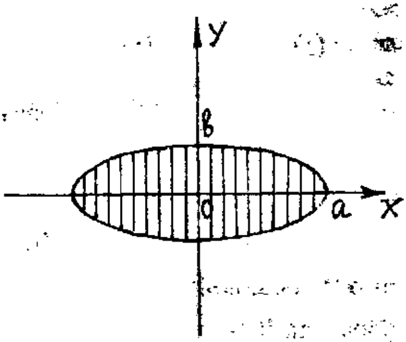



Рис. 11

## §3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение 7. Говорят, в области D определена функция $w=f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений $w$.

Пусть $z=x+iy$, $w=u+iv$. Тогда зависимость $w=f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных функций $u$, $v$ двух действительных переменных $x$, $y$:

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Геометрически функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости $z$ на соответствующие точки комплексной плоскости $w$.

Пусть в плоскости $z$ кривая задана уравнением $F(x,y)=0$. Чтобы найти уравнение образа $\Phi(u,v)=0$ этой кривой в плоскости $w$ при отображении с помощью функции $w = f(z) = u + iv$, нужно исключить $x$ и $y$ из уравнений:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ или } \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

то параметрические уравнения ее образа при отображении $w = f(z) = u + iv$ будут:

$$\begin{cases} u = u[x(t), y(t)] = U(t) \\ v = v[x(t), y(t)] = V(t) \end{cases}$$

**Пример 9.** Найти образ кривой:

а) $|z| = 1$ при отображении $w = z^2$

б) $z = R\cos t + iR\sin t \;\; (0 \le t \le 2\pi)$ при отображении $w = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

**Решение.**

а) Пусть $z=x+iy$, $w = u + iv \Rightarrow w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, тогда $u = x^2 - y^2, v = 2xy$.

Исключая $x$ и $y$ из уравнений

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

получим $u^2+v^2=1$.

Итак, образом единичной окружности $|z|=1$ в плоскости $z$ является окружность $u^2+v^2=1$ в плоскости $w$, проходимая дважды. Это следует из того, что при отображении $w=z^2, Argw=2Argz+2\pi k$. Поэтому, когда точка $z$ описывает полную окружность $|z|=1$, то ее образ описывает окружность $|w|=1$ дважды.

б) Данное уравнение окружности можно записать в виде $x=R\cos t, y=R\sin t, 0\le t\le 2\pi$. Выделим действительную и мнимую части функции $w=u+iv$.

Имеем:

$$u+iv=\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{\bar{z}\cdot z}=\frac{x^2-y^2+i2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Отсюда $\begin{cases} u=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{cases}$

Подставляя $x=R\cos t, y=R\sin t$ в $u$ и $v$, получим параметрические уравнения образа окружности:

$$\begin{cases} u=\dfrac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\cos 2t \\ v=\dfrac{2\cos t\cdot\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\sin 2t \end{cases} \text{ или } u^2+v^2=1.$$

Итак, образ есть единичная окружность, проходимая дважды.

Приведем основные элементарные функции комплексного переменного:

1) *Показательная функция*

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{16}$$

Приведем основные свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$; б) $e^{z+2k\pi}=e^z$, то есть $T=2\pi i$ - период;

в) $e^z\neq 0, z\neq\infty$.

2) *Тригонометрические функции*

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\ tgz=\frac{\sin z}{\cos z}; \tag{17}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \; ctgz = \frac{\cos z}{\sin z};$$

Можно показать, что формулы, связывающие тригонометрические функции действительного и комплексного переменного совпадают, но в отличие от функций действительного переменного функции $\sin z$ и $\cos z$ не являются ограниченными по модулю единицей, а могут принимать любые комплексные значения.

Например,

$$\sin i\pi = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i}, |\sin i\pi| = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} \approx 11{,}55 > 1.$$

3) *Гиперболические функции*

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad thz = \frac{shz}{chz} \tag{18}$$

$$chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad cthz = \frac{chz}{shz}$$

Можно показать, что тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой равенствами:

$$\cos iz = chz, \qquad \sin iz = ishz,$$

$$chiz = \cos z, \qquad shiz = i \sin z. \tag{19}$$

4) *Логарифмическая функция* Ln $z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi ki, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

Эта функция является многозначной. Главным значением Ln $z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$, оно обозначается:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \tag{21}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2; \; Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2; \; Lnz^n \neq nLnz$$

5) *Общая степенная функция* $w = z^a$, $a = \alpha + i\beta$ определяется соотношением:

$$z^a = e^{a \ln z} \tag{22}$$

6) *Общая показательная функция* $w = a^z$ ($a \neq 0$ - любое комплексное число) определяется равенством:

$$a^z = e^{z \ln a} \qquad (23)$$

7) *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin z, \arccos z$, $arctgz$ определяются как функции, обратные соответственно к $\sin z, \cos z, tgz$. Все они являются многозначными и выражаются через логарифмические функции:

$$\begin{cases} \arcsin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}) \\ \arccos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ arctgz = -\dfrac{i}{2} Ln \dfrac{1 + iz}{1 - iz} \end{cases} \qquad (24)$$

**Пример 10.** Найти модуль и главное значение аргумента данных функций

1) $z_1 = e^{2+i}$; 2) $z_2 = e^{5-12i}$; 3) $w = \cos z$ в точке $z_1 = \dfrac{\pi}{2} + i \ln 2$

**Решение.**

1) Воспользуемся показательной формой комплексного числа $z = |z| e^{i \arg z}, \arg z \in (-\pi, \pi]$. Так как $z_1 = e^{2+i} = e^2 e^i, 1 \in (-\pi, \pi]$, то $|z_1| = e^2, \arg z_1 = 1$.

2) $z_2 = e^{5-12i} = e^5 e^{-12i}$. Так как $-12 \notin (-\pi, \pi]$, то воспользовавшись периодичностью показательной функции $(T = 2\pi i)$ будем иметь:

$z_2 = e^5 e^{-12i} = e^5 e^{i(-12+4\pi)}, -12 + 4\pi \in (-\pi, \pi]$, поэтому $|z_2| = e^5, \arg z_2 = -12 + 4\pi$.

3) Так как $z = x + iy$, то

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy.$$

Воспользовавшись формулами (19), получим:

$$\cos z = \cos x ch y - i \sin x sh y.$$

Поэтому:

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x ch^2 y + \sin^2 x sh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x ch^2 y + sh^2 y (1 - \cos^2 x)} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 x(ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y}$$

Полагая $z = \dfrac{\pi}{2} + i\ln 2$, то есть $x = \dfrac{\pi}{2}, y = \ln 2$, имеем:

$$|\cos z|\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+i\ln 2} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{2} + sh^2(\ln 2)} = sh(\ln 2) =$$

$$= \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Найдем аргументы:

$$tg\varphi = \frac{-\sin x sh y}{\cos x ch y} = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = -\frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} tg\frac{\pi}{2} = -\infty$$

$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Итак, $|\cos z|\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+i\ln 2} = \dfrac{3}{4}$; $\arg\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+i\ln 2} = -\dfrac{\pi}{2}$.

**Пример 11.** Найти действительную и мнимую часть:

а) $\cos(3i + \pi)$; б) $2^z$.

**Решение.**

а) Согласно формулам (17), имеем:

$$\cos(3i + \pi) = \frac{e^{i(3i+\pi)} + e^{-i(3i+\pi)}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-3+\pi i} + e^{3-\pi i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-3}(\cos\pi + i\sin\pi) + e^{3}(\cos\pi - i\sin\pi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-e^{-3} - e^{3}) = -ch3$$

$\operatorname{Re}\cos(3i + \pi) = -ch3; \operatorname{Im}\cos(3i + \pi) = 0$

б) Используя формулу (23), получим:

$$2^z = e^{zLn2} = e^{(x+iy)[\ln|2| + i\arg 2 + 2k\pi i]} = e^{x\ln 2 - y(\arg 2 + 2\pi k) + i(x(\arg 2 + 2k\pi) + y\ln 2)} =$$

$$= e^{x\ln 2 - y(\arg 2 + 2\pi k)}[\cos(x(\arg 2 + 2\pi k) + y\ln 2) +$$

$$+ i\sin(x(\arg 2 + 2\pi k) + y\ln 2)]$$

$$\operatorname{Re} 2^z = e^{x\ln 2 - y(\arg 2 + 2\pi k)} \cos(x(\arg 2 + 2\pi k) + y\ln 2);$$

$$\operatorname{Re} 2^z = e^{x\ln 2 - y(\arg 2 + 2\pi k)} \sin(x(\arg 2 + 2\pi k) + y\ln 2).$$

**Пример 12.** Вычислить:

а) $i^i$; б) $Ln(-1-i)$; в) $\ln(-i)$; г) $(1-i)^{3-3i}$

**Решение.**

а) По определению:

$$i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln|i| + i\arg i + 2\pi ki)} = e^{i\left[\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki\right]} = e^{i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, k \in Z.$$

б)
$$Ln(-1-i) = \ln|-1-i| + i\arg(-1-i) + 2\pi ki = \ln\sqrt{1+1} + i\,arctg 1 + 2\pi ki =$$
$$= \ln\sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4} + 2\pi ki, k \in Z,$$

т.к. точка $-1-i$ лежит в третьем квадранте.

в) $\ln(-i) = \ln|-i| + i\,arctg(-i) = \ln 1 - i\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}i;$

г)
$$(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i)Ln(1-i)} = e^{(3-3i)(\ln|1-i| + i\arg(1-i) + 2\pi ki)} =$$
$$= e^{(3-3i)(\ln\sqrt{2} + i\,arctg(-1) + 2\pi ki)} = e^{(3-3i)\left(\ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + 2\pi ki\right)} =$$
$$= e^{3\ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} + 6\pi k + i\left(6\pi k - \frac{3\pi}{4} - 3\ln\sqrt{2}\right)} =$$
$$= e^{3\ln\sqrt{2} + 6\pi k - \frac{3\pi}{4}}\left[\cos\left(6\pi k - \frac{3\pi}{4} - 3\ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(6\pi k - \frac{3\pi}{4} - 3\ln\sqrt{2}\right)\right] =$$
$$= e^{3\ln\sqrt{2} + 6\pi k - \frac{3\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 3\ln\sqrt{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 3\ln\sqrt{2}\right)\right] =$$
$$= 2^{\frac{3}{2}} e^{6\pi k - \frac{3\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 3\ln\sqrt{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 3\ln\sqrt{2}\right)\right], k \in Z$$

**Пример 13.** Решить уравнения:

а) $\operatorname{ch} z = i$; б) $\sin z = 0$; в) $\sin z - i\operatorname{sh} z = 0$.

