МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИЗАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФИЛИАЛ

С.А. Докучаев
В.Н. Ефименко
Г.С. Костецкая
Л.А. Прушинская

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(учебное пособие)

Ростов-на-Дону
2003

УДК 510 План издания УМД на 2003/2004 уч.год

Высшая математика
(учебное пособие)

С.А.Докучаев, В.Н.Ефименко,
Г.С.Костецкая, Л.А.Прушинская

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике, составленный с учетом всех требований и особенностей учебной программ для студентов, изучающих курс Высшей математики специальностей 201000 и 200900. Пособие снабжено большим количеством задач, примеров.

Утверждено на заседании Кафедры общенаучной подготовки
СКФ МТУСИ от 08.09.03 (протокол №1)

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1

Основные понятия и определения

1.1 Понятие множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под множеством понимается совокупность объектов одной природы. Объекты, которые составляют множество, называются *элементами этого множества.*

Примерами множеств являются множество студентов данного вуза, множество столов в аудитории, множество натуральных чисел и т. п. В дальнейшем нас будут интересовать только числовые множества.

Множества принято обозначать прописными буквами, а их элементы — строчными. Если a есть элемент множества A, то используется запись $a \in A$. Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$.

Множество считается вполне заданным, если относительно любого элемента можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Существует два способа задания множеств.

Первый способ состоит в простом перечислении всех элементов множества. Например, запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Второй способ задания множества заключается в указании свойства, которым обладают все элементы этого множества. Например, множество $\{x : \; x^2 = 1\}$ есть совокупность чисел квадрат которых равен 1, т. е. $x_1 = 1$,

$x_2 = -1$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$, пустое.

Множество B называется *подмножеством* множества A, если любой элемент множества B является элементом A. Записывают это так: $B \subset A$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Другими словами, множество A совпадает с множеством B ($A = B$), если любой элемент A является элементом B, и наоборот ($A \subset B$, $B \subset A$).

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из двух элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т. е. $C = A \cup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременнно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, т. е. $D = A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т. е. $E = A \setminus B$.

Определенные выше операции над множествами, допускают наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 1.1).

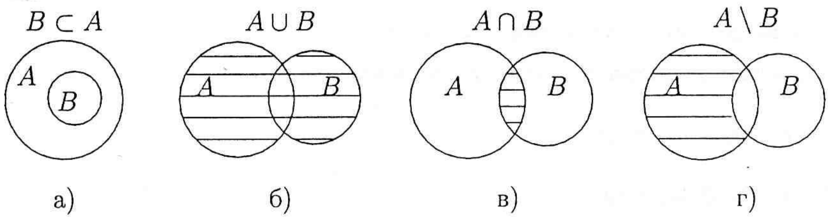


Рис. 1.1.

Из школьного курса алгебры известны множества: $\mathbb{R}$ — действительных чисел, $\mathbb{Q}$ — рациональных чисел, $\mathbb{I}$ — иррациональных, $\mathbb{Z}$ — целых, $\mathbb{N}$ — натуральных чисел. Очевидно, что $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой (рис. 1.2) существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой и наоборот. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

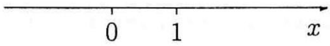


Рис. 1.2.

Множество X, элементы которого удовлетворяют неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* $[a; b]$; неравенству $a < x < b$ — *интервалом* $(a; b)$; неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$; называются полуинтервалами соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$. Наряду с этим рассматриваются бесконечным интервалы и полуинтервалы $(-\infty; a)$, $(b; +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$.

1.2 Окрестность точки

Определение 1.1. *Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называется само число x, если $x \geqslant 0$, число $-x$, если $x < 0$:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \textit{если } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, по определению, что $|x| \geqslant 0$.

Отметим свойства абсолютных величин:

1°. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

2°. $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

3°. $|xy| = |x||y|$.

4°. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Определение 1.2. *Окрестностью точки a называется всякий интервал, содержащий точку a.*

Определение 1.3. *Пусть* $\varepsilon > 0$. ε*-окрестностью точки* a *называется интервал* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *(рис. 1.3).*

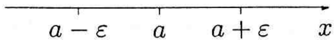


Рис. 1.3.

ε-окрестности точки a соответствует множество X:

$$X = \{x\colon a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x\colon -\varepsilon < x-a < \varepsilon\} = \{x\colon |x-a| < \varepsilon\}.$$

Определение 1.4. ε*-окрестностью* $+\infty$ *называется интервал* $(1/\varepsilon, +\infty)$ *или множество* $\{x \in \mathbb{R}\colon x > 1/\varepsilon\}$ *(рис. 1.4).*

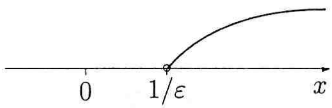


Рис. 1.4.

Аналогично, ε*-окрестностью* $-\infty$ *называют интервал* $(-\infty, -1/\varepsilon)$ *или множество* $\{x \in \mathbb{R}\colon x < -1/\varepsilon\}$ *(рис. 1.5).*

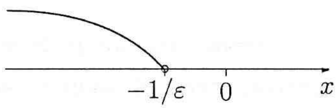


Рис. 1.5.

Нужным бывает и понятие окрестности для бесконечности без знака ∞. Она представляет собой объединение ε-окрестностей $\pm\infty$, т. е. множество $\{x \in \mathbb{R}\colon |x| > 1/\varepsilon\}$ (рис. 1.6).

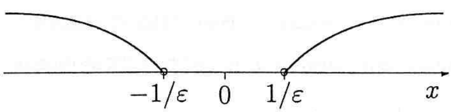


Рис. 1.6.

1.3 Понятие функции

Определение 1.5. *Говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ со значениями во множестве Y, если каждому элементу x множества X ($x \in X$) в силу некоторого закона f ставится в соответствие единственный элемент y множества Y ($y \in Y$).*

При этом x называется независимой переменной (или аргументом), y — значением функции.

Множество X называется областью определения функции, а множество Y — областью значений функции.

Имеет место следующая геометрическая интерпретация понятия функции (рис. 1.7).

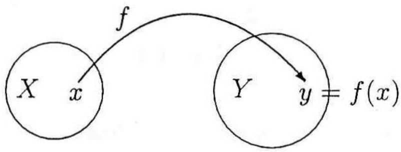


Рис. 1.7.

Существует несколько способов задания функции.

а) *Аналитический способ*, если функция задана формулой вида $y = f(x)$. Например, функция $y = \sin x$ задана аналитически. Одна функция может иметь несколько аналитических выражений. Например, функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

б) *Табличный способ* состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $f(x)$.

в) *Графический способ* состоит в изображении графика функции — множества точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты — соответствующие им значения функции $y = f(x)$.

Рассмотрим основные свойства функций.

Определение 1.6. *Функция $y = f(x)$ называется четной, если для всех x из области определения $f(-x) = f(x)$ и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $f(x)$ называется функцией общего вида.*

Например, функция $y = x^2$ является четной $(f(-x) = (-x)^2 = x^2)$, а функция $y = x^3$ — нечетной $(f(-x) = (-x)^3 = -x^3)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 1.8), а нечетной — относительно начала координат (рис. 1.9).

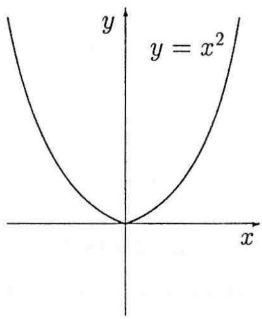


Рис. 1.8.

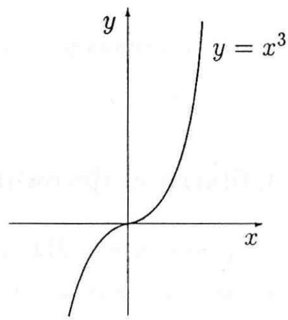


Рис. 1.9.

Определение 1.7. *Говорят, что $f(x)$ не возрастает (не убывает) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \leqslant f(x_2))$. Функция $f(x)$ называется строго возрастающей (строго убывающей) на X, если для любых $x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.*

Все функции, удовлетворяющие одному из пунктов определения 1.7, называются *монотонными*.

Так, например, функция $y = x^2$ убывает на полуинтервале $(-\infty, 0]$ и возрастает при $x \in [0, \infty)$, т. е. не является монотонной на всей области определения.

Монотонной, очевидно, будет функция $y = x^3$, так как она возрастает для всех $x \in \mathbb{R}$.

Определение 1.8. *Функция $f(x)$ называется ограниченной на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется неограниченнной.*

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как $|\sin x| \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Определение 1.9. *Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.*

Например, функция $y = \sin x$ имеет период $T = 2\pi$, так как для любых x $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

1.4 Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ определена и строго возрастает (убывает) на промежутке X. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ единственное значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$ (это значение будет единственным в силу строгой монотонности функции). Полученная функция $x = \varphi(y)$ или $x = f^{-1}(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X, называется *обратной*.

Проиллюстрируем действие обратной функции графически (рис. 1.10).

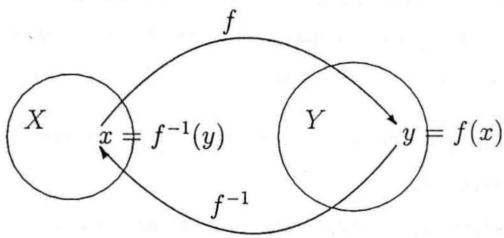


Рис. 1.10.

Пример. Найти обратную функция для функции $f(x) = x^3$.

Данная функция определена и строго возрастает на всей числовой оси. Чтобы найти обратную к ней следует разрешить уравнение $y = x^3$ относительно x.

$$y = x^3 \implies x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y).$$

1.5 Сложная функция

Пусть функция $x = g(t)$ определена на множестве T с областью значений X. Пусть, кроме того на множестве X задана функция $y = f(x)$. Тогда, заданная на множестве T функция $y = f(g(t)) = \varphi(t)$ называется *сложной функцией* или *суперпозицией* функций f и g.

Геометрически сложная функция иллюстрируется следующим образом (рис. 1.11).

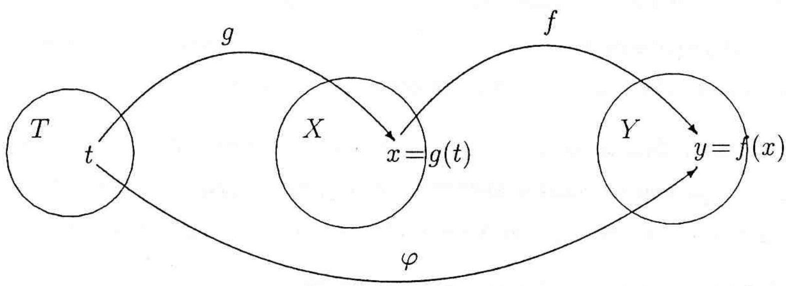


Рис. 1.11.

Пример. Функция $y = \sin \ln t$ — сложная функция, определенная для всех $t \in (0, +\infty)$, так как $y = f(x) = \sin x$, $x = g(t) = \ln t$, $T = (0, +\infty)$.

Замечание. Для существования сложной функции необходимо и достаточно, чтобы область значений функции $x = g(t)$ была подмножеством области определения функции $y = f(x)$.

Глава 2

Числовые последовательности

2.1 Основные понятия

Определение 2.1. *Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по некоторому закону вещественное число x_n. Множество занумерованных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется числовой последовательностью или просто последовательностью.*

Числа x_n будем называть *элементами* или *членами последовательности.* Сокращенно последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем обозначать символом $\{x_n\}$, где x_n — n-й (общий) член последовательности.

Приведем примеры последовательностей:

1) $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $-1, 1, -1, 1, \ldots$;

2) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = 1, \ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{3}, \ldots$;

3) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\} = \sin 1, \ \dfrac{\sin 2}{2}, \ \dfrac{\sin 3}{3}, \ldots$.

Введем понятие арифметических операций над числовыми последовательностями. Пусть даны произвольные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. *Суммой* этих последовательностей называется последовательность x_1+y_1, $x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots = \{x_n+y_n\}$, *разностью* — последовательность x_1-y_1, $x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n, \ldots = \{x_n-y_n\}$, *произведением* — последовательность $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, \ldots = \{x_ny_n\}$, *частным* — последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots,$

$\frac{x_n}{y_n}, \ldots = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n \neq 0$ для любого n.

Определение 2.2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое вещественное число M (число m), что для всех n выполняется неравенство $x_n \leqslant M$ ($x_n \geqslant m$).*

Определение 2.3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и снизу и сверху, т. е. если существуют числа m и M такие, что $m \leqslant x_n \leqslant M$ для любого n.*

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности последовательности можно записать в виде $|x_n| \leqslant A$.

Определение 2.4. *Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.*

Рассмотрим несколько примеров:

1) Последовательность $\{x_n\} = \{n\}$ ограничена снизу, так как $x_n \geqslant 0$ для любого n.

2) Последовательность $\{x_n\} = \{-n^2\}$ ограничена сверху, так как $x_n \leqslant 0$ для любого n.

3) Последовательность $\{\sin n\}$ ограничена, так как $|\sin n| \leqslant 1$.

4) Последовательность $\{n^2\}$ — неограниченная. В самом деле, каково бы ни было положительное число A, найдутся элементы этой последовательности, превосходящие A.

2.2 Предел последовательности

Обозначим $V_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность точки a ($a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$, $a = \infty$).

Определение 2.5. *Величина a ($a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$, $a = \infty$) называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется номер N, зависящий от ε, такой, что для всех $n > N$ $x_n \in V_\varepsilon(a)$.*

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Используя логические символы, определение предела можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : x_n \in V_\varepsilon(a) \quad \forall\, n > N.$$

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда условие $x_n \in V_\varepsilon(a)$ равносильно неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ и определение предела примет вид

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N.$$

Аналогичным образом формулируются определения бесконечных пределов ($a = \pm\infty$, $a = \infty$):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon)\colon\ x_n > 1/\varepsilon \quad \forall\, n > N,\\
&\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon)\colon\ x_n < -1/\varepsilon \quad \forall\, n > N,\\
&\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon)\colon\ |x_n| > 1/\varepsilon \quad \forall\, n > N.
\end{aligned}$$

Пример 1. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, используя определение предела последовательности.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$, откуда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, в качестве N можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ будет выполняться при всех $n > N$. Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Выясним геометрический смысл предела последовательности. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Расположим члены последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на числовой прямой. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ соответствует попаданию членов последовательности x_n в ε-окрестность точки a (рис. 2.1).

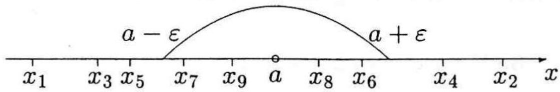


Рис. 2.1.

Таким образом, число a есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого (при $n > N$) все члены последовательности будут заключены в ε-окрестности точки a, какой бы малой она ни была. Вне этой ε-окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

Пример 2. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ не имеет предела.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a$; $a \neq \pm 1$, то можно найти такое $\varepsilon_0 > 0$, что все члены последовательности ($x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1, \ldots$) будут лежать вне ε_0-окрестности точки a (рис. 2.2).

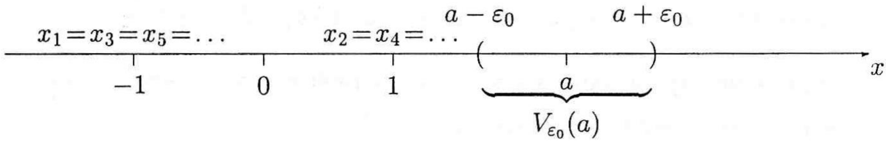


Рис. 2.2.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = \pm 1$, то можно указать такое число $\varepsilon_1 > 0$, что все нечетные (четные) члены последовательности будут лежать вне ε_1-окрестности точки $a = 1$ ($a = -1$) (рис. 2.3).

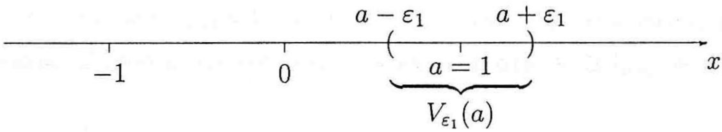


Рис. 2.3.

Получим противоречие с определением предела последовательности. Следовательно, данная последовательность предела не имеет.

2.3 Сходящиеся последовательности

Определение 2.6. *Последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел.*

Другими словами, последовательность $\{x_n\}$ сходится $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall n > N$.

Рассмотрим основные свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 2.1. *Если последовательность сходится, то она имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \to b$. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Из того, что $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ при $n > N_1$. Из того, что $x_n \to b$ следует, что $|x_n - b| < \varepsilon/2$ при $n > N_2$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n > N$ выполняются оба неравенства и, следовательно,

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Разность между числами a и b по абсолютной величине меньше любого положительного числа, следовательно, $a = b$. □

Теорема 2.2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Положим $\varepsilon = 1$, тогда найдется номер $N_1 = N_1(1)$ такой, что для $n > N_1$ $|x_n - a| < 1$. Следовательно, $|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < |1 + |a|$ для всех $n > N_1$. Обозначим через A наибольшее из чисел $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_1}|, |a|+1$. Тогда для всех n справедливо неравенство $|x_n| \leqslant A$, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. □

Замечание. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не сходится.