**Решение.**

а) перепишем данное уравнение в виде:

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=i \text{ или } e^z+\frac{1}{e^z}=2i.$$ Умножая на $e^z$, получим:

$$e^{2z}-2ie^z+1=0$$

Обозначим $e^z=t$, тогда решая уравнение

$$t^2-2it+1=0,$$

получим его корни:

$$t_{1,2}=i\pm i\sqrt{2}=i\left(1\pm\sqrt{2}\right)$$

Остается решить теперь два уравнения:

$$e^z=i\left(1\pm\sqrt{2}\right)$$

Так как для функции $w=e^z$ обратной является функция $z=Lnw$, то решениями последнего уравнения будут:

$$z=Ln\left(1\pm\sqrt{2}\right)i \text{ или}$$

$$z=\ln\left|\left(1\pm\sqrt{2}\right)\right|+i\left(\arg\left(1\pm\sqrt{2}\right)i\right)+2\pi ki=\ln\left|\left(1\pm\sqrt{2}\right)\right|\pm i\frac{\pi}{2}+2\pi ki, k\in Z$$

б) $\sin z=0$ или $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$, или $e^{iz}-e^{-iz}=0, e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}=0, e^{2iz}=1$.

Так как функция $e^z$ периодическая с периодом $2\pi i$, то равенство возможно, если $2iz=0+2\pi ki$ или $z=\pi k, k\in z$. Эти решения совпадают с решением уравнения $\sin x=0$.

в) $\sin z-ishz=0$

Воспользуемся формулами (17),(18), тогда

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}-i\frac{e^z-e^{-z}}{2}=0 \text{ или } e^{iz}-e^{-iz}+e^z-e^{-z}=0.$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$e^{iz}+e^z-\left[\frac{1}{e^{iz}}+\frac{1}{e^z}\right]=0\Rightarrow e^{iz}+e^z-\frac{e^z+e^{iz}}{e^z e^{iz}}=0$$

Преобразуем это уравнение:

$$\left(e^{iz}+e^z\right)\left(1-\frac{1}{e^z\cdot e^{iz}}\right)=0, \left(e^{iz}+e^z\right)\cdot\frac{e^z e^{iz}-1}{e^z e^{iz}}=0.$$

Так как $e^z e^{iz}\neq 0$, то:

1) $e^z+e^{iz}=0\Rightarrow e^{iz}=-e^z\Rightarrow e^{iz}=e^{z+\pi i}$.

Из последнего равенства, используя периодичность, получим:

$$iz = z + \pi i + 2\pi k i \Rightarrow z = \frac{\pi i(1+2k)}{i-1} = \frac{\pi(1+2k)}{i+1}, k \in Z.$$

$$e^z e^{iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{(i+1)z} = 1 \Rightarrow (i+1)z = 2\pi k i \Rightarrow$$

2) $$z = \frac{2\pi k i}{1+i} = n\pi(1+i), n \in Z.$$

Итак, решениями исходного уравнения являются числа:

$$z = \frac{\pi(1+2k)}{i+1}, k \in Z, z = \pi n(1+i), n \in Z.$$

## §3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ.

Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой области $D$ комплексного переменного $z$. Пусть точки $z$ и $z+\Delta z$ принадлежат области $D$. Обозначим:

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z); \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 8. Функция w=f(x) называется *дифференцируемой* в точке $z \in D$ , если отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z \to 0$ произвольным образом. Этот предел называется производной функции и обозначается:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{25}$$

Теорема Коши-Римана.

*Для того чтобы функция f(z)=u(x,y)+iv(x,y) была дифференцируема в точке z=x+iy, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{26}$$

*При этом функции u(x,y), v(x,y) должны быть дифференцируемы как функции действительных переменных x и y.*

Определение 9. Функция $w=f(z)$ называется *аналитической* в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке $z$, так и в некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической* в области $D$ если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Для любой аналитической $f(z)$ функции имеем:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (27)$$

Пусть функция $w=f(z)$ аналитическая в окрестности точки $z_0, f'(z_0) \neq 0$, отображает произвольную линию С , выходящую из точки $z_0$ на некоторую линию $C'$, выходящую из $w_0=f(z_0)$. Обозначим через $\varphi$ наклон к вещественной оси $Ox$ линии $C$ в точке $z_0$ и $\psi$ - наклон ее образа С' к вещественной оси $Ou$ в точке $w_0$. Назовем разность $\alpha = \psi - \varphi$ углом поворота кривой С в точке $z_0$, а $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = k$ - коэффициентом растяжения кривой $C$ в точке $z_0$. Угол поворота $\alpha$ и коэффициент растяжения $k$ для всех кривых, выходящих из точки $z_0$ один и тот же. Поэтому величины $\alpha$ и $k$ будем называть углом поворота и коэффициентом растяжения самого отображения $w = f(z)$ в точке $z_0$. Можно доказать, что

$$k = |f'(z_0)|, \alpha = \arg f'(z_0). \qquad (28)$$

**Пример 14.** Проверить, является ли $f(z)$ аналитической функцией, в случае положительного ответа, найти ее производную:

а) $f(z) = 3iz^2 - 4$; б) $f(z) = (x^2 - y^2 + 3x + y) + i(2xy - x + 3y)$;

в) $f(z) = (\bar{z})^2$.

**Решение.**

а) $f(z) = 3i(x+iy)^2 - 4 = -6xy - 4 + i(3x^2 - 3y^2)$, поэтому

$u(x,y) = -6xy - 4$;

$v(x,y) = 3x^2 - 3y^2$.

Условия Коши-Римана (26) выполняются во всей плоскости $u'_x = -6y = v'_y; u'_y = -v'_x = -6x$. Тогда

$f'(z)=u'_x+iv'_x=-6y+6xi=6i(x+iy)=6iz$.

б) Проверим условия (26):

$u'_x=(x^2-y^2+3x+y)_x=2x+3=v'_y$;

$u'_y=-2y+1=-v'_x$;

Значит, $f(z)$ аналитическая во всей плоскости. Производная:

$f'(z)=(2x+3)+i(2y-1)=2z+3-i$.

в) $f(z)=(\bar{z})^2=(x-iy)^2=x^2-y^2-i2xy$,

$u(x,y)=x^2-y^2$; $v(x,y)=-2xy$;

Найдем частные производные:

$u'_x=2x$; $v'_y=-2x\Rightarrow u'_x\neq v'_y$. Значит, функция $f(z)$ не является аналитической ни в одной точке плоскости $z$.

**Пример 15.** Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $f(z)=z^2+2z$ в точках $-1;0;1+i$.

**Решение.**

Вычислим производную: $f'(z)=2z+2$. По формуле (28) имеем

$k=|f'(z_0)|=2|z_0+1|=2\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}$;

$\alpha=\arg f'(z_0)=\arg 2(z_0+1)$.

а) $z_0=1\rightarrow x_0=1, y_0=0\Rightarrow k=4, \alpha=\arg 4=0$;

б) $z_0=0\rightarrow x_0=y_0=0\Rightarrow k=2, \alpha=\arg 2=0$;

в) $z_0=1+i\rightarrow x_0=y_0=1\Rightarrow k=2\sqrt{5}, \alpha=\arg 2(2+i)=arctg\frac{1}{2}$.

**Пример 16.** Вычислить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:

а) $w=e^z$; б) $w=z^3$.

**Решение.**

а) Найдем производную $w'=e^z$. За растяжение и сжатие отвечает коэффициент $k=|w'|=|e^z|=|e^x e^{iy}|=e^x$. Поэтому, будет растяжение, если k>1, то есть $e^x>1\Rightarrow x>0$. Соответственно, при k<1,т.е. $e^x<1\Rightarrow x<0$ - сжимается. Таким образом, полуплоскость Re $z$>0 растягивается, а полуплоскость Re $z<0$ сжимается.

б) $w'(z) = 3z^2 = 3(x^2 - y^2) + 6ixy$;

$$|w'(z)| = \sqrt{9(x^2 - y^2) + 36x^2y^2} = \sqrt{9x^4 - 18x^2y^2 + 9y^4 + 36x^2y^2} =$$
$$= (3x^2 + 3y^2) = 3(x^2 + y^2)$$

Сжатие будет при $k = |w'(z)| < 1$, то есть $3(x^2 + y^2) < 1, x^2 + y^2 < \frac{1}{3}$ - круг с центром в точке $O(0,0)$, радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Растяжение будет при k>1, то есть растягиваться будет часть плоскости, лежащая вне окружности $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$.

Определение 10. Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области $D$, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (29)$$

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитическая в $D$, то ее вещественная часть $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ являются гармоническими в $D$.

Определение 11. Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана (26), называются *гармонически сопряженными.*

Таким образом, если $f(z) = u + iv$ - аналитическая функция, то $u(x,y)$, $v(x,y)$ – гармонически сопряженные функции.

Пользуясь условиями (26), аналитическую функцию $f(z)$ можно с точностью до константы восстановить по ее известной действительной или мнимой части.

**Пример 17.** Построить аналитическую функцию по заданной действительной части

$$u = \operatorname{Re} f(x) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0$$

**Решение.**

Найдем $f(x)$, используя условия (26) Коши-Римана

$$u'_x = 3x^2 + 12xy - 3y^2 = v'_y \Rightarrow$$

$v = \int\left(3x^2 + 12xy - 3y^2\right)dy = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + \varphi(x)$. Используя второе из условий (26) $u'_y = -v'_x$, получим:

$6x^2 - 6xy - 6y^2 = -\left(6xy + 6y^2 + \varphi'(x)\right)$. Отсюда $\varphi'(x) = -6x^2$ и $\varphi(x) = -2x^3 + C$.

Итак, $v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C$

Поэтому:

$$f(z) = u + iv = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i\left(3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C\right)$$

Так как $f(0)=0$ и $z=x+iy$, то $x=y=0$, следовательно $C=0$. Если расписать $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$, то $f(z)$ можно упростить:

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right) + 2\left(3x^2y - y^3\right) - 2i\left(x^3 - 3xy^2\right) =$$
$$= z^3 - 2iz^3 = z^3(1 - 2i).$$

**Пример 18.** Может ли функция $u(x,y)=\sin x\,\mathrm{ch}y$ быть действительной частью некоторой аналитической функции?

**Решение.**

Для того, чтобы $u(x,y)$ могла быть действительной частью аналитической функции, она должна быть гармонической, то есть удовлетворять условию (29). Проверим это условие. Вычисляем:

$u'_x = \cos x\,\mathrm{ch}y;\quad u''_{x^2} = -\sin x\,\mathrm{ch}y;$

$u'_y = \sin x\,\mathrm{sh}y;\quad u''_{y^2} = \sin x\,\mathrm{ch}y;$

Очевидно, что $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислить:

а) $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$; б) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}$;

2 в) $\dfrac{(3-4i)(i-2)}{(3-i)(1+i)}$; г) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; д) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; 1.5 стр 5 (1, 6, 13)

е) $(2-2i)^7$; ж) $(\sqrt{3}-3i)^6$; з) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$;

**2.** Найти действительную и мнимую часть:

а) $z=\cos(\pi+3i)$; б) $z=\sin 2i$; в) $z=tg(2-i)$; г) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$;

д) $z=\dfrac{(i^{17}+2)(3-2i)}{1+2i}$; е) $w=\bar{z}-iz^2$; ж) $w=\dfrac{1+iz}{1+\bar{z}}$;

5(1.4) **3.** Найти действительные решения уравнений:

а) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$;

б) $(x-iy)(a-ib)=i^5$, $a, b$ заданные действительные числа, $|a|\neq|b|$.

**4.** Доказать:

а) $2\operatorname{Re} z=z+\bar{z}$; б) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$; в) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

г) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; д) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$, ($x$ - действительное).

4 **5.** Представить в ~~комплексной~~ форме и изобразить на комплексной плоскости:

а) $z_1=-2+2\sqrt{3}i$; б) $z_2=27i$; в) $z_3=-1+i$; г) $z_4=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$;

6 **6.** Решить уравнение и изобразить решения:

а) $z^8+i=0$; б) $z^6-i+\sqrt{3}=0$; в) $z^5+i\sqrt{3}+3=0$; г) $z^7=1$;

д) $z^6-4z^3+8=0$.

3 **7.** Вычислить:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{60}$; б) $(-2+2i)^6$; в) $\dfrac{(1+i)^{11}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}$; г) $\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)^8$.

7 **8.** Изобразить множества точек, заданных условиями:

а) $2<|z-a|<7$; б) $\left|\dfrac{z-4}{z-1}\right|\geq 1$; в) $|z-2|-|z+2|>3$; г) $|z|<1-\operatorname{Re} z$;

д) $\left|z - z_1\right| = \left|z - z_2\right|$; е) $\left|z\right| - 3\operatorname{Im} z = 6$.

**9.** Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $z^2 + \bar{z}^{2} = 1$; б) $\left|z\right| - 3\operatorname{Im} z = 6$; в) $\operatorname{Re}\left(z^2 - \bar{z}\right) = 0$; г) $\operatorname{Re}(1+z) = \left|z\right|$;

д) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - z}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$;

**10.** Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $-2$; б) $2i$; в) $1+i$; г) $-1-i\sqrt{3}$; д) $\sin\alpha - i\cos\alpha, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$;

е) $5+3i$.

**11.** Дано отображение $w = z^2$. Найти образы: Вычислить

а) $x = c$; б) $y = c$; в) $x = y$; г) $\left|z\right| = R$; д) $\arg z = \alpha$.. $\sin i$, $ch(2-3i)$

**12.** Вычислить значения функций:

а) $(-3-4i)^i$; б) $(-1)^{\sqrt{2}}$; в) $(3-4i)^{1-i}$; г) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$ $i^i$

**13.** Вычислить значения функций:

а) $Ln(3-2i)$; б) $Ln(-1-i)$; в) $Lni$; г) $\ln(-2+3i)$, д) $\ln i$.

**14.** Дано отображение $w = \frac{1}{z}$. Найти образы линий:

а) $\left|z\right| = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{Re} z = 0$; в) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$; г) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; д) $\left|z\right| = z$.

**15.** Решить уравнения:

а) $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$; б) $\sin z = \pi i$; в) $chz = i$; г) $shz + chz = -2i$;

д) $\cos z - \sin z = 2$; е) $ctgz = -\frac{3}{5}i$.

**16.** Найти модуль и главное значение аргумента:

а) $z_i = e^{4-2i}$; б) $z_2 = e^{5+4i}$; в) $z_3 = -2e^{3i\varphi}$. клас 2) $z = e^{2+i}$

**17.** Доказать тождества д) $z = e^{5-12i}$

а) $chiz = \cos z$; б) $shiz = i\sin z$; в) $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

**18.** Найти коэффициент растяжения $k$ и угол поворота $\alpha$ при заданных отображениях $w = f(z)$ в заданных точках:

а) $w = e^z, z_1 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}, z_2 = -1 - i\frac{\pi}{2}$;

б) $w = \sin z, z_1 = 0, z_2 = 1 + i$;

в) $w = z^3, z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$;

**19.** Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается ,а какая сжимается при следующих отображениях:

а) $w = e^{2z}$; б) $w = \ln z$; в) $w = \dfrac{1}{z}$; г) $w = z^2$;

**20.** Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимо $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

а) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

б) $v = arctg\dfrac{y}{x}, (x > 0), f(1) = 0$;

в) $v = 2(chx\sin y - xy), f(0) = 0$;

г) $u = e^x(x\cos y - y\sin y), f(1) = 2$;

д) $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 6$;

**21.** Дана действительная функция двух аргументов $x$ и $y$. Может ли эта функция быть мнимой частью аналитической функции и если да, то найти эту аналитическую функцию:

а) $\varphi(x, y) = \cos xshy - shx\sin y$;

б) $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$;

в) $\varphi(x, y) = x^2 - 3y$;

а) $u = 2^x\cos(y\ln 2)$

д) $v = 2e^x \sin y$

е) $u = x^3 - 3xy^2$

22) Пров-ть на аналит-ть и если да то $f'(z) = ?$ а) $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

б) $f(z) = \cos\bar{z}$ г) $f(z) = e^{3z}$

д)

в) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$

# ГЛАВА V

# ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

## §1. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области $D$, а $C$ – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в $D$. Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y), v = v(x, y)$ - действительные функции переменных $x$ и $y$. Вычисление интеграла от функции $f(z)$ сводится к вычислению криволинейных интегралов 2-го рода от функций вещественных переменных:

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_C u(x, y)dy + v(x, y)dx \qquad (1)$$

Интеграл от функции комплексного переменного зависит, вообще говоря, от пути интегрирования $C$. Поэтому для его вычисления нужно найти параметрическое уравнение кривой С: $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$, где движение точки $t$ по отрезку $[t_1, t_2]$ порождает движение точки $(x(t), y(t))$ по кривой $C$ в заданном направлении. После этого криволинейный интеграл (1) сводится к определённому интегралу. Окончательно получим:

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t) + iy(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)dt \qquad (2)$$

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области $D$, то интеграл от неё не зависит от пути интегрирования и определяется только начальной и конечной точками $z_0, z_1 \in D$. Имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \qquad (3)$$

где $\Phi(z)$ - какая-либо первообразная для функции $f(z)$.

Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле от функции комплексного переменного производятся аналогично случаю функции действительного переменного.

**Пример 1.** Вычислить $\int\limits_{c} e^{\bar{z}}dz$, где С - отрезок прямой $y=-x$, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$.

**Решение.** Параметрические уравнения линии С есть $x = t, y = -t$ или в комплексной форме $z = t - it, 0 \le t \le \pi$.

Поэтому, применяя формулу (2), получим

$$\int\limits_{c} e^{\bar{z}}dz = \int\limits_{0}^{\pi} e^{t+it}(1-i)dt = (1-i)\int\limits_{0}^{\pi} e^{t(1+i)}dt = \frac{1-i}{1+i}e^{(1+i)t}\Big|_0^{\pi} = (e^{\pi}+1)i.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int\limits_{c}(z^2 + z\bar{z})dz$, где С - дуга окружности $|z| = 1, (0 \le \arg z \le \pi)$.

**Решение.** Параметрическое уравнение полуокружности: $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$ или $z = e^{it}$. Тогда $dz = ie^{it}dt$ и

$$\int\limits_{c}\left(z^2 + z\bar{z}\right)dz = \int\limits_{0}^{\pi} ie^{it}(e^{i2t}+1)dt = i\int\limits_{0}^{\pi}(e^{3it}+e^{it})dt = \left(\frac{1}{3}e^{3it}+e^{it}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}$$

**Пример 3.** Вычислить $\int (z-a)^m dz$, $m$-целое, С – окружность $|z-a| = R$.

**Решение.** Параметрическое уравнение окружности:

$z - a = \mathrm{Re}^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_{c}(z-a)^m dz = \int\limits_{0}^{2\pi} R^m e^{imt} Rie^{it}dt = iR^{m+1}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(m+1)t}dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{iR^{m+1}}{(m+1)i}e^{i(m+1)t}\Bigg|_0^{2\pi}, m \ne -1 \\ i\int\limits_{0}^{2\pi} dt, m = -1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{R^{m+1}}{m+1}\left(e^{i(m+1)2\pi} - 1\right) = 0, m \ne -1 \\ 2\pi i, m = -1 \end{cases}$$

Итак,

$$\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, m \neq -1 \\ 2\pi i, m = -1 \end{cases}$$

**Пример 4.** Вычислить $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz$

**Решение.** Так как подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду, то применяя формулу (3), найдём

$$\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz = \left(z^3 + z^2\right)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 =$$
$$= 7 + 19i$$

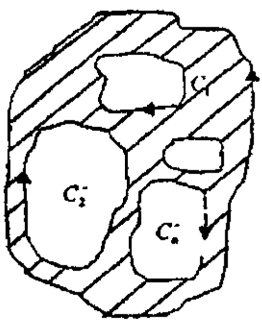
## §2. ТЕОРЕМА КОШИ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ.