2.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 2.7. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Иными словами, последовательность бесконечно малая, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N = N(\varepsilon)$: $|x_n| < \varepsilon\ \forall\, n > N$.

Определение 2.8. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Иными словами, последовательность бесконечно большая, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N = N(\varepsilon)$: $|x_n| > 1/\varepsilon\ \forall\, n > N$.

Замечание. Очевидно, что любая бесконечно малая последовательность ограничена, т. к. она сходится. Покажем, что бесконечно большая последовательность является неограниченной. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n| > 1/\varepsilon$. Обозначим $A = 1/\varepsilon$. Тогда, для любого $A > 0$ найдется по крайней мере один такой элемент x_n, что $|x_n| > A$. А это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ неограничена.

Рассмотрим основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Теорема 2.3. *1) Сумма или разность двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

2) Произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая.

3) Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер N_1, такой, что при $n > N_1$ выполнено $|\alpha_n| < \varepsilon/2$, и номер N_2, такой, что $|\beta_n| < \varepsilon/2$ при $n > N_2$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ выполняются оба неравенства и, следовательно,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как для любого числа $\varepsilon > 0$, $|\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = 0$, т. е. последовательность $\alpha_n \pm \beta_n$ — бесконечно малая.

2) Пусть последовательность $\{x_n\}$ — ограниченная, $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\alpha_n = 0$.

Из ограниченности последовательности $\{x_n\}$ следует, что существует число $M > 0$ такое, что при всех n выполнено неравенство $|x_n| < M$.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Следовательно, $|x_n\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ при $n > N$, а это и означает, что $\{x_n\alpha_n\}$ — бесконечно малая.

3) Доказательство следует непосредственно из п. 2, если вспомнить, что любая бесконечно малая ограничена. □

Теорема 2.4. *1) Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая и $x_n \neq 0$ для всех n, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая. Наоборот, если $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$, бесконечно большая, то последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — бесконечно малая.*

2) Сумма бесконечно большой и ограниченной есть бесконечно большая.

3) Сумма бесконечно больших одного знака есть бесконечно большая того же знака.

Доказательство. 1) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n > N$ выполнено $|x_n| < \varepsilon$. Отсюда получаем, что $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех $n > N$. А это и означает, что $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая. Аналогично доказывается, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — бесконечно малая.

2) Пусть последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая, $\{y_n\}$ — ограниченная. Докажем, что $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая.

Из ограниченности $\{y_n\}$ следует, что существует такое число $M > 0$, что для всех n $|y_n| \leqslant M$. Поскольку $\{x_n\}$ — бесконечно большая, то для любого $\varepsilon > 0$, найдется номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n| > \frac{2}{\varepsilon}$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\frac{1}{\varepsilon} > M$. Тогда для всех $n > N$ $|x_n+y_n| \geqslant |x_n|-|y_n| > \frac{2}{\varepsilon} - M = \frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon} - M > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая последовательность.

3) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда, существует номер N_1, такой, что при $n > N_1$ выполнено неравенство $x_n > \frac{1}{2\varepsilon}$, и номер N_2, такой, что $y_n > \frac{1}{2\varepsilon}$ для всех $n > N_2$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ выполняются оба неравенство и, следовательно, $x_n + y_n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. □

Докажем теорему, которая устанавливает связь между пределами сходящихся последовательностей и бесконечно малыми.

Теорема 2.5. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к числу a, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x_n = \alpha + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая.*

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначим $\alpha_n = x_n - a$. Таким образом, для всех $n > N$ выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а это и означает, что $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. При этом $x_n = a + \alpha_n$.

2) Чтобы доказать достаточность, следует перейти в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$. □

2.5 Арифметические свойства пределов

Теорема 2.6. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — сходящиеся последовательности, т. е. существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Тогда 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n,$

3) если $y_n \neq 0$ *для всех* n *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно, $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$. По свойству бесконечно малых последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — бесконечно малая. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$ или $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

Действительно, $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$. На основании свойств бесконечно малых заключаем, что $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ — бесконечно малая. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

3) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $y_n \neq 0$ для всех n и $b \neq 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Действительно, $x_n = a + \alpha_n$, $\alpha_n \to 0$ и $y_n = b + \beta_n$, $\beta_n \to 0$. Тогда $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{by_n} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n}$. Очевидно, что последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ — бесконечно малая. Покажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{by_n}\right\}$ — ограниченная.

Из того, что $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|\beta_n| < \varepsilon$. Возьмем число $\varepsilon = |b|/2$. Тогда при $n > N$ выполнено $|\beta_n| < |b|/2$ и, следовательно,

$$|b + \beta_n| \geqslant |b| - |\beta_n| \geqslant |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \text{для всех} \quad n > N.$$

Если обозначить через M наибольшее из чисел $\left\{\left|\frac{1}{by_1}\right|, \left|\frac{1}{by_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{by_n}\right|, \frac{1}{b^2/2}\right\}$, то $\left|\frac{1}{by_n}\right| \leqslant M$ для всех n, т. е. последовательность $\left\{\frac{1}{by_n}\right\}$ — ограничена.

Таким образом, последовательность $\left\{\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n}\right\} = \left\{\frac{1}{by_n}\right\}\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ — бесконечно малая (как произведение бесконечно малой на ограниченную), следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. □

2.6 Раскрытие неопределенностей

Замечание. Арифметические свойства пределов справедливы только для сходящихся последовательностей. Если же это требование не выполняется хотя бы для одной из последовательностей, то получаются так называемые неопределенности и конечный результат определяется конкретным видом данных последовательностей.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Наиболее просто отыскивается предел, когда x_n и y_n многочлены по n. В этом случае следует числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень обоих многочленов.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+5n-3}{n^3+7n-6}$.

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n-3}{n^3+7n-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{7}{n^2}-\frac{6}{n^3}} = 1.$$

Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ произвольные последовательности (не обязательно многочлены), то следует в каждой из них выделить главную часть на бесконечности, т. е. представить, например, $\{x_n\}$ в виде

$$x_n = a_n b_n, \quad \text{где} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n}}$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$ есть неопределенность вида $\infty - \infty$. Как правило, это неопределенности, содержащие иррациональные выражения. С помощью домножения на сопряженное выражение они сводятся к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$.

Умножим и разделим на сопряженное выражение

$$\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}.$$

Получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которую раскрываем как в 1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(\sqrt{1+1/n+1/n^2} + \sqrt{1-1/n+1/n^2})} = 1.$$

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ есть неопределенность вида $0\cdot\infty$. Если же обозначить $z_n = \frac{1}{y_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{z_n}$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, т. к. $\{z_n\}$ — бесконечно малая. Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n}$ есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. к. $z_n = \frac{1}{x_n}$ — бесконечно большая. Таким образом, неопределенности $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ связаны между собой.

2.7 Предельный переход в неравенствах

Теорема 2.7. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности и $x_n \leqslant y_n$ для всех $n > N$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Докажем, что $a \leqslant b$.

Предположим (от противного), что $a > b$. Тогда существует положительное число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $b + \varepsilon_0 < a - \varepsilon_0$ (рис. 2.4).

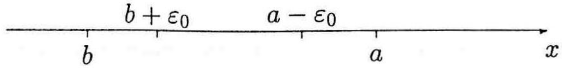


Рис. 2.4.

Поскольку a — предел последовательности $\{x_n\}$, то для ε_0 можно указать номер $N_1 = N_1(\varepsilon_0)$ такой, что при $n > N_1$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon_0$ или эквивалентное неравенство $a - \varepsilon_0 < x_n < a + \varepsilon_0$. Аналогично, так как b — предел последовательности $\{y_n\}$, то для ε_0 существует номер $N_2 = N_2(\varepsilon_0)$ такой, что для всех $n > N_2$ справедливо неравенство $|y_n - b| < \varepsilon_0$ или эквивалентное неравенство $b - \varepsilon_0 < y_n < b + \varepsilon_0$.

Пусть $N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N_0$ выполняются все вышеуказанные неравенства и, следовательно,

$$y_n < b + \varepsilon_0 < a - \varepsilon_0 < x_n \quad \text{при} \quad n > N_0.$$

Таким образом, для всех $n > N_0$ выполнено неравенство $x_n > y_n$, а это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает, что $a \leqslant b$, т. е. $\lim x_n \leqslant \lim y_n$. $\square$

Теорема 2.8. *Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$ и для всех n $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$. Тогда последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_1, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_1$, и такой номер N_2, что $|y_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_2$. При $n > N$, где N наибольшее из чисел N_1, N_2, выполняются оба неравенства, откуда следует, что для всех $n > N$ $\ a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon$. Следовательно, для всех $n > N$ выполнено неравенство $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$, т. е. $|z_n - a| < \varepsilon$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. $\square$

2.8 Границы числовых множеств

Определение 2.9. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует такая постоянная $a(b)$, что для всех $x \in X$ будет выполняться $x \leqslant a$ $(x \geqslant b)$.*

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу, т. е. существуют такие постоянные a, b, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $b \leqslant x \leqslant a$.

При этом число a (b) называется верхней (нижней) границей. Очевидно, что если множество имеет одну верхнюю (нижнюю) границу, то оно имеет бесконечное множество таких границ. Например, множество всех натуральных чисел ограничено снизу числом 1 или любым другим числом меньше 1, множество чисел, принадлежащих интервалу $(0, 1)$ ограничено снизу числом 0 (или любым, меньше, чем 0), а сверху — числом 1 (или любым, большим чем 1).

Определение 2.10. *Наименьшая из всех верхних границ множества X называется точной верхней границей множества X и обозначается $\sup X$ («супремум»). Наибольшая из всех нижних границ множества X называется точной нижней границей множества X и обозначается $\inf X$ («инфимум»).*

Имеет место принцип точной верхней (нижней) границы.

Принцип точной верхней (нижней) границы. *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.*

Например, для множества всех натуральных чисел точной нижней границей является число 1; для множества $(0, 1)$ точная нижняя граница равна 0, а точная верхняя 1. Заметим, что во втором случае точная верхняя и нижняя границы не принадлежат самому множеству.

Теорема 2.9 (критерий точной верхней границы). *Число a является точной верхней границей множества X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) для всех $x \in X$ выполнено $x \leqslant a$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x \in X$, зависящий от ε, что $x = x(\varepsilon) > a - \varepsilon$.

Теорема 2.10 (критерий точной нижней границы). *Число b является точной нижней границей множества X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) для всех $x \in X$ выполнено $x \geqslant b$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x \in X$, зависящий от ε, что $x = x(\varepsilon) < b + \varepsilon$.

2.9 Монотонные последовательности

Определение 2.11. *Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$ для всех n; неубывающей, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех n; убывающей, если $x_n > x_{n+1}$ для всех n; невозрастающей, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех n.*

Все такие последовательности объединяются общим названием: монотонные последовательности.

Имеет место следующая основная теорема о монотонных последовательностях.

Теорема 2.11. *Монотонная последовательность всегда имеет предел. Этот предел конечен, если она ограничена и бесконечен в противном случае.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем возрастающей и ограниченной последовательности, поскольку в остальных случаях рассуждения аналогичны.

Пусть $\{x_n\}$ — возрастает и ограничена, т. е. для всех n выполнено неравенство $x_n < x_{n+1}$ и существует число M такое, что $x_n \leqslant M$. Рассмотрим числовое множество X, состоящее из элементов данной последовательности. По условию это множество ограничено сверху и непусто. Тогда в силу принципа точной верхней границы существует $\sup X = a \in \mathbb{R}$. Докажем, что a является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Так как $a = \sup X$ — точная верхняя грань множества элементов последовательности $\{x_n\}$, то по критерию точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_0 = N_0(\varepsilon) : x_{N_0} > a - \varepsilon$. Поскольку $\{x_n\}$ — неубывающая последовательность, то при $n > N_0$ будет $x_n \geqslant x_{N_0} > a - \varepsilon$. С другой стороны, по определению верхней грани $x_n \leqslant a < a + \varepsilon$ для всех n. Таким образом, при $n > N_0$ получаем неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

2.10 Число e

Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

и докажем, что она имеет конечный предел. Для доказательства существования конечного предела этой последовательности достаточно показать, что последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная сверху.

Доказательство. Пользуясь формулой бинома Ньютона, запишем:

$$\begin{aligned} x_n \; = \; & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \\ & + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \frac{1}{n^k} + \\ & + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} x_n \; = \; & 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \\ & + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots \\
&\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots \\
&\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
x_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \\
&+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.
\end{aligned}
$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная сверху, следовательно, она имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ следует, что $e\leqslant 3$. Отбрасывая в равенстве (7.3) все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

и, переходя к пределу в этом неравенстве, получим

$$e\geqslant 2+\frac{1}{2}=2{,}5.$$

Таким образом, число e заключено между 2,5 и 3. О более точном вычислении числа e будет сказано дальше, при рассмотрении формулы Тейлора.

Можно доказать, что число e — иррациональное и значение $e = 2{,}71828\ldots$ Заметим еще, что из теоремы о пределе монотонной последовательности следует так же, что неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$ выполняется при любом n.

$\square$

Глава 3

Предел функции

3.1 Предельная точка множества

Определение 3.1. *Точка a называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности точки a находятся точки множества X, отличные от a.*

При этом точка a может как принадлежать множеству X, так и не принадлежать ему. Например, для множества $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ предельная точка $a = 0$, $a \notin X$, для множества $X = [a, b]$ любая точка является предельной. Предельная точка может быть бесконечной. Например, $a = +\infty$ — предельная точка множества натуральных чисел N.

Определение 3.2. *Если точка $a \in X$ не является предельной точкой множества X, то она называется изолированной точкой множества X.*

Например, множество $X = \{0, 1, 2\}$ состоит из изолированных точек.

Замечание. Если a — предельная точка множества X, то в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из множества X.

3.2 Определение предела функции

Пусть $y = f(x)$ — функция, заданная на множестве X и точка a — предельная точка этого множества.

Определение 3.3. *Величина A ($A \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$, $A = \infty$) называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (в точке $x = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех $x \in X$, $x \neq a$, принадлежащих δ-окрестности точки a, значения функции $f(x)$ будут находиться в ε-окрестности точки A.*

Используя логические символы, определение 3.1 можно записать в виде

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon f(x) \in V_\varepsilon(A) \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap (X \backslash \{a\}).$$

Замечание. Определение предела функции таково, что значение функции в точке a не играет никакой роли, функция может быть даже не определена в этой точке.

Определение 3.1 называют определением предела функции по Коши или определением на языке окрестности ε–δ.

Дадим еще одно определение предела функции, которое называют определением по Гейне или на языке последовательности.

Определение 3.4. *Величина A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, принадлежащей множеству X и сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.*

Теорема 3.1 (Гейне). *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Определение предела функции по Гейне позволяет установить для некоторых функций, что они не имеют предела при определенном значении аргумента.

Пример 1. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Покажем, что $f(x)$ не имеет предела при $x \to 0$. Для этого достаточно найти две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$: $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n}$. Пусть $x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0$, тогда $f(x_n) = \sin \pi n \to 0$. Возьмем теперь последовательность $\{y_n\} = \frac{2}{\pi(4n+1)} \to$

0, при этом $\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\frac{\pi}{2} \to 1$, что и доказывает отсутствие предела $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

3.3 Предел функции в точке

Приведенные выше определения предела не учитывают ни характера точки a, ни величины предела A. Расшифруем определение предела по Коши для случая, когда $a \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathbb{R}$.

Определение 3.5. *Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon\ |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X : 0 < |x - a| < \delta.$$

Смысл определения предела функции $f(x)$ в точке a состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к a, значения $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в точке. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенсту $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, а это соответствует расположению части графика в полосе $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Аналогично, неравенство $|x - a| < \delta$ соответствует попаданию точек x в δ-окрестность точки a (рис. 3.1).

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, какой бы узкой эта полоса ни была.

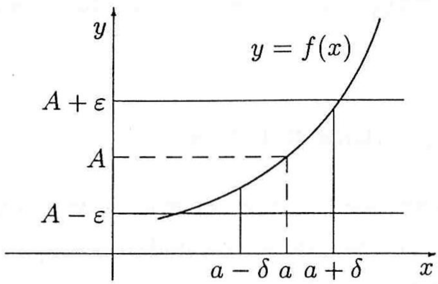


Рис. 3.1.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$.

Возьмем число $\varepsilon > 0$. Найдем такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, будет справедливо неравенство $|(3x+2)-5| < \varepsilon$.

Последнее неравенство можно записать в виде $3|x-1| < \varepsilon$ или $|x-1| < \varepsilon/3$. Следовательно, если взять δ, удовлетворяющее условию $0 < \delta \leqslant \varepsilon/3$, то неравенство $|(3x+2)-5| < \varepsilon$ будет выполнено при $|x-1| < \delta$. А это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$.

3.4 Предел функции в бесконечности

Расшифруем теперь определение предела функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Определение 3.6. *Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех значений x, $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.*

С помощью логических символов определение запишется в виде

$$\lim_{x\to\infty} = A \iff \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon) > 0\colon \ |f(x)-A| < \varepsilon \quad \forall x\in X\colon \ |x| > \delta.$$

Смысл определения предела функции на ∞ состоит в том, что при достаточно больших по модулю значениях x значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величины). Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, то график функции $f(x)$ асимптотически приближается к прямой $y=A$

при стремлении x к бесконечности как по положительным, так и по отрицательным значениям (рис. 2).