Теорема Коши (для односвязной области).

*Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $D$ ограниченной кусочно-гладким контуром $C$, и непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$, то*

$$\int\limits_{c} f(z)dz = 0 \tag{4}$$

Теорема Коши (для многосвязной области).




*Пусть $D$ многосвязная область, ограниченная согласованно ориентированным сложным контуром $C = C_0^+ \cup C_1^- \cup \ldots \cup C_n^-$, где $C_0^+$ - внешняя граница, ориентированная положительно и $C_1^-, C_2^-, \ldots, C_n^-$ - внутренние границы, ориентированные отрицательно.*
*Тогда, если $f(z)$ - аналитична в $D$ и непрерывна в $\overline{D} = D \cup C$, то $\int\limits_{c} f(z)dz = 0$.*

Из этого равенства получаем

$$\int\limits_{c_0^+} f(z)dz = \int\limits_{c_1^-} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{c_n^+} f(z)dz \tag{5}$$

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D$ и $\overline{A_0 A}$ - простой незамкнутый контур, содержащийся в $D$, то $\int\limits_{A_0 \overline{A}} f(z)dz$ не зависит от пути интегрирования и его вычисление сводится к использованию формулы Ньютона-Лейбница (3).

Интегральная формула Коши.

Если $f(z)$ аналитическая в области $D$ и непрерывна в $\overline{D}^+ = D^+ \cup C$, то имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), z \in D^+ \\ 0, z \in D^- \end{cases} \qquad (6)$$

Обобщенная интегральная формула Коши.

Если $f(z)$ - аналитична в области $D^+$, то для $z \in D^+$ производные $f^{(m)}(z)$ находятся дифференцированием под знаком интеграла:

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{c'} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{m+1}}, z \in D^+ \qquad (7)$$

**Пример 7.** Вычислить интеграл

$\int\limits_c \frac{e^{z^2}dz}{z^2 - 6z}$, если а) $C: |z-2| = 1$, б) $C: |z-2| = 3$, в) $C: |z-2| = 5$.

**Решение.**

а) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-2| = 1$, подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}dz}{z^2 - 6z} = 0$.

б) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2| = 3$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль.

Перепишем интеграл в виде:

$$\int\limits_c \frac{e^{z^2}dz}{z^2 - 6z} = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz$$

Функция $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области.

Применяя интегральную формулу Коши (6) ($z = 0$), получим

$$\int\limits_{|z-2|=3}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z-6}\bigg|_{z=0}=2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3}$$

в) В области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, имеем две точки $z=0, z=6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Непосредственно формулу (6) применять нельзя. Можно поступить так.

Разложим дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}$ на простейшие. Имеем:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$\int\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z-6}-\frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z}=\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=6}-$$

$$-\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{3}e^{36}-\frac{\pi i}{3}\cdot 1=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

**Пример 8.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

**Решение.** Подынтегральная функция $\dfrac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}$ является аналитической в области $|z-1|\le 1$ всюду, кроме точки $z_0=1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в круге $|z-1|\le 1$. Для этого перепишем подынтегральную функцию в виде $\dfrac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}=\dfrac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$ и в качестве

$f(z)$ возьмем $\dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$. Полагая в формуле (7) $n=1$ получим

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i f'(1)$$. Находим производную

$$f'(z)=\left[\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right]' = \frac{\pi \cos \pi z (z+1)^2 - \sin \pi z \cdot 2(z+1)}{(z+1)^4} =$$

$$= \frac{\pi \cos \pi z (z+1) - 2\sin \pi z}{(z+1)^3}$$

Отсюда $f'(1)=\dfrac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\dfrac{\pi}{4}$, следовательно,

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz = -\frac{\pi^2}{2}i$$

## § 3. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Аналитическую функцию $f(z)$ в окрестности каждой внутренней точки области аналитичности можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)^2+a_2(z-z_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, |z-z_0|<R \tag{8}$$

радиус сходимости которого $R$ равен кратчайшему расстоянию от точки $z_0$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$. Представление $f(z)$ в виде степенного ряда (8) в окрестности $z_0$ - единственно и для коэффициентов Тейлора $a_n$ справедливы формулы:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n=0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

где К - произвольный контур, целиком лежащий в круге сходимости $|z-z_0|<R$.

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ (не исключаются случаи, когда $r=0, R=+\infty$), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{10}$$

где коэффициенты Лорана $a_n$ находятся по формулам

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}, n=0,\pm1,\pm2,..., \tag{11}$$

где К - произвольный контур, целиком лежащий в кольце $r<|z-z_0|<R$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, члены которого ограничены в окрестности $z_0$, будем называть правильной частью ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$, члены которого не ограничены в окрестности $z_0$, будем называть главной частью ряда Лорана.

Если $z_0=\infty$, то разложение ряда Лорана в проколотой окрестности записывается так:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n, r<|z|<\infty \tag{12}$$

Здесь главной и правильной частью разложения будут, соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}$$

На практике при нахождении коэффициентов $a_n$ стараются избегать формул (9) и (11), так как они приводят к громоздким выкладкам. Обычно стремятся представить $f(z)$ в виде суммы функций, для которых разложения известны.

Например, для любых $z$ имеем:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{13}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (14)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (15)$$

Для $|z| < 1$ имеем:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} \quad (16)$$

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}z^n + \ldots \quad (17)$$

В частности из (17) имеем

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1 \quad (18)$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n-0}^{\infty}(-1)^n z^n, |z| < 1 \quad (19)$$

**Пример 9.** Разложить в ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и найти радиус сходимости

а) $\cos^2 z$; б) $\sqrt{z+i}$, $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{z}{z^2 - 3z + 2}$; г) $\frac{1}{(z-3)^2}$.

**Решение.**

а) $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos 2z}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$

Радиус $R = \infty$, так как формула (15) справедлива для любого $z$.

б) $\sqrt{z+i} = \sqrt{i}\left(1+\dfrac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{i}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{z}{i}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(\frac{z}{i}\right)^3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{-2n+3}{2}\right)}{n!}\left(\frac{z}{i}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{i}{2}z+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!}{n!2^n}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right).$$

Формула справедлива при условии $\left|\frac{z}{i}\right|=|z|<1$, следовательно, $R=1$.

в) $$\frac{z}{z^2-3z+2}=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{2}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=,$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)z^n$$

в силу формулы (18). Радиус сходимости $R=1$ - расстояние от точки $z=0$ до ближайшей особой точки $z=1$.

г) $$\frac{1}{(z-3)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},\left|\frac{z}{3}\right|<1$$

Продифференцируем обе части этого равенства

$$-\frac{1}{(z-3)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}};\ \frac{1}{(z-3)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}z^{n-1},\ |z|<3$$

Полученный ряд и есть ряд Тейлора функции $\frac{1}{(z-3)^2}$ в круге $|z|<3$, то есть $R=3$.

**Пример 10.** Разложить в ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$ и найти радиус сходимости

а) $\ln z$ ; б) $\dfrac{z}{z+2}$ ; в) $z^2 \sin\dfrac{1}{z-1}$

**Решение.**

а) $\ln z = \ln(1+(z-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(z-1)^n}{n}$, $R = 1$;

мы использовали формулу (16).

б)

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z+2-2}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{3+(z-1)} = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{3}\right)^n = = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^n} =$$

$$= \frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z-1)^n$$

в силу (19), при этом $\left|\dfrac{z-1}{3}\right| < 1$ или $|z-1| < 3$ то есть $R = 3$.

в) Сделаем замену $z - 1 = y \Rightarrow z = 1 + y, z^2 = (1+y)^2 = y^2 + 2y + 1$ или $z^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$;

$$\sin\frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!(z-1)^{2n-1}}.$$

Итак,

$$z^2 \sin\frac{1}{z-1} = \left[(z-1)^2 + 2(z-1) + 1\right]\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^{2n-1}(2n-1)!}, R = \infty .$$

**Пример 11.** Разложить в ряд Лорана функцию $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ в окрестности точек а) $z = 2$ ; б) $z = 3$ ; в) $z = \infty$ ; г) в кольце $2 < |z| < 3$

**Решение.**

Разложим данную дробь на простейшие

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}$$

а) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{1-(z-2)}\underset{(18)}{=}\dfrac{1}{z-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^n, 0<|z-2|<1$

б)

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{1+(z-3)}\underset{(19)}{=}\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^n, 0<|z-3|<1$$

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+$$

в)

$$+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}(3^n+2^n)$$

Дробь $\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}$ можно разложить по степеням $\dfrac{1}{z}$ при $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, то есть

при $|z|>2$; дробь $\dfrac{1}{1-\frac{3}{z}}$ можно разложить в ряд по степеням $\dfrac{1}{z}$ при

$\left|\dfrac{3}{z}\right|<1$, то есть при $|z|>3$.

Следовательно, разложение справедливо при $|z|>3$.

г) Функция $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ аналитична в кольце $2<|z|<3$. Дробь $\dfrac{1}{z-2}$ аналитична вне круга $|z|>2$, поэтому разлагается по отрицательным степеням $z$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

Дробь $\frac{1}{z-3}$ аналитична в круге $|z|<3$ и поэтому разлагается в ряд по положительным степеням $z$:

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Окончательно имеем $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, 2<|z|<3$.

## § 4. НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТЫ.

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в точке $z_0$. Точка $z_0$ называется нулём функции $f(z)$ порядка (кратности) *k*, если выполняются условия

$$f(z_0)=0, f'(z_0)0,\dots,f^{(k-1)}(z_0)=0, f^{(k)}(z_0)\neq 0 \qquad (20)$$

Если *k*=1, то точка $z_0$ называется простым полюсом.

Точка $z_0$ тогда и только тогда является нулём *k*-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке $z_0$, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z)=(z-z_0)^k\cdot\varphi(z) \qquad (21)$$

где $\varphi(z)$ - аналитична в точке $z_0$ и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Определение 2. Точка $z=z_0(z=\infty)$ называется изолированной особой точкой для функции $f(z)$, если в проколотой окрестности этой точки $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, 0<|z-z_0|<r$$

$$\left( f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, r < |z| < \infty \right)$$

Определение 3. Изолированную особую точку, конечную или бесконечно удалённую, называют:

а) *устранимой*, если в разложении Лорана главная часть отсутствует;

б) *полюсом*, если главная часть содержит конечное число слагаемых;

в) *существенно особой*, если главная часть содержит бесконечно много слагаемых.

Порядком полюса называется число $m$, когда $m$ есть низшая отрицательная степень разности $(z - z_0)$ в главной части разложения функции в ряд Лорана.

Признак типа особой точки. Изолированная особая точка $z_0$ ($z_0$- конечно или бесконечно) будет для функции $f(z)$:

а) *устранимой*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен;

б) *полюсом*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и бесконечен, при этом порядок полюса $z_0$ равен $m$, если $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$;

в) *существенно особой*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Кроме того, для того, чтобы $z = z_0$ была полюсом порядка $m$ функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулём кратности $m$ для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Определение 4. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0$ называется комплексное число

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^+} f(z)dz, |z_0| < \infty, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C^-} f(z)dz, z_0 = \infty \end{cases} \quad (22)$$

где $z_0$-единственная изолированная особая точка в области $D^-$ с границей C, если $|z_0| < \infty$ и в области $D^-$ с границей $C$, если $z_0 = \infty$.

Из формул (11) при $n=-1$ получаем

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \begin{cases} a_{-1}, \text{если } |z_0| < \infty \\ -a_{-1}, \text{если } z_0 = \infty \end{cases} \tag{23}$$

где $a_{-1}$ - коэффициент в разложении Лорана при $\frac{1}{z-z_0}$, если $|z_0| < \infty$, и при $\frac{1}{z}$, если $z_0 = \infty$.

Если $z_0$ - устранимая особая точка, причём $|z_0| < \infty$, то вычет в ней всегда равен нулю, если же $z_0 = \infty$, то вычет в ней, вообще говоря, не равен нулю, и его можно найти по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) \tag{24}$$

Если $z_0$ - полюс порядка $m$ и $|z_0| < \infty$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)} \tag{25}$$

В частности, если $z_0$ - простой полюс, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \tag{26}$$

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические в окрестности $z_0$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то есть $z = z_0$ - полюс первого порядка для дроби $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \tag{27}$$

Теорема (о полной сумме вычетов).

*Если $f(z)$ аналитична в комплексной плоскости $z$, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и точки $z = \infty$, то полная сумма вычетов равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0 \tag{28}$$

**Пример 12.** Найти нули функции $f(z)$ и определить их порядок

а) $f(z)=1+\cos z$ ; б) $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$ ; в) $f(z)=(z^2+1)^3\cdot shz$

**Решение.** а) Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z=-1$, откуда $z_n=(2n+1)\pi$, $n=0,\pm1,\ldots$ - нули данной функции. Далее

$$f'((2n+1)\pi)=-\sin(2n+1)\pi=0$$

$$f''((2n+1)\pi)=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n=(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\ldots$ являются нулями второго порядка данной функции.

б) Приравнивая $f(z)$ к нулю, имеем $z=0$. Определим порядок нуля $z=0$. Используя разложение $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$, получим

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=\frac{z^8}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\frac{z^5}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots}=z^5\varphi(z), где\, \varphi(z)=\frac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\ldots}$$

Очевидно, что $\varphi(z)$ аналитическая в точке $z=0$ и $\varphi(0)=6\neq 0$. Следовательно, согласно (21), $z=0$ является для данной функции нулём пятого порядка.

в) Полагая $f(z)=0$, получим $(z^2+1)^3 shz=0$, откуда $z^2+1=0$ или $shz=0$. Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z)$:

$$z=-i, z=i, z=k\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Пусть $z=-i$, тогда $f(z)$ можно представить в виде

$f(z)=(z+i)^3\varphi(z)$, где $\varphi(z)=(z-i)^3 sh(z)$ является аналитической в точке $z=-i$, причем $\varphi(-i)=8i\cdot shi=-8sh1\neq 0$. Это означает, в силу (21), что точка $z=-i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z=i$ является нулем третьего порядка.

Исследуем нули $z=k\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Производная

$f'(z) = 6z(z^2+1)^2 shz + (z^2+1)^3 chz \neq 0$ при $z = k\pi i$

Следовательно, в точках $z = k\pi i$ - нули первого порядка.

**Пример 13.** Найти все изолированные особые точки функции и определить их характер (в случае полюса определить порядок).

а) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$; б) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$; в) $f(z) = ctgz - \dfrac{1}{z}$;

г) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$.

**Решение.**

а) Используя разложение $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^3}{3!} + \ldots$ и полагая $u = \dfrac{1}{z-1}$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z) = (z-1)\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + (z-1) + \frac{1}{2!(z-1)} + \frac{1}{3!(z-1)^2} + \ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-1)$. Следовательно, $z = 1$ - существенно особая точка функции $f(z)$.

б) Функция $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, как отношение аналитических, будет аналитической во всей плоскости $z$ за исключением $z = 0$ и $z = \infty$. Ряд Лорана для $f(z)$:

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \ldots$$

в силу единственности разложения, является рядом Лорана для функции как в проколотой окрестности точки $z = 0$, так и в проколотой окрестности точки $z = \infty$. Так как в полученном разложении есть слагаемые с отрицательной степенью $z^{-2}$, то $z = 0$ - полюс второго порядка. Точка $z=\infty$ является существенно особой, т.к. главная часть ряда Лорана в ее окрестности содержит бесконечное число слагаемых.

в) Особые точки $f(z)=ctgz-\frac{1}{z}=\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}$ это корни знаменателя, т.е. $z=0$, $\sin z=0$ и точка $z=\infty$. Решая уравнение $\sin z=0$, получим $z=\pi k$, $k=0,\pm1,\ldots$ Итак, особые точки $z_0=0$, $z_k=\pi k$, $k=0,\pm1,\ldots$ Точка $z=\infty$ не является изолированной особой точкой для $f(z)$, так как она является предельной точкой для последовательности $z_k=\pi k$. Исследуем характер изолированных особых точек. Для этого рассмотрим $\lim\limits_{z\to z_k} f(z), k=0,\pm1,\ldots$

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\lim_{z\to0}\frac{(z\cos z-\sin z)'}{(z\sin z)'}\lim_{z\to0}\frac{\cos z-z\sin z-\cos z}{\sin z+z\cos z}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-z\sin z}{\sin z+z\cos z}=\lim_{z\to0}\frac{-\sin z-z\cos z}{\cos z+\cos z-z\sin z}=0$$

следовательно $z=0$ - устранимая.

$$\lim_{z\to\pi k}f(z)=\lim_{z\to\pi k}\left(ctgz-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to\pi k}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\pi k(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{1}{z\sin z}=\infty$$

Значит $z=\pi k, k=\pm1,\pm2,\ldots$ - полюсы. Определим порядок полюсов $z_k=\pi k, k=\pm1,\pm2,\ldots$ Воспользуемся (25)

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)^m(z\cos z-\sin z)}{z\sin z}=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)^m}{\sin z}$$

$$=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{\left[(z-\pi k)^m\right]'}{(\sin z)'}=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{m(z-\pi k)^{m-1}}{\cos z}=$$

$$=\lim_{z\to\pi k}m(z-\pi k)^{m-1}\neq0 \text{ при } m=1$$

Значит, $z_k=\pi k$ - простые полюса.

г) Изолированные особые точки $f(z)=\frac{1}{z(z^2+4)^2}$ это нули знаменателя, то есть $z=0, z=-2i, z=2i$, кроме того $z=\infty$.

Определим характер этих особых точек. Рассмотрим:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\infty \Rightarrow z=0 \text{ - полюс;}$$

$$\lim_{z\to \pm 2i} f(z)=\lim_{z\to \pm 2i}\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\infty \Rightarrow z=\pm 2i \text{ - полюсы;}$$

$$\lim_{z\to \infty} f(z)=\lim_{z\to \infty}\frac{1}{z(z^2+4)^2}=0 \Rightarrow z=\infty \text{ - устранимая особая точка.}$$

Найдем порядок полюсов:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)^m\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{z^{m-1}}{(z^2+4)^2}=\frac{1}{16}\lim_{z\to 0}z^{m-1}\neq 0$$

при $m=1 \Rightarrow z=0$ - простой полюс.

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)^m\frac{1}{z(z-2i)^2(z+2i)^2}=\frac{1}{2i(4i)^4}\lim_{z\to 2i}(z-2i)^{m-2}\neq 0$$

при $m=2 \Rightarrow z=2i$ - полюс второго порядка.

Аналогично можно доказать, что $z=-2i$ - полюс второго порядка.

**Пример 14.** Определить тип изолированных особых точек и найти в них вычеты для функций.

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2i)(z-i)^2}$; б) $f(z)=tgz$; в) $f(z)=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;

г) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ .