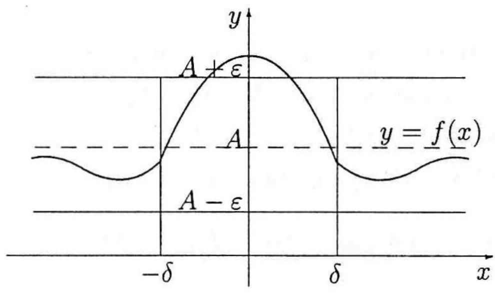


Рис. 3.2.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+1}{x} = 5$.

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - A| = \left|\frac{5x+1}{x} - 5\right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ выполняется при $|x| > 1/\varepsilon$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = 1/\varepsilon > 0$, что для всех x, таких, что $|x| > \delta$, будет верно неравенство $\left|\frac{5x+1}{x} - 5\right| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+1}{x} = 5$.

Аналогично определяются пределы $f(x)$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$:

$$A = \lim_{x\to+\infty} f(x) \iff \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \; |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X\colon \; x > \delta,$$

$$A = \lim_{x\to-\infty} f(x) \iff \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \; |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X\colon \; x < -\delta.$$

3.5 Локальные свойства функций, имеющих конечный предел

Локальные свойства — это свойства в окрестности точки. При этом сама окрестность не указывается.

Теорема 3.2. *Пусть a — предельная точка X и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда функция $f(x)$ локально ограничена в точке a, т. е. существует* *окрестность точки* a $V(a)$ *такая, что* $f(x)$ *ограничена для всех* $x \in (X\backslash\{a\}) \cap V(a)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда найдется число $\delta_1 = \delta(1)$ такое, что для всех $x \in (X\backslash\{a\}) \cap V_{\delta_1}(a)$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < 1$. Так как $|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leqslant |f(x) - A| + |A|$, то для всех $x \in (X\backslash\{a\}) \cap V_{\delta_1}(a)$ справедливо неравенство

$$|f(x)| < 1 + |A| \quad \text{или неравенство} \quad |f(x)| < M, \quad \text{где} \quad M = 1 + |A|.$$

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a. □

Теорема 3.3. *Пусть* a *— предельная точка* X *и* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. *Тогда существует окрестность точки* a $V(a)$ *такая, что* $f(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (X\backslash\{a\}) \cap V(a)$ *(если* $A > 0$, *то* $f(x) > 0$; *если* $A < 0$, *то* $f(x) < 0$*).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x \in (X\backslash\{a\}) \cap V_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = A/2 > 0$. Тогда найдется такое число $\delta = \delta(A/2)$, что для всех $x \in (X\backslash\{a\}) \cap V_\delta(a)$ выполнено неравенство $A/2 < f(x) < 3/2A$. Следовательно, $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки a. □

3.6 Действия с пределами функций

Теорема 3.4. *Пусть* a *— предельная точка* X *и функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют конечные пределы при* $x \to a$. *Тогда*

1) *существует* $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2) *существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) *если* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, *то существует* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Доказательство. 3) Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$. Из того, что $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B \neq 0$ следует, что $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a. Поскольку a — предельная точка множества X, то существует последовательность $\{x_n\}$: 1) $x_n \in X$, 2) $x_n \neq a$, 3) $x_n \to a$. Следовательно, в силу теоремы Гейне $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$, $g(x_n) \neq 0$ для всех $n > N$.

Согласно свойству сходящихся последовательностей получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда в силу теоремы Гейне следует, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$. □

Теорема 3.5. *Пусть a — предельная точка X и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$. Если существуют конечные пределы $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

Теорема 3.6. *Пусть a — предельная точка X и $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ для всех $x \in X$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$, то существует $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.*

Доказательства теорем 3.5 и 3.6 мы здесь не приводим, поскольку они аналогичны доказательству теоремы 3.4.

3.7 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 3.7. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

Можно дать равносильное определение бесконечно малой функции, используя логические символы:

$\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке $x = a$ $(a \in \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X$: $0 < |x - a| < \delta$.

Например, $\alpha(x) = x^2$ — бесконечно малая в точке $x = 0$.

Для бесконечно малых функций справедливы те же свойства, что и для бесконечно малых последовательностей.

Теорема 3.7. *1) Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые в точке $x = a$, то функции $\alpha(x) + \beta(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малые в точке a.*

2) Если $f(x)$ ограничена в точке $x = a$, $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке $x = a$, то $f(x)\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке a.

Доказательство теоремы 3.7 следует из аналогичной теоремы для последовательностей.

Определение 3.8. *Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ (в точке $x = a$), если $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = \infty$.*

Символическая запись определения бесконечно большой функции при $x \to a$ ($a \in \mathbb{R}$):

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon)\colon \;\; |f(x)| > 1/\varepsilon \;\; \forall x \in X\colon \;\; 0 < |x - a| < \delta.$$

Для бесконечно больших функций определенного знака ($\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = \pm\infty$) неравенство $|f(x)| > 1/\varepsilon$ в определении предела заменяют неравенством $f(x) > 1/\varepsilon$ или $f(x) < -1/\varepsilon$.

Бесконечно большие функции обладают следующими свойствами.

Теорема 3.8. *1) Если функции $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то функция $1/\alpha(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$. Наоборот, если $\alpha(x)$ — бесконечно большая в точке $x = a$, то $1/\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке $x = a$.*

2) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно большие функции одного знака, то $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно большая функция того же знака.

3) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно большие функции в точке $x = a$, а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, то $\alpha(x) \cdot \beta(x)$, $\alpha(x) + f(x)$ — бесконечно большие функции в точке $x = a$.

Например, функция $f(x) = 1/x^2$ — бесконечно большая функция при $x \to 0$, т. к. $\alpha(x) = x^2$ — бесконечно малая в точке $x = 0$. Функция $f(x) = 1/x^2 + \sin x$ — бесконечно большая в точке $x = 0$, как сумма бесконечно большой функции $1/x^2$ и ограниченной $\sin x$.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так, например, функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(x)| > 1/\varepsilon \; \forall x \in X$: $|x| > \delta$.

Например, функция $f(x) = e^x$ — бесконечно большая при $x \to +\infty$.

3.8 O-символика

Бесконечно малые функции часто сравнивают между собой по быстроте стремления к нулю. Так, например, из двух функций $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, бесконечно малых при $x \to 0$, x^2 стремится к нулю «быстрее», чем x.

Уточним, какой смысл вкладывается в слово «быстрее».

Определение 3.9. *Говорят, что $f(x)$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $g(x)$ при $x \to a$ ($a \in \mathbb{R}$, $a = \infty$, $a = \pm\infty$), если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. При этом используют символическое обозначение $f(x) = o(g(x))$ ($f(x)$ есть «о малое» от $g(x)$).*

Например, $\alpha(x) = x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} x^2/x = 0$.

Определение 3.10. *Функция $f(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно функции $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g^k(x)} = A$, $A \neq 0$. В частности, если $k = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка.*

Например, $f(x) = x^2$ — бесконечно малая порядка 2 относительно функции $g(x) = x$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0$.

Аналогичные правила сравнения могут быть введены для бесконечно больших функций.

Определение 3.11. *Функция $f(x)$ называется ограниченной относительно функции $g(x)$ в окрестности точки a, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap V(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$.*

Если $f(x)$ ограничена относительно $g(x)$ в окрестности точки a, то пишут $f = O(g)$ при $x \to a$ (f есть «О большое» от g).

Например, $f(x) = x + \sin x = O(x)$ при $x \to \infty$, т. к. $|x + \sin x| \leqslant |x| + |\sin x| \leqslant 2|x|$ для всех x: $|x| \geqslant 1$.

Замечание. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то по свойству функций, имеющих конечный предел, найдется такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap V(a)$ выполнено неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant c$, т. е. $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$. Таким образом, при выполнении условия $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ справедливо соотношение $f(x) = O(g(x))$ (обратное утверждение вообще говоря неверно).

Определение 3.12. *Говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to a$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to a$.*

Можно показать, что если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ будут иметь одинаковый порядок роста при $x \to a$. Если же $k = 0$, то $g(x)$ имеет более высокий порядок роста при $x \to a$, чем $f(x)$.

Например, функции $f(x) = 3x^2 + 1$ и $g(x) = 2x^2 - 1$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to \infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+1/x^2}{2-1/x^2} = \frac{3}{2} \neq 0$, а функция $g(x) = x^3 + x + 2$ растет при $x \to \infty$ быстрее, чем $f(x) = x^2 + 1$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x+1/x^3}{1+1/x^2+2/x^3} = \frac{0}{1} = 0$.

3.9 Пределы монотонных и сложных функций

Теорема 3.9. *Пусть функция $y = f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Тогда 1) если $f(x)$ ограничена сверху на (a, b), то существует конечный $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, если же $f(x)$ неограничена сверху на (a, b), то $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.*

2) если $f(x)$ ограничена снизу на (a, b), то существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если же $f(x)$ неограничена снизу на (a, b), то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Аналогичная теорема справедлива для функций, не возрастающих на интервале (a, b).

Теорема 3.10. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$. Тогда существует предел сложной функции $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y) = c$.*

Замечание. Теорема о пределе сложной функции дает возможность производить замену переменных при вычислении предела. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$. Введем замену $y = f(x)$, при этом известно, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \sin x^2$.

Решение. Обозначим $y = x^2$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и $\sin y \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x^2 = \lim\limits_{y\to 0} \sin y = 0$.

3.10 Односторонние пределы функции

Определение 3.13. *Левой ε-окрестностью точки a называют интервал $(a-\varepsilon, a)$, правой ε-окрестностью точки a называют интервал $(a, a+\varepsilon)$.*

Очевидно, что $+\infty$ имеет только левую окрестность $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, $-\infty$ имеет только правую окрестность $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Определение 3.14. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется левой (правой) предельной точкой множества X, если в любой левой (правой) окрестности точки a найдется по крайней мере одна точка множества X.*

Определение 3.15. *Величина A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ слева (справа), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех $x \in X \cap (a-\delta, a)$ ($x \in X \cap (a, a+\delta)$) выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Предел справа в точке a обозначается через $f(a+0)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Предел слева в точке a обозначается $f(a-0)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. Если $a = 0$, то используют обозначение $\lim\limits_{x\to \pm 0} f(x)$.

Используя логические символы, определение 3.3 можно записать в виде:

$$A = \lim_{x\to a+0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon)\colon \; |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in X\colon \; 0 < x - a < \delta,$$

$$A = \lim_{x\to a-0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon)\colon \; |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in X\colon \; 0 < a - x < \delta.$$

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.11. *Функция* $f(x)$ *имеет в точке* a *предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *тогда и только тогда, когда существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. *При этом* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$. Тогда, согласно определению 3.3, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta_1$ и неравенству $0 < a - x < \delta_2$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это, согласно определению предела, и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда, согласно определению предела по Коши, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$: $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, данное неравенство будет выполнено как для $0 < x - a < \delta$ так и для $0 < a - x < \delta$. А это, согласно определению односторонних пределов, и означает, что $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$. □

Рассмотрим несколько односторонних пределов элементарных функций.

Пример 5. $f(x) = \frac{1}{x}$. В этом случае $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \frac{1}{-0} = -\infty$.

Пример 6. $f(x) = \ln x$. Здесь $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = -\infty$, $f(-0)$ определить нельзя, так как функция $\ln x$ не определена для $x < 0$.

Пример 7. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. В этом случае $f(+0) = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$, $f(-0) = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$.

3.11 Первый замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат и пусть $0 < x < \pi/2$ (рис. 3.3).

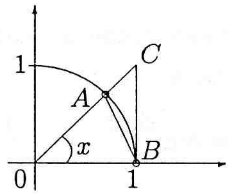


Рис. 3.3.

Очевидно, что

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\triangle OCB}.$$

Так как $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{\text{сект. } OAB} = \frac{1}{2}(OA)^2 x = \frac{1}{2}x$, $S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2}OB \cdot BC = \frac{1}{2}OB \cdot (OB \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, то имеем $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $0 < x < \pi/2$.

Отсюда $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ или

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x.$$

Таким образом,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \quad \text{для всех} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.1}$$

Пусть теперь $x \in (-\pi/2, 0)$, тогда $-x \in (0, \pi/2)$ и для этого угла можно воспользоваться неравенством (3.1). При этом получим $0 < 1 - \frac{\sin(-x)}{-x} < -x$ или

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < -x \quad \text{для всех } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right). \tag{3.2}$$

Объединяя неравенства (3.1) и (3.2), получим

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < |x| \quad \text{для всех} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \neq 0.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Тогда для всех x: $0 < |x| < \delta \leqslant \varepsilon$ будет выполнено неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon \quad \text{или} \quad \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Рассмотрим ряд стандартных пределов, которые являются следствием первого замечательного предела

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{array}{l} x=\sin y\\ x\to 0\iff \sin y\to 0 \text{ или } y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=1.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left|\begin{array}{l} x=\operatorname{tg} y\\ x\to 0\iff \operatorname{tg} y\to 0 \text{ или } y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=1.$$

Используя первый замечательный предел и его следствия, можно вычислять многие другие пределы.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\frac{3}{2}\cdot 2x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}.$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\dfrac{\sin 5x}{5x}}{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{5}{3}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{5}{3}.$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Решение. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{2(x^2/4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=\frac{1}{2}.$$

3.12 Второй замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Как известно, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Пусть $x > 1$. Положим $n = [x]$, тогда $x = n+\alpha$, где n — натуральное число, а α удовлетворяет условию $0 \leqslant \alpha < 1$. Так как $n \leqslant x < n+1$, $1/n+1 < 1/x \leqslant 1/n$, то

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Как нетрудно видеть,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e\cdot 1 = e$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

Отсюда по теореме 3.6 получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть теперь $x < -1$, положим $x = -y$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{-y} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) \to e\cdot 1 = e \quad \text{при} \quad y\to+\infty\ (x\to-\infty).$$

Объединяя оба случая, окончательно получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Если в этом равенстве положить $1/x = y$ ($y \to 0$ при $x\to\infty$), то второй замечательный предел запишется в виде

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.$$

Рассмотрим несколько стандартных пределов, которые являются следствием второго замечательного предела.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} = \log_a \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \log_a e.$

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ при $a = e$.

Замечание. При нахождении данного предела мы использовали непрерывность функции $\log_a y$ в точке $y = e$. Определение непрерывной функции мы дадим в следующей главе.

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left|\begin{array}{ll} a^x-1=y, & x=\log_a(1+y) \\ x\to 0 \implies & y\to 0 \end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} =$$

$$\lim_{y\to 0} = \frac{1}{\dfrac{\log_a(1+y)}{y}} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

$$3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \left|\begin{array}{ll} (1+x)^\alpha-1=y, & \alpha\ln(1+x)=\ln(1+y) \\ x\to 0 \implies & y\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

С помощью второго замечательного предела находят многие другие пределы.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

Решение. Обозначим $x = 3t$, при $x\to\infty$, $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e\cdot e = e^3.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$.

Решение. Выделим у дроби целую часть

$$\frac{2x-3}{2x-1} = \frac{2x-1-2}{2x-1} = 1 - \frac{2}{2x-1}.$$

Обозначим $y = -\dfrac{2}{2x-1}$, при $x \to \infty$, $y \to 0$, причем $x = -\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-4/y+2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-4/y}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^2 =$$
$$= \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right]^{-4}\cdot 1 = e^{-4}.$$

3.13 Эквивалентные функции

Определение 3.16. *Говорят, что $f(x)$ эквивалентна $g(x)$ при $x \to a$ ($f(x) \sim g(x)$), если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 1$.*

Эквивалентность функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ означает, что для всех значений x, достаточно близких к a, значения функций $f(x)$ и $g(x)$ сколь угодно мало отличаются друг от друга.

Используя первый замечательный предел и следствия из него, легко привести примеры эквивалентных функций:

$$\begin{array}{cccc} \sin x \sim x, & \operatorname{tg} x \sim x, & \operatorname{arctg} x \sim x, & \arcsin x \sim x \\ x \to 0 & x \to 0 & x \to 0 & x \to 0 \end{array}$$

Кроме того, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Для приложений особенно важно следующее свойство эквивалентных функций.

Теорема 3.12. *Пусть $f(x)$ эквивалентна $f_1(x)$, $g(x)$ эквивалентна $g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда если существует и конечен хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)g_1(x)$, то существует и конечен другой и они равны между собой.*

Доказательство. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f_1(x)g_1(x) = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f(x)}\frac{g_1(x)}{g(x)} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)g(x) \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f(x)} \times$$

$$\times \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)g(x).$$

□

Таким образом, при вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ можно заменять эквивалентными им.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0/0. Преобразуем числитель и используем эквивалентность функций $\sin x$ и x при $x \to 0$. Получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x \cdot x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Глава 4

Непрерывные функции

4.1 Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и $a \in X$ — предельная точка этого множества. Рассмотрим три эквивалентных определения непрерывности функции.

Определение 4.1. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Определение 4.2 (по Коши). *Говорят, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Определение 4.3 (по Гейне). *Говорят, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$: $x_n \in X$ и $x_n \to a$, последовательность $f(x_n) \to f(a)$.*

Введем еще одно определение непрерывности, используя понятие приращения функции и ее аргумента. Обозначим $\Delta x = x - a$ — приращение аргумента x в точке a, $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ — приращение функции $y = f(x)$ (рис. 4.1). Тогда из определения 4.1 следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$. Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

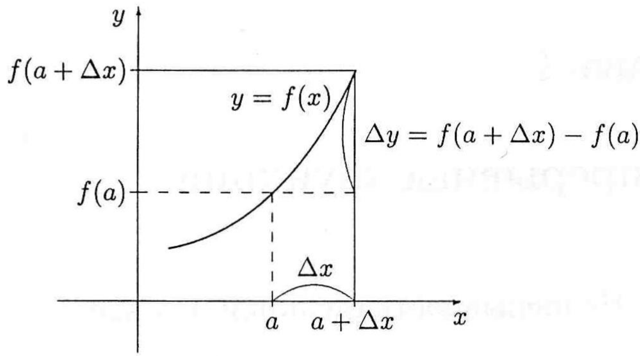


Рис. 4.1.

4.2 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 4.1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$ $(g(a) \neq 0)$ также непрерывны в этой точке.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Докажем, что $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = f(a)/g(a)$.

Согласно теореме 3.4 имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Остальные утверждения доказываются аналогично. □

Теорема 4.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и $f(a) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки $x = a$, что для всех x из этой окрестности, знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(a)$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(a) > 0$. Возьмем $\varepsilon = f(a)/2$. Согласно определению 4.2 найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x: $|x-a|<\delta$ будет выполнено неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Отсюда $f(x)>f(a)-\varepsilon$ или $f(x)>f(a)-f(a)/2>0$ при $|x-a|<\delta$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X и непрерывна в точке $x_0\in X$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y=y_0$, причем $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x=x_0$.*

Доказательство. По условию $f(x)$ — непрерывная функция в точке x_0, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, т. е. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=g(y_0)=g(f(x_0))$.

Применяя теорему о пределе сложной функции, получим: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=g(f(x_0))$. А это и есть определение непрерывности функции $g(f(x))$ в точке x_0. $\square$

Замечание. Из теоремы 4.3 следует, что

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big),$$

т. е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

4.3 Непрерывность некоторых элементарных функций

1) Пусть $f(x)=c$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Покажем, что $f(x)$ — непрерывна в любой точке $a\in\mathbb{R}$.

Действительно, для любого $\varepsilon>0$, найдется такое число $\delta>0$, что для всех x: $|x-a|<\delta$ выполнено неравенство $|f(x)-f(a)|=|c-c|=0<\varepsilon$. Следовательно, согласно определению 4.2, $f(x)$ непрерывна в точке a.

2) Рассмотрим функцию $f(x)=x$. Покажем, что она непрерывна в любой точке $a\in\mathbb{R}$.

Возьмем число $\varepsilon>0$. Тогда найдется такое число $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, что для всех x: $|x-a|<\delta$ будет выполнено неравенство $|f(x)-f(a)|=|x-a|<\delta=\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} x=a$, т. е. $f(x)=x$ непрерывна на всей числовой оси.

3) Покажем, что $f(x) = \cos x$ непрерывна на всей числовой оси. Действительно,

$$\cos x - \cos a = -2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to a}(\cos x - \cos a) = -2\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2} = -2\lim_{x\to a}\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2} = 0$$

(как произведение бесконечно малой $(x-a)$ на ограниченную функцию $\sin\frac{x+a}{2}$). Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$, что и требовалось доказать.

Непрерывность функции $\sin x$ в любой точке x доказывается аналогично.

4) Из теоремы 4.1 следует, что функция $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ непрерывны в каждой точке области их определения.

4.4 Односторонняя непрерывность

Определение 4.4. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной слева (справа) в точке a, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right)$.*

Легко видеть, что $f(x)$ непрерывна слева (справа) в точке $a \iff \forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon\ \forall\, x \in X\colon 0 < a - x < \delta$ $(\forall\, x \in X\colon 0 < x - a < \delta)$.

В силу теоремы 3.11, если $f(x)$ непрерывна в точке a, то она непрерывна слева и справа в этой точке, и наоборот.

Пример 1. Покажем, что $E(x) = [x]$ непрерывна справа при $n \in \mathbb{Z}$, но не является непрерывной слева.

Действительно, $E(x) = n - 1$ для всех x: $n - 1 \leqslant x < n$ и $E(x) = n$ при $n \leqslant x < n + 1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to n+0} E(x) = \lim\limits_{x\to n+0} n = n = E(n)$ и $\lim\limits_{x\to n-0}(n-1) = n - 1 \neq E(n)$, т. е. $E(x)$ — непрерывна справа, но не является непрерывной слева в целочисленных точках.

4.5 Классификация точек разрыва

Определение 4.5. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$, либо если функция $f(x)$ не определена в самой точке a, либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.*

Различают три типа точек разрыва: устранимый разрыв, разрыв 1-го и 2-го рода.

Определение 4.6. *Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$.*

К точкам устранимого разрыва также относят те точки, в которых функция не определена, но конечный предел функции в этих точках существует.

Если функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке a, то ее легко можно сделать непрерывной (доопределить по непрерывности), если положить $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 2. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ определена всюду, кроме точки $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $x = 0$ — точка устранимого разрыва. Непрерывную функцию можно получить, если рассмотреть вместо $y(x)$ следующую функцию

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Определение 4.7. *Точка a называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют конечные левый и правый пределы в этой точке, но $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.*

Точку a также называют точкой конечного скачка функции $f(x)$, величина которого равна $f(a+0) - f(a-0)$.

Пример 3. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} x \text{ («знак } x\text{»)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображен на рис. 4.2.

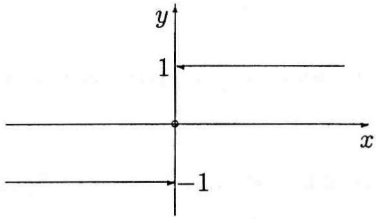


Рис. 4.2.

Очевидно, что $f(x)$ непрерывна всюду кроме точки $x = 0$. В этой точке $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -1$. Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва первого рода, скачок функции в этой точке равен 2.

Определение 4.8. *Точка a называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm0} f(x)$ не существует или равен ∞.*

4.6 Принцип стягивающихся сегментов Кантора

Определение 4.9. *Пусть дана последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ таких, что $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$. Такая система отрезков называется системой вложенных отрезков (сегментов) (рис. 4.3).*

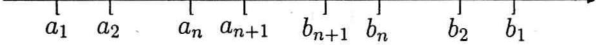


Рис. 4.3.

Теорема 4.4 (Принцип Кантора). *Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — последовательность вложенных сегментов таких, что длина $[a_n, b_n] = b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует единственная точка $c \in [a_n, b_n]$ для всех n.*

Доказательство. Из определения 4.9 следует, что левые концы отрезков образуют неубывающую последовательность

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots,$$

а правые концы — невозрастающую последовательность

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots.$$

При этом последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{b_n\}$ ограничена снизу, так как $a_n \leqslant b_1$, а $b_n \geqslant a_1$ для любого n. Следовательно, существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. При этом $a_n \leqslant a$, а $b_n \geqslant b$ для всех n, так как в силу той же теоремы $a = \sup\{a_n\}$, $b = \inf\{b_n\}$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b - a = 0$ следует, что $a = b$, т. е. последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел. Обозначая этот предел буквой c, получаем, что для любого n справедливы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, т. е. точка $c \in [a_n, b_n]$ для всех n.

Докажем теперь, что такая точка только одна. Допустим, что существуют две точки $c_1, c \in [a_n, b_n]$ для всех n. Тогда для любого n выполнено неравенство $0 \leqslant |c - c_1| \leqslant b_n - a_n$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получаем $0 \leqslant |c - c_1| \leqslant 0$, т. е. $c = c_1$. □

Замечание. В условиях теоремы точка c, которая принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$, может быть получена так:

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Замечание. В условиях теоремы отрезки нельзя заменить на интервалы. Действительно, рассмотрим последовательность интервалов $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что $(0,1) \supset \left(0, \frac{1}{2}\right) \supset \cdots \supset \left(0, \frac{1}{n}\right) \supset \ldots$ и длина $\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Если предположить, что существует точка $c \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, то для всех n будет выполнено неравенство $0 < c < \frac{1}{n}$. Отсюда следует, что $c = 0 \notin \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Таким образом, последовательность интервалов $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ не имеет общей точки.

Пример 4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена всюду, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти точки будут точками разрыва 2-го рода для $f(x) = \operatorname{tg} x$, т. к. $\lim\limits_{x\to(\pi/2+\pi n)-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

4.7 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 4.10. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.*

Теорема 4.5 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Предварительно сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 4.1. *Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности.*

Доказательство леммы непосредственно следует из ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Доказательство теоремы. Предположим обратное, т. е. допустим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, тогда, по крайней мере, на одном из двух полученных отрезков функция $f(x)$ не ограничена (в противном случае она была бы ограничена на $[a, b]$). Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот отрезок, на котором функция $f(x)$ не ограничена и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

вложенных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ не ограничена, причем $b_n - a_n = (b - a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Согласно принципу стягивающихся отрезков Кантора существует точка c, принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$ непрерывна в точке c, следовательно, согласно лемме в некоторой окрестности точки c она ограничена. В эту окрестность, при достаточно большом n, попадает отрезок $[a_n, b_n]$, на котором функция $f(x)$ также ограничена. Последнее противоречит выбору последовательности отрезков. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом (a, b). Так, например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на $(0, 1)$, но не ограничена, т. к. $\lim\limits_{x\to+0} 1/x = +\infty$.

Ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ означает, что существуют такие числа $A, B \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $A \leqslant f(x) \leqslant B$. Тогда, в силу принципов точной верхней и нижней границы, множество значений функции на отрезке $[a, b]$ имеет точные верхнюю и нижнюю границы: $\sup f(x) = M \in \mathbb{R}$, $\inf f(x) = m \in \mathbb{R}$.

Определение 4.11. *Говорят, что функция $f(x)$ достигает точной верхней границы на отрезке $[a, b]$, если существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_0)$. Говорят, что $f(x)$ достигает точной нижней границы на $[a, b]$, если существует точка $x_1 \in [a, b]$ такая, что $\inf\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_1)$.*

Рассмотрим пример, который показывает, что точные границы функции не всегда достигаются.

Пример 5. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 1/2, & x = 0, 1 \end{cases}$.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 4.4.

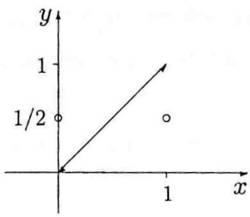


Рис. 4.4.

Очевидно, что $\sup\limits_{[0,1]} f(x) = 1$, $\inf\limits_{[0,1]} f(x) = 0$. При этом $f(x) \neq 0, 1$ для всех $x \in [0, 1]$, т. е. не достигает на отрезке $[0, 1]$ своих точных верхней и нижней границ.

Теорема 4.6 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных* *верхней и нижней границ, т. е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что*

$$f(x_1) = M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad f(x-2) = m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Покажем, что функция $f(x)$ достигает точной верхней границы M, т. е. существует такая точка $x_1 \in [a,b]$, что $f(x_1) = M$. Будем рассуждать от противного. Пусть функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a,b]$ значения, равного M. Тогда для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$.

Рассмотрим на $[a,b]$ вспомогательную, всюду положительную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

По теореме 4.1 функция $F(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. В этом случае согласно теореме 4.4 функция $F(x)$ ограничена, т. е. найдется положительное число μ такое, что для всех $x \in [a,b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu, \quad \text{откуда} \quad f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}.$$

Таким образом, число $M - 1/\mu$, меньшее M, является верхней границей $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Но это противоречит тому, что число M является точной верхней, т. е. наименьшей верхней границей $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Это противоречие и доказывает, что существует точка $x_1 \in [a,b]$, в которой $f(x_1) = M$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на $[a,b]$ своей точной нижней границы m. □

Замечание. Точную верхнюю границу M называют максимальным значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а точную нижнюю границу m — ее минимальным значением.

Теорема 4.7 (теорема Коши о промежуточном значении). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любой точки C, лежащей между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $\gamma \in (a,b)$, что $f(\gamma) = C$.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ и $f(a) < C < f(b)$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой α пополам. Если $f(\alpha) = C$, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух полученных отрезков (и обозначим его $[a_1, b_1]$), для которой $f(a_1) < C < f(b_1)$. Очевидно, что отрезок $[a_1, b_1]$ совпадает с отрезком $[a, \alpha]$, если $C < f(\alpha)$ и с отрезком $[\alpha, b]$, если $C > f(\alpha)$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ точкой α_1 пополам. Если $f(\alpha_1) = C$, то задача решена. В противном случае из отрезков $[a_1, \alpha_1]$ и $[\alpha_1, b_1]$ возьмем тот (и обозначим его $[a_2, b_2]$), для которого $f(a_2) < C < f(b_2)$. Поступая так и дальше, мы либо на каком-то этапе найдем точку α_k: $f(\alpha_k) = C$ и прекратим процесс, либо построим бесконечную последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$

3) $f(a_n) < C < f(b_n)$ для всех n.

Из условий 1) и 2) в силу принципа Кантора следует, что существует точка $\gamma \in [a_n, b_n]$ для всех n. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \gamma$. Так как $f(x)$ непрерывна в точке γ, то согласно определению 4.3 $f(a_n) \to f(\gamma)$, $f(b_n) \to f(\gamma)$. Переходя к пределу в неравенстве 3), получаем $f(\gamma) = C$. $\square$

Замечание. Доказанная теорема гарантирует, что непрерывная функция при переходе от одного значения к другому принимает и все промежуточные значения.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда существует точка $\gamma \in (a, b)$: $f(\gamma) = 0$.*

Данное следствие имеет простой геометрический смысл: непрерывная кривая при переходе из одной полуплоскости, границей которой является ось абсцисс, в другую пересекает эту ось (рис. 4.5).

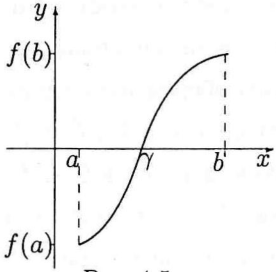


Рис. 4.5.

Теорема 4.8 (о непрерывности обратной функции). *Пусть $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$) определена строго монотонная и непрерывная обратная функция $x = f^{-1}(y)$.*

Пример 6. Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, непрерывна и множеством ее значений является отрезок $[-1, 1]$. По теореме 4.8 на отрезке $[-1, 1]$ существует непрерывная возрастающая обратная функция с множеством значений $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Эту функцию обозначают $x = \arcsin y$ или $y = \arcsin x$. График функции $y = \arcsin x$ приведен на рис. 4.6.

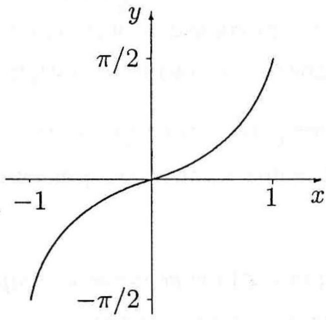


Рис. 4.6.

Глава 5

Производная

5.1 Определение производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть X — область определения этой функции и $x \in X$. Зададим произвольное Δx так, чтобы $x + \Delta x \in X$. Вычислим полное приращение функции, соответствующее заданному приращению Δx, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим дробь $\Delta y/\Delta x$. Очевидно, что при фиксированном x эта дробь является функцией приращения Δx, определенной для $\Delta x \neq 0$. Так как $\Delta x = 0$ является предельной точкой области определения дроби $\Delta y/\Delta x$, то можно говорить о пределе этой дроби при $\Delta x \to 0$.

Определение 5.1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$, *если он существует, называют производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x *и обозначают* $y'(x)$ $(f'(x))$.

Итак, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Выясним геометрический смысл производной. Как видно из рис. 5.1 отношение $\Delta y/\Delta x$ есть отношение длины отрезка MN к длине отрезка M_0N, а отношение $|MN|/|M_0N|$ есть тангенс угла наклона секущей M_0M к положительному направлению оси абсцисс.

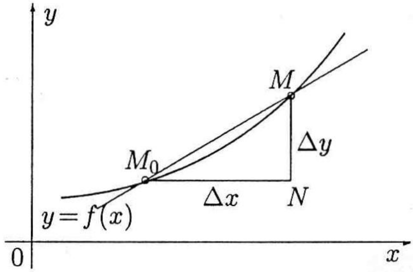


Рис. 5.1.

Предельное положение хорды M_0M при $\Delta x \to 0$ (при этом точка M, перемещаясь по кривой, будет стремиться к точке M_0) назовем *касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* M_0. При этом угол наклона хорды будет стремиться к углу α наклона касательной к кривой в точке M_0. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Производная функции $y = f(x)$ в точке «x» равна тангенсу угла наклона к положительному направлению оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x.