**Решение.**

а) изолированными особыми точками $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2i)(z-1)^2}$ являются $z_1=-2i, z_2=1$ и $z_3=\infty$. Для определения характера этих точек перейдем к $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z+2i)(z-1)^2}{e^z}$. Для $\dfrac{1}{f(z)}$ точки $z_1$ и $z_2$ нулями кратности соответственно 1 и 2. Поэтому для $f(z)$ $z_1=-2i$ является полюсом первого порядка, а $z_2=1$ - полюсом второго порядка. Вычеты в них найдём по формулам (25), (26):

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}\left[\frac{(z+2i)e^{z}}{(z+2i)(z-1)^2}\right]=\frac{e^{-2i}}{(-2i-1)^2}=-\frac{3+4i}{25}e^{-2i};$$

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{(z-1)^2e^{z}}{(z+2i)(z-1)^2}\right]'=\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^{z}}{z+2i}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{e^{z}(z+2i)-e^{z}}{(z+2i)^2}=$$

$$=e\lim_{z\to 1}\frac{z+2i-1}{(z+2i)^2}=e\frac{2i}{(1+2i)^2}=\frac{8-6i}{25}e$$

Точка $z_3=\infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, т.к. не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Найдём вычет в этой точке, воспользовавшись теоремой о полной сумме вычетов (28).

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=\infty} f(z)=-\mathop{\mathrm{Res}}_{z=-2i} f(z)-\mathop{\mathrm{Res}}_{z=0} f(z)=\frac{3+4i}{25}e^{-2i}-\frac{8-6i}{25}e=$$

$$=\frac{1}{25}\left[(3+4i)e^{-2i}-(8-6i)e\right]$$

б) Изолированные особые точки $f(z)=tgz$ это нули знаменателя: $\cos z=0$, $z_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Точка $z=\infty$ - предельная точка для $z_n$, т.е. не является изолированной. Это полюсы, так как:

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi n} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi n}\frac{\sin z}{\cos z}=\infty.$$

Точки $z_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ являются полюсами первого порядка, так как для $\dfrac{1}{f(z)}=ctgz$ точки $z_n$ являются нулями первого порядка:

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 z};\ \left[\frac{1}{f(z)}\right]'\Bigg|_{z=\frac{\pi}{2}+\pi n}=-1\neq 0.$$

Найдём вычет в точках $z_n$ по формуле (27):

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+\pi n} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_n} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} = \frac{\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{\psi'\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}.$$

У нас $\varphi(z) = \sin z \Rightarrow \varphi(z_n) = (-1)^n$;

$$\psi(z) = \cos z \Rightarrow \psi'(z_n) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right) = (-1)^{n+1}.$$

Значит, $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+\pi n} tgz = -1$.

в) Отметим, что функция $f(z) = \sin z \sin\frac{1}{z}$ - является чётной, поэтому в её разложении в ряд Лорана не будет нечётных степеней. Изолированными особыми точками для $f(z)$ будут $z=0$ и $z=\infty$. Это существенно особые точки, действительно, $f(z)$ не имеет предела ни при $z\to 0$, ни при $z\to\infty$. Так как вычет в силу формулы (23) в точке $z_0$, равен $\pm a_{-1}$, то есть коэффициенту при $\frac{1}{z}$, то в силу четности $f(z)$ будем иметь:

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

г) Функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z=0$ имеет особенность. Это существенно особая точка, так как

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$$

Этот же ряд есть ряд Лорана и в окрестности точки $z=\infty$, поэтому $z=\infty$ - устранимая особая точка. Тогда:

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = 1; \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1} = -1$.

## § 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k$, $k=1,2,\dots,n$, лежащих внутри области $D$. Тогда*

$$\int\limits_{C^+} f(t)dt = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{29}$$

где $C^+$ - граница области $D$.

**Пример 15.** Вычислить интеграл:

$$\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}dz.$$

**Решение.** Внутри контура подынтегральная функция имеет две особые точки: $z=1$ - простой полюс, $z=0$ - двойной полюс. Следовательно, по формуле (29) имеем:

$$\int\limits_{|z-1|=2}\frac{(z^2+1)dz}{(z-1)(z+2)z^2} = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2} + \lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}\right]'\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to 1}\frac{z^2+1}{(z+2)z^2} + \lim_{z\to 0}\frac{2z(z-1)(z+2)-(z^2+1)(2z+1)}{(z-1)^2(z+2)^2}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{2}{3} + \frac{(-1)\cdot 1}{4}\right] = \frac{5\pi i}{6}$$

**Пример 16.** Вычислить:

$$\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{2}{z}}dz.$$

**Решение.** Единственной особой точкой внутри окружности $|z|=1$ для функции $z^2e^{\frac{2}{z}}$ является точка $z=0$. Это существенно особая точка.

так разложение функции в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $z$:

$$z^2 e^{\frac{2}{z}} = z^2\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{2}{z}\right)^3+\ldots\right) = z^2+2z+2+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots$$

Тогда имеем:

$$\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} 2\pi i = 2\pi i \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi i}{3}.$$

**Пример 17.** Вычислить:

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}} dz}{z^2+1}$$

**Решение.**

В области $|z-i| < \frac{3}{2}$ функция $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z = i$ - полюс первого прядка и $z = 0$ - существенно особая точка. По формуле (27) имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{\left(z^2+1\right)'}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Для нахождения вычета в точке $z = 0$ необходимо иметь Лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Однако $f(z)$ - четная, поэтому можно заранее сказать, что в её Лорановском разложении будут содержаться только четные степени $z$ и $\frac{1}{z}$. Так что $a_{-1} = 0$, следовательно $\operatorname{Res} f(z) = 0$. Поэтому по (29)

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi \tag{30}$$

где $R$ - рациональная функция своих аргументов. Заменой $z = e^{i\varphi}$ интегралы (30) могут быть сведены к интегралам по единичной окружности от функций комплексного переменного. Действительно, по формулам Эйлера имеем:

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right); \qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi\,,\ d\varphi = -i\frac{dz}{z}.$$

При изменении $\varphi$ от 0 до $2\pi$ переменная $z$ пробегает в положительном направлении окружность $|z| = 1$. Тогда $I$ примет вид:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = -i\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z} \tag{31}$$

К последнему интегралу в (31) можно применить основную теорему теории вычетов (29).

**Пример 18.** Вычислить

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} \quad (a > b > 0)$$

**Решение.** Применяя подстановку $z = e^{i\varphi}$, получим:

$$I = -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(a + b\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^2} = -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(a + \dfrac{b(z^2+1)}{2z}\right)^2} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(bz^2 + 2az + b)^2}$$

Внутри единичного круга при условии $a > b > 0$ находится только один полюс (второго порядка) $z_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. Вычет подынтегральной функции относительно этого полюса равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=\lim_{z\to z_1}\left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]'=\lim_{z\to z_1}\left[\frac{z}{b^2(z-z_2)^2}\right]'=$$

$$=\frac{1}{b^2}\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)^2-z\cdot 2(z-z_2)}{(z-z_2)^4}=\frac{1}{b^2}\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_2-2z}{(z-z_2)^3}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\lim_{z\to z_1}\frac{z+z_2}{(z-z_2)^3}=\frac{ab}{4}\left(a^2-b^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Следовательно

$$I=\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\frac{ab}{4}(a^2-b^2)^{-\frac{3}{4}}=\frac{2\pi ab}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**Пример 19.** Вычислить

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{1-\frac{3}{4}\sin^2\varphi}.$$

**Решение.** Воспользовавшись формулами понижения степени тригонометрических функций

$$\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2},\quad \sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

получим:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{1-\frac{3}{8}(1-\cos 2\varphi)}d\varphi=4\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{5+3\cos 2\varphi}d\varphi=2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\theta}{5+3\cos\theta}d\theta=$$

$$=\left|\begin{array}{l} e^{i\theta}=z \\ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ d\theta=-i\frac{dz}{z} \\ [0,2\pi]\to|z|=1\end{array}\right|=-2i\int_{|z|=1}\frac{1+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}{5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{z}=-2i\int_{|z|=1}\frac{z^2+2z+1}{3z^2+10z+3}\cdot\frac{dz}{z}$$

Особыми точками подынтегральной функции будут нули знаменателя: $3z^2+10z+3=0$; $z_1=-\frac{1}{3}$; $z_2=-3$; $z_3=0$.

Внутрь единичной окружности попадают $z_1$ и $z_3$. Поэтому по основной теореме теории вычетов имеем:

$$I=-2i2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{3}} f(z)\right)=4\pi\left(\lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^2 z}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)z}+\right.$$

$$\left.+\lim_{z\to -\frac{1}{3}}\frac{(z+1)^2\left(z+\frac{1}{3}\right)}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)}\right)=4\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

**1.** Вычислить $\int\limits_c |z|dz$ по контурам:

√ а) С – радиус-вектор точки $z=2-i$;

б) С – полуокружность $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{\pi}{2}$, начало пути в точке $z=-i$; в) С – окружность $|z|=R$;

**2.** Вычислить $\int\limits_c |z|\bar{z}dz$, где С – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z|=1$ и отрезка $-1\le x\le 1$, $y=0$.

**3.** Вычислить $\int\limits_{AB} z^2dz$, AB – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_A=1, z_B=i$.

**4.** Вычислить $\int\limits_c (1+i-2\bar{z})dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0, z_2 = 1+i$.

а) по прямой; б) по параболе $y = x^2$; в) по ломаной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3 = 1$.

К

**5.** Вычислить: а) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz$; б) $\int\limits_0^{1+i} z^3 dz$; в) $\int\limits_1^{i} (3z^4 - 2z^3)dz$.

К

**6.** Вычислить следующие интегралы:

К а) $\int\limits_c z \operatorname{Im} z^2 dz, C: |z| = 1, (-\pi \le \arg z \le 0)$;

К б) $\int\limits_c e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, С – прямая, соединяющая $z_1 = 0, z_2 = 1+i$.

в) $\int\limits_c z \operatorname{Re} z dz, C: |z| = 1$, обход против часовой стрелки.