Остановимся еще на механическом смысле производной. Пусть функция $s(t)$ определяет путь, пройденный частицей за время t. Тогда средняя скорость движения частицы за время Δt будет равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

а предел отношения $\Delta s / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t ($v_{\text{мгн}}$). Итак,

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{мгн}}.$$

Теорема 5.1 (связь между непрерывностью и существованием производной). *Если $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Дано, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

тогда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Отсюда следует, что

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x(f'(x_0)+\alpha(\Delta x)).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0).$$

Последнее равенство и означает непрерывность функции в точке x_0. □

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря не имеет места, то есть из непрерывности функции в некоторой точке существование производной в этой точке следует не всегда.

Рассмотрим, например, функцию $y=|x|$, изображенную на рис. 5.2.

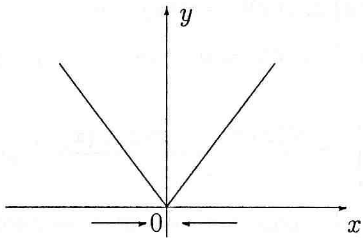


Рис. 5.2.

Очевидно, что данная функция является непрерывной в точке $x_0=0$. Покажем, что в этой точке производной не существует. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}+1, & \Delta x\to 0,\ \Delta x>0\\ -1, & \Delta x\to 0,\ \Delta x<0.\end{cases}$$

Итак, очевидно, что пределе в точке $x_0=0$ (а с ним и производная) не существует.

Отметим, что в этом и подобных случаях можно говорить об односторонних производных

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_+(x)\text{ — правая производная,}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(x) \text{ — левая производная.}$$

Если функция $f(x)$ в точке x имеет производную, то она имеет в этой точке правую и левую производную, совпадающие между собой. В приведенном выше примере $f'_+(0) = +1$; $f'_-(0) = -1$, а производной в этой точке не существует. Геометрически это означает, что график функции $y = |x|$ в точке $(0,0)$ не имеет касательной.

5.2 Основные правила нахождения производной

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда

$$1) \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$

$$2) \quad [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$3) \quad \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

Докажем 2-е правило. По определению производной находим

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) - u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)\Delta v + v(x)\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left[u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] = \\
&= u(x)v'(x) + v(x)u'(x).
\end{aligned}$$

(Здесь мы использовали, что $u(x)$ по теореме 5.1 непрерывна в точке x).

5.3 Основные формулы вычисления производных

Эти формулы легко выводятся из определения производной с использованием следующих правил

1) $y = c$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

2) $y = x^\mu$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu - 1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu - 1}, \quad \mu \in R.$$

3) $y = a^x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

4) $y = \log_a x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

5) $y = \sin x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

6) $y = \cos x$;

$$y' = -\sin x.$$

7) $y = \operatorname{tg} x$;

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

8) $y = \operatorname{ctg} x$;

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n.$$

Теорема 5.2 (производная обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Пусть, кроме того, существует производная $f'(x_0)$ в этой точке, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = \varphi(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем выполняется равенство*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Пусть $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ — та окрестность точки x_0, в которой выполняются все условия данной теоремы. Существование и непрерывность обратной функции в некоторой окрестности точки y_0 следует из доказанной ранее теоремы 4.6. Зададим аргументу «y» функции $\varphi(y)$ некоторое приращение $\Delta y \neq 0$, при этом сама функция $x = \varphi(y)$ получит приращение $\Delta x \neq 0$ (в силу строгой монотонности обратной функции), причем утверждения $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ эквивалентны, что следует из непрерывности данной и обратной функций. Поэтому

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана. □

Воспользовавшись этой простой теоремой, мы продолжим таблицу производных

9) $y = \arcsin x, \quad x \in [-1; 1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \sin y$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10) $y = \arccos x$;

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

11) $y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad x = \operatorname{tg} y,$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

12) $y = \operatorname{arcctg} x;$

$$y' = -\frac{1}{1 + x^2}; \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad y \in [0; \pi].$$

Теорема 5.3 (о дифференцируемости сложной функции). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, где $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f[\varphi(t)] = \Phi(t)$ также имеет производную в точке t_0, причем выполняется равенство*

$$\Phi'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

Доказательство. Зададим некоторое приращение Δt в точке t_0. Ему будет соответствовать приращение Δx: $\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi(t_0 + \Delta t) - x_0$. Отсюда $\varphi(t_0 + \Delta t) = x_0 + \Delta x$. Вычислим производную функции $\Phi(t)$ в точке t_0. Имеем

$$\Phi'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f[\varphi(t_0 + \Delta t)] - f[\varphi(t_0)]}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

Теорема доказана. □

5.4 Дифференциал

Определение 5.2. *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{5.1}$$

где A — некоторая постоянная, не зависящая от Δx, $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Пример 7. Пусть $y = x^3$, $x_0 = -1$. Тогда

$$\Delta y = (-1+\Delta x)^3 - (-1)^3 = -1 + 3\cdot 1\cdot \Delta x - 3\Delta x^2 - \Delta x^3 + 1 =$$
$$= 3\Delta x - 3\Delta x^2 - \Delta x^3 = 3\Delta x + \Delta x(-3\Delta x - \Delta x^2)$$

$$\Longrightarrow \quad A = 3; \quad \alpha(\Delta x) = -3\Delta x - \Delta x^2.$$

Итак, функция $y = x^3$ дифференцируема в точке $x_0 = -1$. Заметим, что $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = 0$, и, следовательно, равенство (7.3) можно записать так

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x). \tag{5.2}$$

Определение 5.3. *Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее полное приращение можно записать в виде (7.4).*

Условие (7.4) можно записать, как $\Delta y = A\Delta x + o(A\Delta x)$, откуда следует, что бесконечно малая $(A\Delta x)$ есть главная часть бесконечно малого Δy при $\Delta x \to 0$. Кроме того, заметим, что эта главная часть линейна относительно Δx.

Определение 5.4. *Главная часть полного приращения Δy функции $y = f(x)$, линейная относительно Δx, называется дифференциалом функции и обозначается dy.*

Итак, по определению $dy = A\Delta x$.

Установим связь между дифференцируемостью и существованием производной в этой точке.

Теорема 5.4. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела производную.*

Доказательство. Необходимость. Дано: функция дифференцируема, то есть имеет место равенство (7.3). Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = A,$$

что означает существование производной $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Дано: существует производная, то есть существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отсюда $\Delta y / \Delta x - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, а это есть условие дифференцируемости (7.3), что и требовалось. □

С использованием этой теоремы условие дифференцируемости (7.3)–(7.4) запишем так:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{5.3}$$

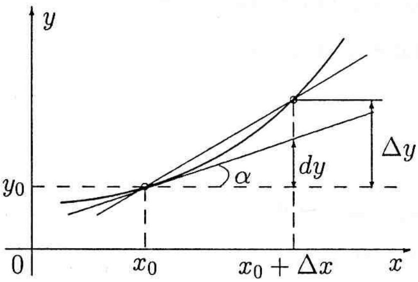
$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \tag{5.4}$$

а дифференциал так:

$$dy = f'(x_0)\, dx, \tag{5.5}$$

где $dx = \Delta x$. Итак, дифференциал функции это произведение ее производной на Δx.

Геометрический смысл дифференциала виден из следующего рисунка



Δy — приращение ординаты кривой;

dy — приращение ординаты касательной.

Рис. 5.3.

Из теоремы 5.1, 5.4 следует, что если функция дифференцируема, то она непрерывна.

5.5 Инвариантность формы дифференциала

Итак, для функции $y = f(x)$, где x — независимая переменная, введено понятие дифференциала с помощью равенства (7.5). Рассмотрим теперь случай, когда $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$ — также функция. Составим сложную функцию $y = f[\varphi(t)]$. Так как t — независимая переменная, то согласно равенству (7.5) с учетом теоремы 5.3 имеем

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}'_t\, dt = f'(x) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = f'(x)\, dx.$$

Последнее говорит о том, что равенство (7.5) имеет место как в случае, когда x — независимая переменная, так и в случае, когда x функция нового аргумента. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы*, но в первом случае (когда x — независимая переменная) dx — это число, равное Δx; во-втором случае (когда x — функция нового аргумента) dx — также функция того же аргумента. Отсюда получаем, что $y' = f'(x) = dy/dx$ можно рассматривать не только как единый символ, но и как дробь — отношение дифференциалов.

Понятие дифференциала находит широкое применение в приближенных вычислениях (см. [6])

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \quad \Longrightarrow$$
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Пример 8. 1) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$

$$\sin \Delta x \approx \Delta x, \quad \Delta x \to 0,$$
$$\sin \Delta x = \Delta x + o(\Delta x).$$

2) $f(x) = \ln(1 + x), \quad x_0 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x, \quad \Delta x \to 0.$$

3) $f(x) = (1 + x)^\alpha, \quad x_0 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha \Delta x, \quad \Delta x \to 0.$$

Основные формулы и правила нахождения дифференциалов вытекают из равенства $dy = y'dx$, свойства инвариантности формы, формул и правил нахождения производных.

Основные правила записываются так:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(u \cdot v) = vdu + udv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Приведем доказательство формулы $d(u \pm v) = du \pm dv$. Имеем

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv.$$

5.6 Производная высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и ее производную $f'(x)$. Очевидно, что производная также является функцией переменного x. Предположим, что она в свою очередь имеет производную, то есть существует $[f'(x)]'$. Определим теперь производную второго порядка от исходной функции $y = f(x)$ следующим образом: $y'' = [f'(x)]'$. Аналогично $y''' = [f'']' = [y'']'$ и так далее.

Итак,

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'.$$

Рассмотрим простейшие примеры, строгий вывод которых основан на знании таблицы производных и методе математической индукции.

1. $y(x) = x^\alpha, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad \ldots,$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

2. $y(x) = a^x, \quad y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x \ln^2 a, \quad \ldots,$

$$y^{(n)} = a^x[\ln a]^n.$$

3. $y(x) = \ln x, \quad y' = \dfrac{1}{x}, \quad y'' = -\dfrac{1}{x^2}, \quad y''' = \dfrac{(-1)(-2)}{x^3} = \dfrac{(-1)^2\cdot 2!}{x^3}, \quad \ldots,$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

4. $y(x) = \sin x, \quad y' = \cos x = \sin\left(x + 1 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right),$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \ldots,$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5. $y(x) = \cos x,$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

5.7 Формула Лейбница

Очевидно, что

$$[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x).$$

Предположим теперь, что требуется найти производную порядка n от произведения функций $u(x) \cdot v(x)$. Справедлива следующая формула

$$[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x)v(x) + C_n^1 u^{(n-1)}(x)v'(x) + \ldots + \\ + C_n^{n-1}u'(x)v^{(n-1)}(x) + u(x)v^{(n)}(x), \quad (5.6)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Эту формулу принято называть формулой Лейбница. Она известна нам, если $n = 1$:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Доказательство. Воспользуемся методом полной математической индукции. Формула Лейбница верна при $n = 1$. Предположим, что она верна для числа n и покажем, что отсюда будет следовать справедливость этой формулы для числа $n + 1$. Тогда

$$[u(x)v(x)]^{(n+1)} = [(u(x)v(x))^{(n)}]' = u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + C_n^1 u^{(n)}v' + \\ + C_n^1 u^{(n-1)}v'' + C_n^2 u^{(n-1)}v'' + C_n^2 u^{(n-2)}v''' + \ldots + C_n^{n-1}v^{(n-1)}u'' + \\ + C_n^{n-1}u'v^{(n)} + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (1 + C_n^1)u^{(n)}v' + \\ + (C_n^1 + C_n^2)u^{(n-1)}v'' + \ldots + (C_n^{n-1} + 1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)} = \\ = u^{(n+1)}(x)v(x) + C_{n+1}^1 u^{(n)}(x)v'(x) + C_{n+1}^2 u^{(n-1)}(x)v''(x) + \ldots + \\ + C_{n+1}^n u'(x)v^{(n)}(x) + u(x)v^{(n+1)}(x),$$

что и требовалось. $\square$

(Здесь было использовано равенство $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Докажите его самостоятельно).

5.8 Производные функции, заданной параметрически

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{5.7}$$

определены и непрерывны на множестве T и пусть, кроме того, $\varphi(t)$ строго монотонна на этом множестве. Тогда обратная функция $t = \Phi^{-1}(x)$ также непрерывна и строго монотонна. В этом случае говорят, что y есть функция, зависящая от x посредством переменной t, называемой *параметром*: $y = \psi[\Phi^{-1}(x)]$ и эту функцию называют функцией, заданной параметрически с помощью уравнений (7.7). Вычислим производную этой функции, для чего предположим, что $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$ на T. Имеем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

$$y''_{x^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dx} = \frac{\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]' dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Итак, чтобы найти вторую производную нужно первую производную y'_x продифференцировать еще раз по t и поделить на $x'(t)$ (в этом случае предполагаем, что производные φ'', ψ'' существуют).

5.9 Дифференциалы высших порядков

Используя равенство (7.3) имеем $dy = y'dx$. Предположим, что dy в свою очередь есть некоторая дифференцируемая функция переменного x; тогда можно найти дифференциал второго порядка от исходной функции y:

$d^2y = d[dy]$ аналогично

$d^3y = d[d^2y]$ и так далее

$d^ny = d[d^{n-1}y]$.

Напомним, что для дифференциала первого порядка имело свойство инвариантности его формы, которое состояло в том, что равенство (7.5) остается справедливым как в том случае, когда x — независимая переменная, так и в том случае, когда x — некоторая функция другого аргумента.

Покажем, что свойство инвариантности нарушается для дифференциалов высших порядков.

1. Пусть x — независимая переменная, найдем

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dx \cdot d(y') = dx(y')'dx = y''dx^2,$$

так как dx — число;

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = dx^2 d(y'') = dx^2 y''' dx = y''' dx^3, \ \dots ,$$

$$d^ny = y^{(n)}\, dx^n.$$

2. Рассмотрим случай, когда x — некоторая функция другого аргумента. Найдем

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y'dx) = d(y')\,dx + y'd(dx) = y''dx^2 + y'd^2x; \\ d^3y &= d(d^2y) = d(y''dx^2 + y'd^2x) = d(y'')\,dx^2 + y''d(dx^2) + y'd(d^2x) + \\ &\quad + d(y')\,d^2x = y'''dx^3 + y''2dxd^2x + y''dxd^2x + y'd^3x. \end{aligned}$$

Итак, инвариантность нарушается.

5.10 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

Определение 5.5. *Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке $x = x_0$, если найдется такая окрестность этой точки, в пределах* *которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ ($f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$).*

Лемма 5.1. *Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке $x = x_0$ и $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в этой точке.*

Доказательство. По определению производной имеем

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть $f'(x_0) > 0$. Выберем $\varepsilon < f'(x_0)$, тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) - \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Отсюда следует, что всюду в δ-окрестности точки $x = x_0$ $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$, что и означает возрастание функции в точке $x = x_0$. □

Замечание. Лемма носит достаточный характер. Например, функция $y = x^3$ возрастает в точке $x = 0$, в то время как $y'(0) = 0$.

Теорема 5.5 (теорема Ферма). *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x = x_0$ этого интервала имеет наибольшее (наименьшее) значение. Тогда, если в этой точке существует конечная производная, то имеет место равенство $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть в точке $x = x_0$ функция принимает наибольшее значение и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда по лемме, если $f'(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и достаточно близко к $x = x_0$, если $f'(x_0) < 0$, то $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$ и достаточно близко к $x = x_0$ и в том и другом случае $f(x_0)$ не может быть наибольшим значением функции в точке x_0, что противоречит условию теоремы. Условие $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке $(x_0, f(x_0))$ касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox. □

Замечание. Теорема не верна, если $f(x)$ рассматривается на $[a,b]$. Пусть $f(x)=x$ задана на $[0,1]$. Наименьшее значение она принимает в точке $x=0$, наибольшее — в точке $x=1$; тем не менее в обеих точках производная отлична от нуля.

Теорема 5.6 (теорема Ролля). *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и пусть $f(a)=f(b)$. Тогда найдется такая точка $\gamma\in(a,b)$, что $f'(\gamma)=0$.*

Доказательство. Так как $y=f(x)$ — непрерывна на сегменте $[a,b]$, то в силу второй теоремы Вейерштрасса она достигает на этом сегменте своих точных границ: M, m.

Может случиться, что: 1) $M=m$, следовательно, $f(x)=\mathrm{const}$, значит, $y'=0$ для любого $x\in[a,b]$. 2) $M\neq m$; так как $f(a)=f(b)$, то по крайней мере одна из границ достигается во внутренней точке $\gamma\in(a,b)$, но тогда в силу теоремы Ферма $f'(\gamma)=0$.

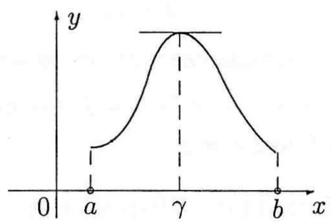


Рис. 5.4.

Как и в теореме Ферма $f'(\gamma)=0$ означает, что в точке $(\gamma, f(\gamma))$ касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна оси Ox. □

Теорема 5.7 (теорема Лагранжа). *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b). Тогда $\exists\,\gamma\in(a,b)$, что будет выполняться*

$$f(b)-f(a)=f'(\gamma)(b-a).$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x)=f(x)+\lambda x$. Число λ подберем таким образом, чтобы выполнялось равенство $F(a)=F(b)$; $f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b$, отсюда $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$.