К **7.** Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \sin z \frac{dz}{z+i}$, где а) $C: |z-1| = 1$; б) $C: |z+i| = 2$

**8.** Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{dz}{z^2+1}$, где а) $C: |z| = 2$; б) $C: |z+i| = 1$;

в) $C: |z+2| = 1$

**9.** Вычислить $\int\limits_{|z|=2} \frac{ch z dz}{(z+1)^3(z-1)}$

**10.** Вычислить $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^3}$

**11.** Вычислить $\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z+4)(z-2)^3}$

**12.** Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{e^t dt}{t(t-1)^3}$

а) $z = 0$ лежит внутри, а $z = 1$ - вне контура С;

б) точка $z = 1$ лежит внутри, а $z = 0$ - вне контура С;

13. Зависит ли интеграл $\int\limits_0^z \frac{dt}{t^2-1}$ от пути интегрирования

а) в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

в) в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

14. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ и найти радиус сходимости:

а) $\ln(z^2 - 3z + 2)$

б) $chz$

в) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$

г) $\dfrac{z-1}{z^2-4z+5}$

15. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0$

а) $\sin(2z - z^2), z_0 = 1;$

б) $e^{3z-2}, z_0 = 1;$

в) $\dfrac{z}{(1-z^2)^2}, z_0 = 0;$

г) $z\ln z, z_0 = 1$

д) $\dfrac{z}{(z-1)(z-1)}, z_0 = -1$

Разложить в ряд Лорана функцию в окрестности указанных точек, либо в указанном кольце:

16. $\dfrac{z}{z^2-3z+2}$

а) $z_1 = 1$; б) $z_2 = 2$; в) $z_3 = \infty$; г) в кольце $1 < |z| < 2$

17. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$

а) $z_1 = 2$; б) в кольце $1 < |z| < 2$;

18. $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z-2}$ в кольцах.

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $2<|z|<\infty$;

**19.** $\dfrac{z}{(z+3)(z+2)^2}$ а) $z_0=0$; б) $z_0=-2$;

D **20.** $z^2e^{\frac{1}{z}}$ а) $z_0=0$; б) $z_0=\infty$;

D **21.** $\left(z^2+1\right)e^{\frac{1}{z+2}}, z_0=-2$;

**22.** $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}, z_0=1$;

**23.** $\dfrac{1}{(z^2-4z+4)(z^2-4z+5)}, z_0=2$;

**24.** У следующих функций найти нули и определить их порядки:

а) $f(z)=1+chz$; б) $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$;

в) $f(z)=\cos z+chiz$; г) $f(z)=z^2\sin z$;

д) $f(z)=\dfrac{sh^2z}{z}$; е) $f(z)=\cos z^3$.

**25.** Найти порядок нуля $z_0=0$ для следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$; б) $f(z)=\dfrac{(1-\cos 2z)^2}{z-shz}$; в) $f(z)=\left(e^{z^2}-1\right)z^2$;

г) $f(z)=\left(e^z-e^{z^2}\right)\ln(1-z)$; д) $f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$;

е) $f(z)=2(chz-1)-z^2$.

**26.** Найти изолированные особые точки, определить их тип и найти вычеты:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$; D б) $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2-1)}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

D г) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; д) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$; е) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$;

D ж) $f(z)=z^4\sin\dfrac{1}{z}$.

**27.** Используя основную теорему теории вычетов, вычислить следующие интегралы а) $\int\limits_{c} \frac{4z-3}{(z-2)^2(z+3i)}dz$, где $C: |z-1+2i| = 3$;

б) $\int\limits_{c} \frac{\sin z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}dz$, где $C: |z| = 2$;

в) $\int\limits_{c} \frac{1+z^3}{(z-2)^2(z-i)}dz$, где $C: |z-1| = 3$;

г) $\int\limits_{c} \frac{z^2}{(z+i)^2(z-2)}dz$, где $C: |z-1| = 3$;

д) $\int\limits_{c} \frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}dz$, где $C: |z-2| = 3$;

е) $\int\limits_{c} \frac{z^2+z+1}{(z+2)^2(z+i)}dz$, где $C: |z+1| = 3$;

ж) $\int\limits_{c} \frac{2-e^z}{z^2(z+\pi i)}dz$, где $C: |z+2i| = 3$;

з) $\int\limits_{c} \frac{e^{-3z}}{z^2(z-4i)}dz$, где $C: |z-2i| = 3$;

## ЛИТЕРАТУРА


1. Абанина Т.И., Батурина Н.Ю. Математический анализ. Кратные и криволинейные интегралы. Теория поля. Операционное исчисление. Учеб. пособие. – РВВКИУРВ, 1996.
2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Армянович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Москва, «Наука», 1970.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. П: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1999.
4. Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционные исчисления. Теория устойчивости (задачи и упражнения). «Наука», 1971.
5. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие/ Под редакцией В.Ф. Бутузова. М.: Физико-математическая литература, 2000.
6. Николенко В. Н. Теория аналитических функций. РГУ, 1988.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: 1970,1985, т. 1,2.
8. Привалов Н. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - М.: Высшая школа, 1999.
9. Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: 1986,1987, ч.I-IV.
10. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа. 1998.

# ОТВЕТЫ

## ГЛАВА I

**3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 2. **5.** $-\frac{11}{30}$. **6.** 2. **7.** $4\pi$. **8.** $\frac{\pi}{12}$. **9.** $\frac{1331}{48}ед^2$ **10.** $(\frac{23}{5}+4\ln 2)ед^2$ **11.** $\frac{1}{2}R^2(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})ед^2$. **12.** $1\,ед^2$. **13.** $4{,}5\,ед^2$. **14.** $(2\pi+3\sqrt{3})ед^2$. **15.** $-\frac{14}{3}$. **16.** 0. **17.** $\frac{3\pi^2}{3}$. **18.** $\frac{\pi}{6}$. **19.** $45\,ед^3$. **20.** $\frac{88}{105}ед^3$. **21.** $\frac{2\pi R^3}{3}ед^3$. **22.** $10\,ед^3$. **23.** $14\,ед^2$. **24.** $\sqrt{2}\pi\,ед^2$ **25.** $4\pi a^2\,ед^2$.

## ГЛАВА II

**1.** $\frac{256}{15}a^3$. **2.** $\sqrt{5}\ln 2$. **3.** 24. **4.** $\frac{P^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **5.** $2\pi a^{2n+1}$. **6.** $\frac{a^2}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. **7.** $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)$. **8.** $\frac{4ab^2}{3}$ **9.** $\frac{4}{3}$. **10.** 0. **11.** $2\frac{2}{5}$. **12.** –4. **13.** $-2\sin 2$. **14.** 0. **15.** $\frac{3R^3\sqrt{R}\pi}{16}$. **16.** $-2\pi ab$. **17.** 0. **18.** 0. **19.** $-\frac{\pi a^3}{8}$. **20.** –4. **21.** $\frac{2a^3}{5}$. **22.** $\frac{4}{3}$. **23.** $\frac{3a^2\pi}{8}$. **24.** $6\pi a^2$. **25.** $\frac{19}{3}$. **26.** $x_0=y_0=\frac{2a}{\pi}$. **27.** $I_y=\frac{\sqrt{5}}{6}; I_z=\frac{\sqrt{5}}{24}$. **28.** а) $\frac{17}{12}$, б) $\frac{3}{2}$, в) 1.

## ГЛАВА III

**1.** а) $4\sqrt{61}$; б) $54\sqrt{14}$; в) $\pi$; г) $128\pi/15$; д) $\frac{4\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$; е) $\frac{\pi^2}{2}$. **2.**

а) 0; б) $\frac{2\pi}{105}$; в) 0. **3.** а) 4π; б) 0; в) 0; г) 1/8; д) 3; е) π/5. **4.** а) $-4\pi\sqrt{3}$; б) $-4\pi$; в) $-\frac{9}{2}$; г) –4. **5.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **6.** $\pi a^2$. **7.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **8.** $x_0=1, y_0=0$, $z_0=\frac{32}{9\pi}$. **9.** π/2. **10.** $\frac{112}{3}\pi$. **11.** а) 0; б) 7/5; в) 5. **12.** а) grad $u(M)=$ $=36\mathbf{i}+12\mathbf{j}+4\mathbf{k}$; б) grad $u(M)=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}$; в) grad $u(M)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. **13.** а) В точках конуса $z^2=xy$; б) в точках прямой $x=y=z$; в) в точке $x=y=z=0$. **14.** а) Во всех точках; б) в точках прямой $x=y$. **15.** φ=arccos (-8/9). **17.** а) 0; б) $2(x^2+y^2+z^2)$; в) 0. **18.** а) 3; б) 2/r; в) $7r^4$. **19.** а) Соленоидально; б) соленоидально; в) соленоидально. **22.** а) **0**; б) $2xyz(3z-2)\mathbf{i}+2yz^2(1-z)\mathbf{k}$; в) **0**; г) $-(1/x^2)\mathbf{j}-(2/x^3)\mathbf{k}$. **23.** а) **0**; б) **0**; в) **0**. **26.** $6x\mathbf{i}+6y\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$. **27.** **0**. **32.** а) 5π/3; б) π/3; в) –π. **33.** а) 0; б) 0. **34.** а) 1/2; б) 6π; в) 0. **35.** а) 1/6; б) 4π/3. **36.** 0. **37.** 0. **38.** а) 2π; б) $\pi ab$; в) 1/2. **39.** а) $-\pi\sqrt{3}$; б) $-2\pi/3\sqrt{3}$. **40.** а) –1/2; б) –1/2.