Выясним свойства функции $F(x)$:

1. она, очевидно, непрерывна на сегменте $[a,b]$ (как сумма непрерывных функций);

2. она дифференцируема на интервале (a, b) (потому же);

3. $F(a) = F(b)$ по построению.

Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и следовательно, в силу этой теоремы найдется такая точка $\gamma \in (a, b)$: $F'(\gamma) = 0$;

$$F'(x) = f'(x) + \lambda; \quad F'(\gamma) = f'(\gamma) + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\gamma) \quad \Longrightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a),$$

что и требовалось доказать. Последнее равенство называют *формулой конечных приращений Лагранжа.* □

Формула Лагранжа имеет простой геометрический смысл: Найдется такая точка $\gamma \in (a, b)$, что касательная к графику функции в соответствующей точке параллельна секущей AB.

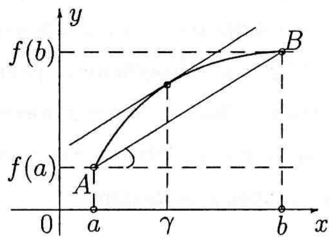


Рис. 5.5.

Придадим формуле Лагранжа иную форму. Выберем $x_0 \in (a, b)$ и зададим приращение Δx, так чтобы $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Тогда на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$ выполнены все условия предыдущей теоремы и, следовательно, имеет место равенство:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\gamma)\Delta x.$$

Так как $\gamma \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, то $\exists\, \theta$ $(0 < \theta < 1)$: $\gamma = x_0 + \theta(x - x_0) = x_0 + \theta\Delta x$

и тогда формула Лагранжа запишется в виде

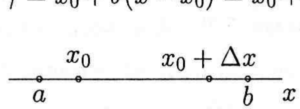


Рис. 5.6.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x \quad \text{или}$$
$$\Delta y = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x.$$

Рассмотрим приложения формулы Лагранжа.

A) Теорема 5.8 (о постоянной функции, имеющей на интервале равную нулю производную). *Если $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и всюду на этом интервале $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ является постоянной на интервале (a, b).*

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка интервала (a, b), x — любая точка этого интервала. Сегмент $[x_0, x] \subset (a, b)$. Определим свойства функции $f(x)$ на сегменте $[x_0, x]$: данная функция дифференцируема и непрерывна всюду на сегменте $[x_0, x]$, следовательно применим к функции $y = f(x)$ теорему Лагранжа на сегменте $[x_0, x]$. По данной теореме внутри $[x_0, x]$ найдется точка ξ такая, что: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. Но по условию теоремы $f'(x) = 0$ всюду на (a, b), следовательно $f'(\xi) = 0$, значит, $f(x) = f(x_0)$. Полученное равенство утверждает, что значение функции $y = f(x)$ в любой точке x интервала (a, b) равно ее значению в фиксированной точке x_0. Это и означает, что $f(x)$ постоянно всюду на интервале (a, b). Теорема доказана. $\square$

Геометрический смысл теоремы: если касательная в каждой точке некоторого участка кривой $y = f(x)$ параллельна оси Ox, то указанный участок кривой $y = f(x)$ представляет собой отрезок прямой, параллельный оси Ox.

B) Условия монотонности функции на интервале.

В качестве второго следствия формулы Лагранжа рассмотрим вопрос об условиях, обеспечивающих неубывание (невозрастание) функции на данном интервале.

Теорема 5.9. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале (a, b), не убывала (не возрастала) на нем, необходимо и достаточно чтобы производная этой функции была неотрицательной (неположительной) всюду на этом интервале.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ всюду на интервале (a,b). Требуется доказать, что $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a,b). Пусть x_1, x_2 — любые две точки интервала (a,b), удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Функция $y = f(x)$ дифференцируема и непрерывна всюду на сегменте $[x_1, x_2]$. Применим к функции $y = f(x)$ на сегменте $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(\gamma)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \gamma < x_2$. По условию $f'(\gamma) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому правая часть неотрицательна (неположительна), что и доказывает неубывание (невозрастание) $f(x)$ на интервале (a,b).

Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и не убывает (не возрастает) на этом интервале. Требуется доказать, что $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ всюду на этом интервале.

Так как $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале (a,b), то эта функция не может убывать (возрастать) ни в одной точке интервала. Следовательно, в силу леммы о возрастании (убывании) функции, производная функции $f(x)$ ни в одной точке интервала не может быть отрицательной (положительной). □

Теорема 5.10. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) на интервале (a,b) достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительной (отрицательной) всюду на этом интервале.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.9 пусть $x_1, x_2 \in (a,b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим для функции $y = f(x)$ на сегменте $[x_1, x_2]$ формулу Лагранжа , получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(\gamma)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \gamma < x_2$. Так как по условию $f'(\gamma) > 0$ (< 0), то левая часть данного равенства положительна (отрицательна), что и доказывает возрастание (убывание) функции $y = f(x)$ на интервале (a,b). □

Замечание. Отметим, что положительность (отрицательность) производной $f'(x)$ на интервале (a,b) не является необходимым условием возрастания (убывания) функции на интервале (a,b). Например, функция $y = x^3$ возрастает на $(-1,1)$, но $f'(x) = 0$ при $x = 0$.

Легко показать, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале

(a, b), если производная этой функции $f'(x)$ положительна (отрицательна) всюду на интервале, за исключением конечного числа точек, в которых эта производная равна нулю.

Теорема 5.11 (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и пусть $g'(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$. Тогда найдется $\gamma \in (a, b)$ такое, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

(без доказательства).

Заметим, что формула Лагранжа есть частный случай этой теоремы. Действительно, пусть $g(x) = x$, тогда $g'(x) = 1 \neq 0$ и следовательно

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\gamma).$$

Теорема 5.12 (правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = x_0$, кроме быть может самой точки, причем $g'(x) \neq 0$ для любого x из этой окрестности. Пусть, кроме того,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0. \tag{5.8}$$

Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то существует также и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены в точке x_0, то доопределим их в этой точке, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда в силу равенства (8.17) отсюда будет следовать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \to x_0$, начиная с какого-то номера члены этой последовательности попадают в окрестность, фигурирующую в условии теоремы. Рассмотрим сегмент $[x_0, x_n]$, где x_n — один из таких членов последовательности. И применим к этому сегменту теорему Коши. Все условия выполняются:

1) $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $[x_0, x_n]$ (непрерывность на $(x_0, x_n]$ следует из дифференцируемости; непрерывность в точке x_0 следует из способа определения этих функций в точке x_0);

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (x_0, x_n);

3) $g'(x) \neq 0$ для любого x из этой окрестности.

Итак, пользуемся теоремой Коши

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\gamma_n)}{g'(\gamma_n)}; \quad \gamma_n \in (x_0, x_n).$$

Поэтому

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\gamma_n)}{g'(\gamma_n)}. \tag{5.9}$$

Устремим теперь $\{x_n\} \to x_0$, тогда и подавно $\{\gamma_n\} \to x_0$, так как по условию теоремы функция $f'(x)/g'(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то в силу определения по Гейне последовательность $\left\{\frac{f'(\gamma_n)}{g'(\gamma_n)}\right\}$ также имеет предел при $n \to \infty$ равный K. Но тогда в силу равенства (8.18) последовательность $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\} \to K$, а так как $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к x_0, то отсюда в силу определения предела функции по Гейне будет следовать, что функция $f(x)/g(x) \to K$ при $x \to x_0$. □

Замечание. Очевидно, что теорема 5.12 дает возможность раскрывать неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Если $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ по прежнему есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы, то правилом Лопиталя можно воспользоваться повторно.

Теорема 5.13. *Она формулируется так же как теорема 5.12 только условие (8.17) запишется* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Эта теорема позволяет раскрывать неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Замечание. Для раскрытия других неопределенностей с помощью правил Лопиталя их нужно предварительно преобразовать к одному из двух рассмотренных видов.

Пример. 1) $0\cdot\infty$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)}$, $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0 \Longrightarrow \frac{0}{0}$.

2) 1^∞. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

Формула Тейлора. Известно, что если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$, тогда имеет место равенство:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o[(x-x_0)]$, $x=x_0+\Delta x$. Обозначим

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \tag{5.10}$$

Многочлен $P_1(x)$ обладает свойствами: 1. $P_1(x_0)=f(x_0)$; 2. $P_1'(x_0)=f'(x_0)$.

Предположим теперь, что функция $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет производные порядка n (где $n\in\mathbb{N}$) и попытаемся представить функцию в виде суммы двух слагаемых того же класса, что и в (7.9)

$$f(x) = P_n(x) + o[(x-x_0)^n],$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, расположен по степеням разности $(x-x_0)$, то есть $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$ и обладает следующими свойствами:

$$1)\ P_n(x_0)=f(x_0);\quad 2)\ P_n'(x_0)=f'(x_0);\quad \ldots;\quad n+1)\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

Используя равенство $P_n(x_0)=f(x_0)$, легко определим константу a_0:

$$a_0 = f(x_0),$$

так как $P_n'(x_0)=f'(x_0)$ и $P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots$, то

$$a_1 = f'(x_0).$$

Аналогично $P_n''(x_0)=f''(x_0)$ и

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + 4\cdot 3a_4(x-x_0)^2 + \ldots,$$

то $2a_2 = f''(x_0) \Longrightarrow$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Аналогично

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Таким образом, получим

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Осталось показать, что $f(x) - P_n(x) = o[(x-x_0)^n]$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x-x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x-x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - P_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} =$$

$$= \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

(в силу равенств 1, 2, …, (n+1) здесь мы всякий раз имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Окончательно мы доказали, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n].$$

Полученная формула называется формулой Тейлора, $o[(x-x_0)^n]$ – называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано. Формула Тейлора имеет и другие формы остаточного члена; например,

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа. Очевидно, что в этом случае $f(x)$ должна иметь производную до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки x_0.

Рассмотрим частичный случай, когда $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Эта формула называется формулой Маклорена.

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}; \quad 0 < \theta < 1$$

— остаточный член в форме Лагранжа в формуле Маклорена.

Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена

Сначала дадим оценку остаточного члена в формуле Маклорена. Предположим, что функция $y = f(x)$ такова, что

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M, \tag{5.11}$$

где $M = \text{const}$ для $\forall\, n$, $\forall\, x$ из некоторой окрестности точки $x = 0$. Например, функция $f(x) = \sin x$ обладает этим свойством:

$$|y^{(n)}| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \leqslant 1.$$

Покажем, что в этом случае $R_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Воспользуемся остаточным членом в форме Лагранжа

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant M \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как для любого фиксированного x:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \text{то} \quad R_{n+1}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Приведем некоторые примеры

1) $y = e^x, \quad \forall\, x \in [-r; r]; \quad |y^{(n)}| = |e^x| < e^r$

$$y^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ ;$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall\, x \in [-r, r]; \quad |R_{n+1}| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r.$$

2) $y = \sin x$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \ ;$$

$$\sin^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1 \ ; \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \ ;$$

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n\cos\theta x.$$

3) $y = \cos x$

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \ ;$$

$$\cos^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ (-1)^k, & n = 2k \ ; \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

4) $y = \ln(1+x)$

$$\ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \ ;$$

$$\ln^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \ ;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n), \quad x \in (-1, 1] \ ;$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

5) $y \doteq (1+x)^\alpha$, α — вещественное число;

$$y^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \ ;$$

$$y^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1) \ ;$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+ \\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), \quad \forall x\in(-1,1]$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}.$$

Заметим, что в частных случаях, когда $\alpha = n$, последняя формула есть формула бинома Ньютона.

Некоторые применения формулы Маклорена

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x).$$

Если $x=1$

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1), \tag{5.12}$$

$$R_{n+1}(1)\leqslant\frac{e^\theta}{(n+1)!}\leqslant\frac{e}{(n+1)!}\leqslant\frac{3}{(n+1)!}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

С помощью формулы (7.11) можно вычислить e с любой степенью точности.

5.11 Геометрическое исследование графика функции

I. Экстремум.

Определение 5.6. *Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума ($\max$) (минимума ($\min$)) функции $f(x)$, если найдется такая δ-окрестность этой точки, в пределах которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) при $x \neq x_0$.*

Локальный max и локальный min объединяют общим названием локальный *экстремум.* Мы говорим о локальном экстремуме, так как неравенства $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) должны выполняться в некоторой окрестности точки x_0, а не в области определения функции $f(x)$.

Теорема 5.14 (необходимое условие локального экстремума). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Так как в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, то найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в котором значение функции будет наибольшим (наименьшим) среди других ее значений, но тогда в силу теоремы Ферма $f'(x_0) = 0$. □

Теорема имеет простой геометрический смысл: если точка x_0 есть точка локального экстремума и в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, то эта касательная параллельна оси Ox.

Заметим, что если производная функции в некоторой точке равна нулю, то эта точка может и не быть точкой экстремума.

Пусть, например, $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$. Очевидно, что $f'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ данная функция экстремума не имеет.

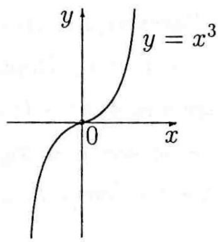


Рис. 5.7.

Точки, для которых выполняется условие $f'(x) = 0$ мы впредь будем называть точками возможного экстремума.

Теорема 5.15 (первое достаточное условие существования экстремума). *Пусть точка $x = x_0$ есть точка возможного экстремума функции $y = f(x)$ и пусть $f'(x)$ существует в некоторой окрестности этой точки. Тогда если выполняется $f'(x) < 0$, $x < x_0$ ($f'(x) > 0$, $x > x_0$) $\forall\, x$, принадлежащих указанной окрестности, то в точке $x = x_0$ функция имеет минимум, если $f'(x) > 0$, $x < x_0$ ($f'(x) < 0$, $x > x_0$) $\forall\, x$, принадлежащих указанной окрестности, то в точке $x = x_0$ функция имеет максимум; если же $f'(x)$ сохраняет знак $\forall\, x$ из некоторой окрестности точки x_0, то экстремума в точке $x = x_0$ нет.*

Доказательство. Рассмотрим $f'(x) > 0$, $x < x_0$ ($f'(x) < 0$, $x > x_0$). Покажем, что в точке $x = x_0$ будет максимум, то есть $f(x) - f(x_0) < 0$ $\forall\, x$ из некоторой окрестности точки $x = x_0$. Воспользуемся формулой Лагранжа и оценим разность

$$f(x) - f(x_0) = f'(\gamma)(x - x_0). \tag{5.13}$$

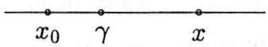


Рис. 5.8.

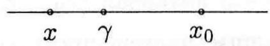


Рис. 5.9.

Очевидно, что для $x > x_0$ имеем $f'(\gamma) < 0$ (по условию теоремы), $(x - x_0) > 0$ и следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$. Если $x < x_0$, то $(x - x_0) < 0$, $f'(\gamma) > 0$ (по условию) и следовательно по-прежнему $f(x) - f(x_0) < 0$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда $f'(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Обращаясь к равенству (7.12), мы можем утверждать, что разность $f(x) - f(x_0)$ имеет разные знаки в зависимости от того будет ли $x > x_0$ или $x < x_0$, так как при этом меняется знак $x - x_0$, а знак $f'(\gamma)$ остается неизменным, следовательно экстремума в точке $x = x_0$ нет. □

Теорема 5.16 (второе достаточное условие существования экстремума). *Если существует $f''(x_0)$ и $f''(x_0) > 0$, то $x = x_0$ есть точка* min; *если $f''(x_0) < 0$, то $x = x_0$ есть точка* max; *если $f''(x_0) = 0$, то вопрос остается открытым.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = f'(x)$. Так как по условию теоремы ее производная, равная $f''(x) > 0$ в точке $x = x_0$, то эта функция возрастает в точке x_0. А так как, кроме того, $f'(x_0) = 0$, то график этой функции в окрестности точки x_0 имеет вид

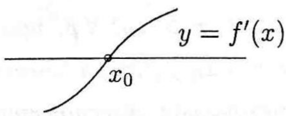


Рис. 5.10.

и следовательно, $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0,\ x < x_0 \\ f'(x) > 0,\ x > x_0 \end{array}\right\}$

в некоторой окрестности точки x_0. Отсюда в силу первого достаточного условия функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет min. □

II. Экстремум функции, не имеющей производной в некоторой точке.

Пусть функция $y = f(x)$, в некоторой точке $x = x_0$ не имеет производной, хотя в любой точке из некоторой окрестности точки $x = x_0$ производная существует. Например:

1. $y = |x|$, $\quad x = 0$. $\quad$ 2. $y = x^{2/3}$, $\quad y' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$, $\quad x = 0$.

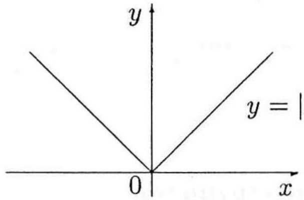


Рис. 5.11.

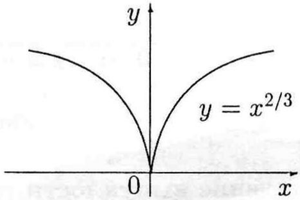


Рис. 5.12.

В этом случае для выяснения вопроса о существовании экстремума можно пользоваться первым достаточным условием, если, конечно, функция непрерывна в точке $x = x_0$ (см. доказательство первого условия).

Вывод: Итак, чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ на экстремум, сначала находим первую производную, приравниваем к нулю и из уравнения $f'(x) = 0$ находим точки возможного экстремума. Кроме того, к этим точкам добавляем те, в которых $f'(x)$ не существует. Наконец, пользуясь достаточными условиями, выясним будет ли экстремум в этих точках или нет.

III. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции $y = f(x)$ непрерывной на сегменте.

Итак, пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, тогда по второй теореме Вейерштрасса она достигает своих точных границ, то есть наибольшего (наименьшего) значений.

Очевидно, что эти значения могут достигаться на концах сегмента, либо в одной из точек локального экстремума. Поэтому, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции на сегменте $[a, b]$ нужно найти все точки возможного экстремума, принадлежащие сегменту $[a, b]$; вычислить значение функции в этих точках; найти $f(a)$, $f(b)$ и среди всех полученных чисел выбрать самое большое, это и будет $\sup f(x)$, и самое маленькое $\inf f(x)$ на $[a, b]$.

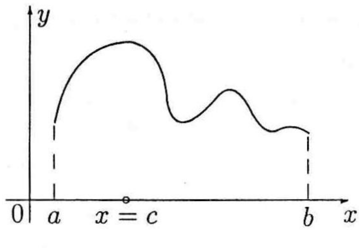


Рис. 5.13.

IV. Направление выпуклости графика функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на (a, b). Это значит, что график функции имеет касательную в любой точке, причем касательные непараллельны оси ординат.

Определение 5.7. *Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ на (a, b) имеет выпуклость, направленную вниз (вверх), если в любой точке (a, b) график расположен не ниже (не выше) любой своей касательной.*

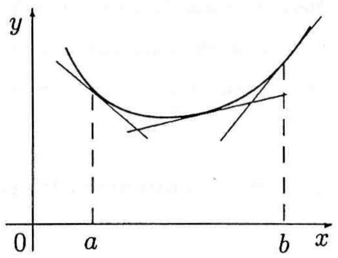


Рис. 5.14.

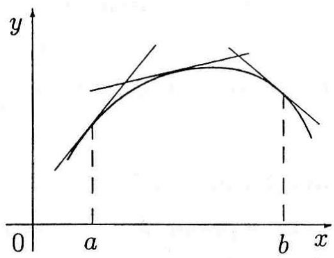


Рис. 5.15.

Теорема 5.17. *Если во всех точках (a, b) существует $f''(x)$ и $f''(x) > 0$, то график функции имеет выпуклость, направленную вниз. Если $f''(x) < 0$, то график имеет выпуклость, направленную вверх.*

Доказательство. Пусть $M(x_0, f(x_0))$. Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{5.14}$$

Y — текущая координата касательной. Требуется доказать, что $y - Y \geqslant 0$.

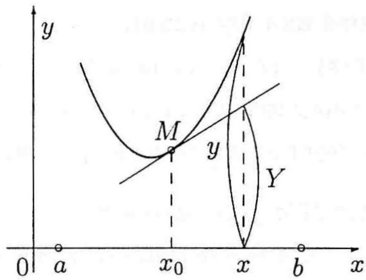


Рис. 5.16.

Воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2,$$

где γ — некоторая точка, расположенная между точками x и x_0. Или так:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2. \tag{5.15}$$

Из (7.14) вычтем (7.13)

$$y - Y = \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2 \quad \Longrightarrow \quad y - Y > 0.$$

□

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную $f''(x)$ в точке $x = x_0$ и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то существует такая окрестность точки $x = x_0$, в пределах которой график будет иметь выпуклость, направленную вниз (вверх).*

Доказательство. Пусть, например, $f''(x_0) > 0$, тогда так как $f''(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то по теореме об устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки $x = x_0$, что $f''(x) > 0$ для любого x из этой окрестности. Но тогда по предыдущей теореме график функции $f(x)$ в этой окрестности будет иметь выпуклость, направленную вниз. $\square$

Замечание. Если $f'(x) = 0$, то, очевидно, что $f(x) = kx+b$ и мы о понятии выпуклости не говорим.

V. Точки перегиба графика функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на (a, b), $c \in (a, b)$, на (a, c) и (c, b) график функции имеет определенное направление выпуклости и, наконец, в точке $M(c, f(c))$ существует касательная к графику функции.

Определение 5.8. *Точка $M(c, f(c)$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в этой точке существует касательная к графику функции и слева и справа от этой точки график имеет разные направления выпуклости.*

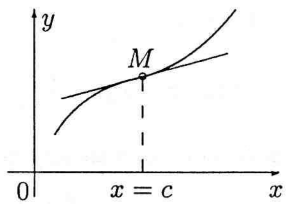


Рис. 5.17.

Теорема 5.18 (необходимое условие перегиба). *Если точка $M(c, f(c))$ является точкой перегиба графика функции и в точке c существует $f''(x)$, непрерывная в этой точке, то $f''(c) = 0$.*

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, воспользуемся предыдущим следствием. Итак, мы хотим доказать, что $f''(c) = 0$. Предположим, что это не так, то есть $f''(x) \neq 0$, тогда по следствию найдется некоторая окрестность точки $x = c$, в пределах которой график функции имеет определенное направление выпуклости, что противоречит тому, что M есть точка перегиба. $\square$

Точки x, в которых $f''(x) = 0$, называют *критическими.* Заметим, что не всякая точка $M(c, f(c)$, для которой $f''(c) = 0$ является точкой перегиба. Например, $f(x) = x^4$; $f''(0) = 0$, но точка $(0, 0)$ не является точкой перегиба.

Теорема 5.19 (первое достаточное условие). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки $x = c$, причем $f''(c) = 0$. Тогда, если эта производная слева и справа от точки $x = c$ имеет разные знаки в пределах указанной окрестности, то точка $M(c, f(c)$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в точке $x = c$ существует первая производная, а следовательно в точке M существует касательная к графику функции $y = f(x)$, кроме того, так как $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x = c$, то график функции $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости слева и справа от точки M. А это означает по определению, что точка M есть точка перегиба. □

Теорема 5.20 (второе достаточное условие). *Если $f''(c) = 0$, а $f'''(c) \neq 0$, то точка $M(c, f(c)$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.*

Доказательство. Предположим для определенности $f'''(c) > 0$. Тогда функция $y = f''(x)$ возрастает в точке $x = c$. А так как, кроме того $f''(c) = 0$ по условию теоремы, то $f''(c) < 0$ при $x < c$ и $f''(x) > 0$ при $x > c$. Отсюда в силу первого достаточного условия следует, что точка M есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$. □

VI. Асимптоты графика функции.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример. График функции $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

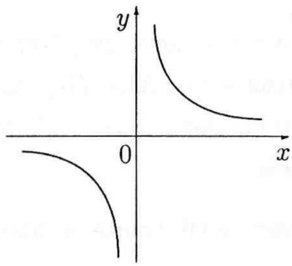


Рис. 5.18.

Предположим, для определенности, что функция $y = f(x)$ определена для сколь угодно больших положительных x тогда дадим следующее определение.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является *наклонной* асимптотой к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функция $y = f(x)$ представима в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \alpha(x) = 0.$$

Теорема 5.21. *Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ имеем наклонную асимптоту вида $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx].$$

Доказательство. Пусть график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ имеет наклонную асимптоту $y = kx+b$, то есть имеет место представление $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [kx + b + \alpha(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = k$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$. Из последнего выражения следует утверждение, что разность $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

Отсюда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ и следовательно $y = kx + b$ — асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. $\square$

VII. Общая схема исследования графика.

Итак, задана функция $y = f(x)$. Построение графика этой функции проводится обычно по следующей схеме:

1) область определения; множество значений;
2) четность, периодичность, точки пересечения с осями координат;
3) находим первую производную $f'(x)$ и исследуем функцию на возрастание (убывание), экстремум;
4) находим вторую производную $f''(x)$ и определяем направление выпуклости и точки перегиба;
5) находим асимптоты.

Глава 6

Неопределенный интеграл

6.1 Определение первообразной и неопределенного интеграла

Определение 6.1. *Функция $F(x)$, дифференцируемая на интервале (a, b), называется первообразной для функции $f(x)$ на этом интервале, если выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$.*

Очевидно, что любая функция, имеющая первообразную $F(x)$, имеет в то же время бесчисленное множество первообразных вида $F(x)+c$, где c — произвольная постоянная. Покажем, что если $F(x)$ есть некоторая первообразная для $f(x)$, то любая другая первообразная для этой функции содержится в выражении $F(x) + c$.

Теорема 6.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ есть некоторые первообразные для функции $f(x)$, то разность $F_1(x) - F_2(x) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Дано $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, так как каждая из функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. Обозначим $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Вычислим $F'(x) \equiv [F_1(x) - F_2(x)]' = F_2'(x) - F_1'(x) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0$. Отсюда в силу следствия из формулы конечных приращений Лагранжа $F(x) \equiv \mathrm{const}$, что и требовалось доказать. □

Определение 6.2. *Совокупность всех первообразных для данной функции называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)\,dx$,* *при этом $f(x)\,dx$ называется подинтегральным выражением; $f(x)$ — подинтегральной функцией, а нахождение неопределенного интеграла для данной подинтегральной функции называется интегрированием этой функции. Таким образом, интегрирование есть действие обратное дифференцированию.*

Пусть $F(x)$ есть некоторая первообразная для $f(x)$, тогда в силу ранее сказанного можно записать следующее равенство

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c. \tag{6.1}$$

Кроме того, так как $F'(x) = f(x)$, то имеет место равенство

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{6.2}$$

Отметим еще, что геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, уравнения которых $y = F(x)+c$, получающихся из кривой $y = F(x)$ сдвигом ее вдоль оси Oy на постоянную c. При этом, так как $(F(x)+c)' = f(x)$, то все кривые $y = F(x)+c$ в точке с абсциссой x будут иметь параллельные касательные, угловой коэффициент которых равен $f(x)$.

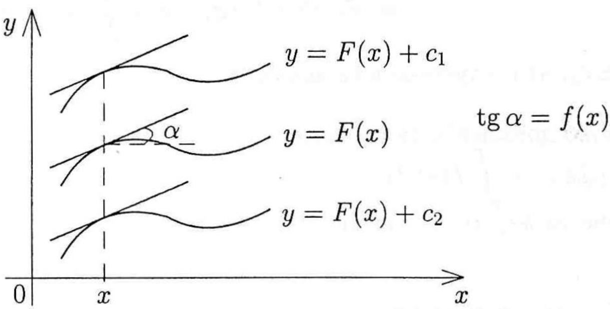


Рис. 6.1.

6.2 Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Доказательство.

$$d\int f(x)\,dx \overset{(7.3)}{=} d(F(x)+c) = dF(x) \overset{(7.4)}{=} f(x)\,dx. \qquad \square$$

2) $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + c.$

Доказательство.

$$\int dF(x) \overset{(7.4)}{=} \int f(x)\,dx \overset{(7.3)}{=} F(x) + c. \qquad \square$$

3) $\displaystyle\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$

Заметим, что равенство 3), поскольку там фигурируют неопределенные интегралы, имеет место с точностью до произвольной постоянной.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ есть первообразная для $f_1(x)$, то есть $F_1'(x) = f_1(x)$; $F_2(x)$ — первообразная для $f_2(x)$, то есть $F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда $F_1(x) \pm F_2(x)$ есть первообразная для $f_1(x) \pm f_2(x)$, так как $(F_1(x) \pm F_2(x))' = F_1'(x) \pm F_2'(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$. Отсюда

$$\begin{aligned}\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx &= [F_1(x)+c_1] \pm [F_2(x)+c_2] = \\ &= F_1(x) \pm F_2(x) + c = \int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx,\end{aligned}$$

где $c = c_1 \pm c_2$, что и требовалось доказать. $\square$

Аналогично доказывается свойство

4) $\displaystyle\int Kf(x)\,dx = K\int f(x)\,dx.$

Замечание то же, что и для 3).

6.3 Таблица интегралов

Так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию, то большая часть формул таблицы следует из соответствующих формул таблицы производных.

I. $\displaystyle\int x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c \quad (\mu \neq -1).$

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ (см. доказательство ниже).

III. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$

$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c.$

IV. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + c.$

V. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c.$

VI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$

VII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$

VIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$

IX. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c.$

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$

Докажем справедливость формулы II. Пусть $x > 0$, тогда

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c = \ln|x| + c.$$

Пусть $x < 0$, тогда

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c = \ln|x| + c.$$

Формула доказана.

Замечание. В свое время, занимаясь дифференцированием, мы убедились, что производная от любой элементарной функции дает элементарную функцию, или, как говорят, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций. Совсем иначе обстоит дело с операций интегрирования. Так, интегралы

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos(x^2)\,dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx,$$
$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

как будет доказано, существуют, но не выражаются через элементарные функции.

Напомним, что элементарные функции — это функции, получаемые из простейших элементарных функций ($y(x) = c$, $y(x) = x^\alpha$, $y(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y(x) = \log_a x$, $y(x) = \sin x$, $y(x) = \cos x$, $y(x) = \operatorname{tg} x$, $y(x) = \operatorname{ctg} x$, $y(x) = \arcsin x$, $y(x) = \arccos x$, $y(x) = \operatorname{arctg} x$, $y(x) = \operatorname{arcctg}(x)$) с помощью конечного числа арифметических действий, а также суперпозицией этих функций.

6.4 Основные методы интегрирования

Метод замены переменных

Теорема 6.2. *Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на X и пусть T-множество значений этой функции. Пусть, кроме того,* *функция $g(t)$ на T имеет первообразную $G(t)$. Тогда $g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ имеет первообразную на множестве X и одной из первообразных является $G[\varphi(x)]$.*

Доказательство. Пусть $G(t)$ — есть первообразная $g(t)$, то есть

$$g(t) = G'(t). \tag{6.3}$$

Докажем, что $G(\varphi(x))$ есть первообразная для $g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$, то есть требуется доказать, что

$$\frac{dG[\varphi(x)]}{dx} = g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

Заметим, что производная $\frac{d}{dx}G(\varphi(x))$ существует по теореме о производной сложной функции и воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции и равенством (7.5)

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = G'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) \overset{(7.5)}{=} g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

Отсюда,

$$\int g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)] + c,$$

что и требовалось доказать. □

Примеры.

$$1) \int \cos 3x\,dx = \quad \left(t = 3x, \quad dt = 3\,dx, \quad dx = \frac{dt}{3}\right)$$

$$= \int \cos t\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c,$$

(здесь $\varphi(x) = 3x$, $g(t) = \cos t$, $G(t) = \sin t$).

$$2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{1+2x'}} = \int (1+2x)^{-1/5}\,dx =$$

$$\left(1+2x = t, \quad 2dx = dt, \quad dx = \frac{dt}{2}\right)$$

$$= \int t^{-1/5}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-1/5}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{4/5}}{4/5} + c = \frac{5}{8}(1+2x)^{4/5} + c.$$

3) $\displaystyle\int e^{-\sin x}\cos x\,dx =$

$$(t = -\sin x, \quad dt = -\cos x\,dx, \quad \cos x\,dx = -dt)$$

$$= \int e^t(-dt) = -\int e^t\,dt = -e^{-\sin x} + c.$$

Метод интегрирования по частям

Теорема 6.3. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором множестве X, и пусть, кроме того, функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом множестве. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на этом множестве, причем выполняется равенство:*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Равенство (7.6), очевидно, можно записать в более компактной форме

$$\int u\,dv = u(x)v(x) - \int v\,du. \tag{6.5}$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой (производная произведения)

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

следовательно,

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x).$$

Каждое из слагаемых в правой части последнего равенства имеет первообразную, следовательно, функция, стоящая в левой части также имеет первообразную и, следовательно, умножая обе части последнего равенства на dx и интегрируя, получим утверждение теоремы. □

Пример.

$$1)\quad \int (1-x)^2 e^x dx \overset{\text{а)}}{=} e^x(1-x)^2 + 2\int e^x(1-x)\,dx \overset{\text{б)}}{=}$$

$$\text{а)}\quad u=(1-x)^2 \implies du=-2(1-x)\,dx,$$
$$dv=e^x dx \implies v=\int e^x\,dx = e^x.$$

$$\text{б)}\quad u=1-x \implies du=-dx,\quad dv=e^x dx \implies v=e^x$$

$$\overset{\text{б)}}{=} e^x(1-x)^2 + 2\left[(1-x)e^x + \int e^x dx\right] =$$
$$= e^x(1-x)^2 + 2(1-x)e^x + 2e^x + c.$$

В этом примере интегрированием по частям мы воспользовались дважды.

Заметим, что значительную часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы:

I. $\int P(x)e^{cx}dx;\quad \int P(x)\cos cx\,dx;\quad \int P(x)\sin cx\,dx,$

где $P(x)$ — многочлен; c — некоторая постоянная.

Полагая $u=P(x)$; $dv=e^{cx}dx$ или $dv=\cos cx\,dx$ или $dv=\sin cx\,dx$, мы понижаем степень многочлена $P(x)$ до его исчезновения.