## ГЛАВА IV

**1.** а) 0; б) –1; в) 0,7-2,4$i$; г) 1; д) $-2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right)$; е) $2^{10}(1+i)$; ж) 1728; з) 1. **2.** а) $\operatorname{Re} z=-ch3, \operatorname{Im} z=0$; б) $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z=sh2$; в) $\operatorname{Re} z=\frac{\sin 4}{2\left(\cos^2 2ch^2 1+\sin^2 2sh^2 1\right)}; \operatorname{Im} z=\frac{-sh2}{2\left(\cos^2 2ch^2 1+\sin^2 2sh^2 1\right)}$; г) $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z=-1$; д) $\operatorname{Re} z=\frac{5}{6}; \operatorname{Im} z=-\frac{17}{5}$; е) $\operatorname{Re} z=x+2xy$, $\operatorname{Im} z=y^2-x^2-y$; ж) $\operatorname{Re} z=\frac{1+x+y-xy}{(1+x)^2+y^2}, \operatorname{Im} z=\frac{y+x+x^2+xy-y^2}{(1+x)^2+y^2}$;

**3.** а) $x=\frac{20}{17}; y=-\frac{36}{17}$; б) $x=\frac{b}{a^2-b^2}; y=\frac{a}{a^2-b^2}$; **5.** а) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

г) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

**6.** а) $z_k=\cos\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{8}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}{8}, k=0,1,2\ldots,7;$

б) $z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{6}+i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{6}\right), k=0,1,2\ldots,5;$

в) $z_k=\sqrt[5]{12}\left(\cos\dfrac{-\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}+i\sin\dfrac{-\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}\right), k=0,1,\ldots,4;$

г) $z_k=\cos\frac{2\pi k}{7}+i\sin\frac{2\pi k}{7}, k=0,1,\ldots 6;$

д)
$$z_k^1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{8k+1}{12}\pi+i\sin\frac{8k+1}{12}\pi\right);$$
$$z_k^2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{8k-1}{12}\pi+i\sin\frac{8k-1}{12}\pi\right), k=0,1,2$$

7. а) $2^{60}$; б)-512; в) 1296; г)$512i$; **9.** а) гипербола $x^2-y^2=\frac{1}{2}$; б) гипербола $\dfrac{\left(y+\frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$; в) гипербола $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$; г) парабола $y^2=2x+1$; д) гипербола $xy=1$; **10.** а) $2e^{i\pi}$; б) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; г) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; д) $1\cdot e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$; е) $\sqrt{34}e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{3}{5}}$. 11. а) парабола $u=C^2-\frac{v^2}{4C^2}$, $(C\neq 0)$; полуось $v=0, u<0\,(C=0)$, б) парабола

$u=\frac{v^2}{4C^2}-C^2,(C\neq 0)$; полуось $v=0,u\geq 0(C=0)$; в) полуось $u=0,v\geq 0$; г) окружность $|w|=R^2$; д) луч $\arg w=2\alpha$.

**12.** а) $e^{-2\pi k-arctg\frac{4}{3}+i\ln 5}, k\in Z$; б) $e^{\pi\sqrt{2}i(1+2k)}, k\in Z$;

в) $e^{(1+i)(\ln 5-iarctg\frac{4}{3}+2\pi ki)}, k\in Z$; г) $e^{(i-1)(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}, k\in Z$;

**13.** а) $\ln\sqrt{13}-iarctg\frac{2}{3}+2\pi ki, k\in Z$; б) $\ln\sqrt{2}-i\frac{3\pi}{4}+2\pi ki, k\in Z$;

в) $i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$; г) $i\left(\pi-arctg\frac{3}{2}\right)$; д) $\frac{\pi i}{2}$.

**14.** а) окружность $u^2+v^2=4$, проходимая по ходу часовой стрелки; б) Ось $Ov$ (исключая точку 0), проходимая сначала от 0 до $+\infty$, а затем от $-\infty$ до 0; в) луч, идущий по биссектрисе III координатного угла из $\infty$ в 0; г) биссектриса второго координатного угла, пробегаемая из 0 до $\infty$ и биссектрисса IV координатного угла, пробегаемая из $+\infty$ в 0;

**15.** а) $z_{2k}=2k\pi i; z_{2k+1}=(2k+1)\pi i+\ln 3, k=0,\pm 1,\ldots$;

б) $z_{2k}=2k\pi-i\ln(\sqrt{\pi^2+1}-\pi), z_{2k+1}=(2k+1)\pi-i\ln\left(\sqrt{\pi^2+1}+\pi\right), k=0,\pm 1,\ldots$;

в) $z_k=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i, z_{k+1}=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i, k=0,\pm 1,\ldots$,

г) $\ln 2+i(2k-1)\pi, k=0,\pm 1,\ldots$; д) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,-i\ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right)k=0,\pm 1,\ldots$;

е) $i\ln 2+\pi\left(k+\frac{1}{2}\right), k=0,\pm 1,\ldots$;.

**16.** а) $r=e^4,\varphi=-2$; б) $r=e^5,\varphi=4-2\pi$; в) $r=2,\varphi=3-\pi$.

1. а) $k_1=2,\alpha_1=\frac{\pi}{4}; k_2=\frac{1}{e}; \alpha_2=-\frac{\pi}{2}$;

б) $k_1=1,\alpha_1=0; k_2=\sqrt{ch^2 1-sh^2 1}; \alpha_2=-arctg(th1\cdot tg1)$;

**18.** а) $k_1=2,\alpha_1=\frac{\pi}{4}; k_2=\frac{1}{e}; \alpha_2=-\frac{\pi}{2}$;

б) $k_1 = 1, \alpha_1 = 0; k_2 = \sqrt{ch^2 1 - sh^2 1}; \alpha_2 = -arctg(th1 \cdot tg1)$;

в) $k_1 = 15, \alpha_1 = -arctg\frac{4}{3}; k_2 = 3\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right), \alpha_2 = \varphi - arctg\frac{4\pi}{\pi^2 - 4}$.

**19.** а) полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ растягивается; полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$ сжимается; б) в любой точке $z(z \neq 0)$, лежащей внутри окружности $|z| = 1$ имеет место растяжение, а для точек, лежащих вне этой окружности – сжатие; в) то же, что и в б).

**20.** а) $f(z) = \frac{1}{z}$; б) $f(z) = \ln z$; в) $f(z) = 2shz - z^2$;

г) $f(z) = 2e^z - e + 2$; д) $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \frac{i}{z}$.

**21.** а) да, $f(z) = \sin z - chz + C$; б) да, $f(z) = 2i \ln z - (2 - i)z + C$; в) нет.

## ГЛАВА V

**1.** а) $\sqrt{5}\left(1 - \frac{i}{2}\right)$; б) $2i$; в) 0. **2.** $\pi i$. **3.** $-\frac{1+i}{3}$. **4.** а) $2(i-1)$; б) $-2 + \frac{4i}{3}$; в) $-2$. **5.** а) $-2(1+i)$; б) $-1$; в) $\frac{3}{5}(i-1)$. **6.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1+i)$; в) $-2\pi i$. **7.** а) 0; б) $-ish1$. **8.** а) 0; б) $\frac{i}{2}$; в) 0. **9.** $-\frac{\pi i}{2e}$. **10.** $-\pi i$. **11.** $-\frac{\pi i}{27}$. **12.** а) $-1$; б) $-\frac{i}{6}ch1$.

**14.** а) $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right), R = 1$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; в) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, $0 < |z| < 1$; г) $-\frac{1}{5} - \frac{9z}{15} - \frac{41z^2}{125} - \ldots, R = 1$.

**15.** а) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{2n}}{n!} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2} + 1\right), R = \infty$; б) $e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{n!}, |z - 1| < \infty$;

в) $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^{2k+1}, R=1$; г) $-(z-1)-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{n(n-1)}, |z-1|<1$;

д) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{2}{3^{k+1}}\right)(z+1)^k, |z+1|<2$.

**16.** а) $-\frac{1}{z-1}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n, 0<|z-1|<1$;

б) $\frac{2}{z-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, 0<|z-2|<1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^n}, |z|>2$; г) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, 1<|z|<2$.

**17.** а) $\frac{1}{z-2}+i\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}, 0<|z-2|<\sqrt{5}$;

б) $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, 1<|z|<2$.

**18.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$;

в) $\frac{i}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n-(-2)^n}{z^{n+1}}$.

**19.** а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^n}\right]z^n, |z|<2$;

б) $\frac{3}{z+2}-\frac{2}{(z+2)^2}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n, 0<|z+2|<2$.

**20.** $z^3-z+\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^{n-2}}\cdot\frac{1}{n!}, 0<|z|<\infty$.

**21.** $\left[(z+2)^2-4(z+2)+5\right]\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2)^n}, R=\infty$.

**22.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-2)^{k-1}}{2^k}, R=2$.

23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-2}$, $0<|z-2|<1$.

24. а) $z_n=(2n+1)\pi i$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ нули второго порядка; б) $z_{1,2}=\pm\pi i$ - нули второго порядка, $z_n=(2n+1)\pi i$ - простые нули; в) нет нулей; г) $z=0$ - третьего порядка, $z_n=\pi n$ - простые; д) $z=0$ - простой, $z_n=n\pi i$ - второго порядка; е) $z_n=\sqrt[3]{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$; $z_n=\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ - простые.

25. а) простой нуль; б) третьего порядка; в) третьего порядка; г) второго порядка; д) пятнадцатого порядка; е) третьего порядка.

26. а) $z=\pm 1$ - полюса первого порядка, $z=0$ - полюс третьего порядка, $z=\infty$ - устранимая особая точка, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\pm 1} f(z)=\frac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=-1$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$; б) $z=0, z=\pm 1$ - полюса первого порядка, $z=\infty$ - устранимая особая точка, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\pm 1} f(z)=-\frac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=1$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$; в) $z=-1$ - полюс третьего порядка, $z=\infty$ - существенно особая точка, $\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)=2\sin 2$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-2\sin 2$; г) $z=0$ - полюс второго порядка, $z=\pm 3i$ - простые полюса, $z=\infty$ - существенно особая точка, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\frac{1}{9}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\pm 3i} f(z)=-\frac{1}{54}(\sin 3\mp i\cos 3)$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{24}(\sin 3-3)$; д) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\pi k} f(z)=(-1)^k$, $k\in Z$; е) $\operatorname*{Res}\limits_{z=2} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\frac{143}{24}$; ж) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{5!}$, $z=0$ - существенно особая, $z=\infty$ - устранимая. 27. а) 0; б) $\frac{8}{\pi}i-4i$; в) $-2\pi+8\pi i$; г) $2\pi i$; д) $-\frac{8}{\pi}i$; е) $2\pi i$; ж) $-2-\frac{4}{\pi}i$; з) $\pi+\frac{1}{8}\pi i(1-e^{-8i})$.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ГЛАВА I

## КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ



## ГЛАВА II

## КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ



## ГЛАВА III

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТЕОРИЯ ПОЛЯ



## ГЛАВА IV

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## ГЛАВА V

## ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