II. $\int P(x)\arcsin x\,dx;\quad \int P(x)\ln x\,dx;\quad \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,$

где $P(x)$ — многочлен.

В этом случае полагаем $dv=P(x)dx$; $u=\arcsin x$ или $u=\ln x$ или $u=\mathrm{arctg}\,x$.

III. $\int e^{ax}\sin bx\,dx;\quad \int e^{ax}\cos bx\,dx;\quad \int \sin(\ln x)\,dx;\quad \int \cos(\ln x)\,dx.$

При решении этих интегралов метод интегрирования по частям применяется дважды.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \sin(\ln x)\,dx$. Положим $u=\sin(\ln x)$; $dv=dx$. Тогда $v=x$; $du=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$.

По формуле (7.7) имеем

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Для вычисления второго интеграла вновь пользуемся интегрированием по частям $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$. Отсюда $du = -\sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$; $v = x$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x) + \int x\cdot\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx.$$

Окончательно получаем

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx.$$

В последнем равенстве переносим интеграл из правой части в левую, тогда получим

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c_1,$$

или

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c,$$

где $c = c_1/2$.

Заметим, что методом интегрирования по частям вычисляются также многие интегралы, не относящиеся к трем рассмотренным выше случаям.

Пример 10.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}\right] = \frac{1}{a^2}\left[J_{n-1} - \int \frac{x\cdot x}{(x^2+a^2)^n}dx\right] =$$

$$u = x, \quad dv = \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$du = dx, \quad v = \int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt =$$

(здесь мы сделали замену переменной $t = x^2 + a^2$, $dt = 2x\,dx$)

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{1-n}}{1-n} = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{n-1} - \frac{x}{2(x^2+a^2)^{n-1}(1-n)} + \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{n-1}\left(1+\frac{1}{2(1-n)}\right) - \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}\right].$$

Таким образом, мы получили рекуррентную формулу, позволяющую интеграл J_n выразить через J_{n-1}. Чтобы эта формула оказалась полезной вычислим

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x/a)^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c;$$
$$\frac{x}{a} = t; \quad dt = \frac{dx}{a}.$$

Используя теперь рекуррентную формулу, мы можем легко вычислить интеграл J_n для любого n.

6.5 Интегрирование рациональных функций

Рациональная функция — это функция, представимая в виде дроби $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Покажем, что интеграл от рациональной функции всегда выражается через элементарные функции. Предположим сначала, что степень $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$. Тогда, разделив $P(x)$ на $Q(x)$, можно выделить целую часть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$ — многочлен, а степень многочлена $P_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Пример.
$$\frac{2x^4 - x^2 + x + 5}{x^2-2} = 2x^2 + 3 + \frac{x+11}{x^2-2}.$$

В высшей алгебре доказано, что всякий многочлен можно представить в виде произведения элементарных множителей

$$Q(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k), \tag{6.6}$$

где числа $a_1, \ldots, a_k$ являются корнями многочлена $Q(x)$, то есть $Q(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, число A — коэффициент при старшей степени $Q(x)$. Если некоторые множители в представлении (7.9) совпадают, то получим представление

$$Q(x) = A(x - a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_\ell)^{\alpha_\ell} \tag{6.7}$$

при этом говорят, что a_i — имеют кратность α_i и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\ell = n$, где n — степень многочлена $Q(x)$.

Так, если имеем $Q(x) = x^5(x+2)^3(x-7)$, то $a_1 = 0$ имеет кратность 5, $a_2 = -2$ имеет кратность 3, $a_3 = 7$ имеет кратность 1 или, как говорят, является простым корнем многочлена $Q(x)$.

В представлении (7.10) некоторые корни могут быть комплексными. Пусть, например, $a_s = \gamma_s + i\beta_s$ — корень кратности α_s. Можно показать, что сопряженное число $\bar{a}_s = \gamma_s - i\beta_s$ также является корнем многочлена той же кратности α_s. Тогда, объединяя в (7.10) многочлены, отвечающие этим корням, получим

$$\begin{aligned}(x - a_s)^{\alpha_s} \cdot (x - \bar{a}_s)^{\alpha_s} &= \left\{[x - (\gamma_s + i\beta_s)][x - (\gamma_s - i\beta_s)]\right\}^{\alpha_s} = \\ &= (x^2 - 2x\gamma_s + \gamma_s^2 + \beta_s^2)^{\alpha_s} = (x^2 + 2p_s x + q_s)^{\alpha_s},\end{aligned}$$

где $p_s = -\gamma_s$; $q = \gamma_s^2 + \beta_s^2$; $p^2 - q = -\beta_s^2 < 0$.

Поступая так со всеми комплексными корнями, из представления (7.10) получим

$$Q(x) = (x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \ldots (x-c)^\gamma (x^2+2px+q)^r \ldots (x^2+2mx+n)^t, \tag{6.8}$$

здесь $a, b, \ldots, c$ — вещественные корни $Q(x)$ кратности $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ соответственно, квадратные трехчлены не имеют вещественных корней ($p^2 - q < 0$, $m^2 - n < 0$) и имеет место равенство $\alpha + \beta + \ldots + 2r + \ldots + 2t = n$, где n — степень многочлена $Q(x)$.

Вернемся к вопросу об интегрированию функции $P(x)/Q(x)$. Поскольку интегрирование многочлена не представляет труда

$$\int R(x)\,dx = \int [c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p]\,dx = c_0 \frac{x^{p+1}}{p+1} + c_1 \frac{x^p}{p} + \ldots + c_p x + C,$$

то впредь всегда будем считать, что степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$ (такие дроби называются правильными).

Лемма 6.1. *Если $P(x)/Q(x)$ — есть правильная дробь и $Q(x) = (x-a)^\alpha \cdot Q_1(x)$, где $Q_1(a) \neq 0$, то имеет место равенство*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \cdot Q_1(x)},$$

где A — некоторая постоянная, $P_1(x)$ — некоторый многочлен и второе слагаемое в главной части — правильная дробь.

Доказательство. Рассмотрим разность $P(x)/Q(x) - \frac{A}{(x-a)^\alpha}$, где A — некоторая неизвестная константа

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{P(x) - A \cdot Q_1(x)}{Q(x)}. \tag{6.9}$$

Подберем число A таким образом, чтобы выполнялось равенство $P(a) - AQ_1(a) = 0$. Отсюда $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$; поэтому число a является корнем разности $P(x) - AQ_1(x)$ и следовательно, имеет место равенство $P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$. Подставляя его в равенство (7.12), получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{(x-a) \cdot P_1(x)}{(x-a)^\alpha \cdot Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \cdot Q_1(x)}. \tag{6.10}$$

Заметим, что дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}$ правильная, как разность правильных дробей. □

Лемма 6.2. *Если $P(x)/Q(x)$ есть правильная дробь и $Q(x) = (x^2 + 2px + q)^\beta Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится нацело на квадратный трехчлен $(x^2 + 2px + q)$, то справедливо равенство*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} \cdot Q_1(x)},$$

где M и N — некоторые числа и второе слагаемое в правой части есть дробь правильная (без доказательства).

Воспользуемся теперь леммами 6.1, 6.2 для разложения рациональной функции $P(x)/Q(x)$ на элементарные дроби. Представление (7.11) запишем следующим образом:

$$Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x),$$

где $Q_1(x) = (x-b)^\beta \cdot \ldots \cdot (x-c)^\gamma (x^2+2px+q)^r \cdot \ldots \cdot (x^2+2mx+n)^z$, $(Q_1(a) \neq 0)$ и используя лемму 6.1, запишем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}.$$

Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{P_r(x)}{(x-a)^{\alpha-r}Q_1(x)}.$$

Применяя лемму 6.1 α-раз, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_3}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x-b)^\beta Q_2(x)},$$

где $Q_2(x) = \ldots (x-c)^\gamma (x^2+2px+q)^r \cdot \ldots \cdot (x^2+2mx+n)^t$.

К слагаемому $\frac{\tilde{P}(x)}{(x-b)^\beta Q_2(x)}$ вновь применим лемму 6.1 и так до тех пор, пока в разложении (7.11) не исчезнут все множители вида
$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdot \ldots \cdot (x-c)^\gamma$.

Далее, пользуясь леммой 6.2 до полного исчезновения множителей $(x^2+2px+q)^r, \ldots, (x^2+2mx+n)^t$, получим окончательно следующее разложение функции $P(x)/Q(x)$ на элементарные дроби

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{B_\beta}{x-b} + \\ &\quad + \ldots + \frac{C_\gamma}{x-c} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+2px+q)^r} + \ldots + \\ &\quad + \frac{M_rx+N_r}{x^2+2px+q} + \ldots + \frac{R_tx+F_t}{x^2+2mx+n},\end{aligned} \tag{6.11}$$

где $A_1, \ldots, B_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots, R_t, F_t$ — некоторые неизвестные числа. Для их нахождения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем: в правой части разложения (7.14) все дроби приводим к общему знаменателю (им очевидно является многочлен $Q(x)$); при этом в числителе получим многочлен $\tilde{\tilde{P}}(x)$, содержащий неизвестные коэффициенты $A_1, \ldots, F_t$ и разложение (7.14) запишется так

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\tilde{\tilde{P}}(x)}{Q(x)}.$$

Отсюда $\widetilde{\widetilde{P}}(x) = P(x)$.

Приравнивая коэффициенты многочленов $\widetilde{\widetilde{P}}(x)$ и $P(x)$ (два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты), получим систему уравнений для нахождения неизвестных $A_1, \ldots, F_t$.

Пример.

$$\frac{x^2+5x-17}{x^2(x-1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1} + \\ + \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Fx+K}{x^2+x+1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x^2+5x-17 = {} & A(x-1)^3(x^2+x+1)^2 + Bx(x-1)^3(x^2+x+1)^2 + \\ & + Cx^2(x^2+x+1)^2 + Dx^2(x-1)(x^2+x+1)^2 + \\ & + Ex^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2 + (Mx+N)x^2(x-1)^3 + \\ & + (Fx+K)x^2(x-1)^3(x^2+x+1). \qquad (6.12) \end{aligned}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим

$$\begin{array}{r|l} x^0 & -17 = -A \implies A = 17, \\ x^1 & 5 = A - B \implies B = A - 5 = 12, \\ x^2 & \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots, \\ \vdots & \\ x^8 & 0 = B + E + F. \end{array}$$

Замечание. Нахождение неизвестных коэффициентов может быть несколько облегчено, если в обеих частях равенства (7.15) полагать x равным вещественным корням знаменателя. Для предыдущего примера это будет выглядеть так:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & -17 = -A \implies A = 17, \\ x = 1 & -11 = 9C \implies C = -\dfrac{11}{9}. \end{array}$$

Итак, интегрирование правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ свелось к интегрированию четырех типов элементарных дробей:

$$\int \frac{A\,dx}{x-a}; \quad \int \frac{A\,dx}{(x-a)^\alpha}, \ (\alpha \neq 1); \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx;$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^\alpha}\,dx; \quad (\alpha \neq 1).$$

Рассмотрим интегрирование этих дробей

I. $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln(x-a)+C;$$

II. $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^\alpha} = A\int (x-a)^{-\alpha}d(x-a) = \frac{A}{-\alpha+1}(x-a)^{-\alpha+1}+C;$$

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx \ominus$$

$$x^2+2px+q = x^2+2px+p^2-p^2+q = (x+p)^2+g^2;$$

где $g^2 = q-p^2 > 0; \quad x+p=t; \quad dt=dx; \quad x=t-p$

$$\ominus \int \frac{M(t-p)+N}{t^2+g^2}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+g^2} + (N-Mp)\int \frac{dt}{t^2+g^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+g^2)}{t^2+g^2} + (N-Mp)\frac{1}{g}\operatorname{arctg}\frac{t}{g} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+g^2) + \frac{N-Mp}{g}\operatorname{arctg}\frac{t}{g} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln((x+p)^2+g^2) + \frac{N-Mp}{g}\operatorname{arctg}\frac{(x+p)^2}{g} + C;$$

IV. $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^\alpha}\,dx = \int \frac{M(t-p)+N}{(t^2+g^2)^\alpha}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+g^2)^\alpha} +$$

$$x^2+2px+q = (x+p)^2+g^2; \quad q^2-p^2>0,$$

$$t = x+p, \quad dt = dx$$

$$+(N-Mp)\int \frac{dt}{(t^2+g^2)^\alpha} = \frac{M}{2}\int (t^2+g^2)^{-\alpha}d(t^2+g^2) + (N-Mp)J_\alpha =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+g^2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + [(N-Mp)]J_\alpha$$

(для нахождения интеграла J_α см. пример 2 в разделе «Метод интегрирования по частям»).

Если внимательно посмотреть на интегрирование 4-х элементарных дробей, то станет ясно, что все они выражаются через элементарные функции: степенную, логарифмическую и обратную тригонометрическую ($\operatorname{arctg} x = y$), а так как интегрирование любой функции $P(x)/Q(x)$ сводится к интегрированию этих элементарных дробей, то, следовательно, то же самое можно сказать об интеграле $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Итак, все выше сказанное позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.4. *Интеграл от рациональной функции всегда выражается через элементарные функции.*

6.6 Интегрирование некоторых иррациональных выражений

I. $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, $ad - bc \neq 0$.

$R(x)$ — рациональная функция вида $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

$R(x,y)$ — рациональная функция от двух переменных $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где

$$P(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + my^2 + \ldots + ky^n.$$

Такие интегралы вычисляются с помощью замены переменных, цель которой свести данный интеграл к интегралу от рациональной функции

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad\Longrightarrow\quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad\Longrightarrow\quad t^n(cx+d) = ax+b \quad\Longrightarrow$$
$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} \quad\Longrightarrow\quad dx = \frac{-ndt^{n-1}(ct^n - a) - (b - dt^n)nct^{n-1}}{(ct^n - a)^2}$$
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dt = n\int R\left(\frac{b - dt^n}{ct^n - a}, t\right) \frac{t^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2}\,dt.$$

Очевидно, что полученный интеграл

$$n(ad-bc)\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a},t\right)\frac{t^{n-1}\,dt}{(ct^n-a)^2}$$

есть интеграл от рациональной дроби и относится к предыдущему типу.

II. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.$

Заметим, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет совпадающих корней, иначе квадратичная иррациональность просто исчезает.

Интегралы такого вида приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью одной из двух подстановок Эйлера.

1) Первая подстановка Эйлера.

Предположим, что трехчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней, тогда знак его совпадает со знаком первого коэффициента a, и, так как квадратичный трехчлен положителен (стоит под знаком квадратного корня), то $a>0$.

Введем новую переменную t следующим образом

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}.$$

Возводя в квадрат последнее равенство, получим

$$ax^2+bx+c=t^2+2xt\sqrt{a}+ax^2 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} \quad\Longrightarrow$$
$$dx=\frac{2t(b-2t\sqrt{a})+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt,$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=$$
$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},t+\frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b-2t\sqrt{a}}\right)\frac{2tb-2t^2\sqrt{a}-2c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt.$$

Итак, мы получили интеграл от рациональной функции.

2) Вторая подстановка Эйлера.

Она применяется, когда трехчлен ax^2+bx+c имеет вещественные различные корни x_1, x_2. В этом случае новую переменную t вводим так

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1) \quad\Longrightarrow\quad a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2$$
$$\Longrightarrow\quad a(x-x_2)=t^2(x-x_1) \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2} \quad\Longrightarrow$$
$$dx=\frac{-2tx_1(a-t^2)+(ax_2-t^2x_1)2t}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

Подставляя найденные x и dx в исходный интеграл, мы получим интеграл от рациональной функции.

Пример.
$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$
Этот интеграл принадлежит к рассмотренному выше типу, где
$$R(x,\sqrt{x^2+x+1})=\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^{-1}.$$

Квадратный трехчлен не имеет вещественных корней (первая подстановка Эйлера), $a=1$, следовательно, положим $\sqrt{x^2+x+1}=t+x$. Отсюда $1+x=t^2+2tx\Longrightarrow x=\dfrac{t^2-1}{1-2t}\Longrightarrow$

$$dx=\frac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}\,dt=\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2\left(t+\frac{2(t^2-1)}{1-2t}\right)}\,dt=$$
$$=2\int\frac{t^2-t+1}{(1-2t)(2-t)}\,dt=2\left[\int\left(\frac{1}{2}+\frac{3/2t}{(1-2t)(2-t)}\right)dt\right]=$$
$$=t+3\int\frac{t\,dt}{(1-2t)(2-t)}=$$

$$\frac{t}{(1-2t)(2-t)}=\frac{A}{1-2t}+\frac{B}{2-t} \quad\Longrightarrow\quad t=A(2-t)+B(1-2t)$$

$$\begin{array}{c|l} t^0 & 0=2A+B \\ t^1 & 1=-A-2B \end{array} \qquad 2=-3B;\quad B=-\frac{2}{3};\quad A=\frac{1}{3}.$$

$$= t + \left[\int \frac{dt}{1-2t} - 2\int \frac{dt}{2-t}\right] = t + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{d(1-2t)}{1-2t} + 2\int \frac{d(2-t)}{2-t} =$$

$$= t - \frac{1}{2}\ln|1-2t| + 2\ln|2-t| + c = \sqrt{x^2+x-1} - x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x| + 2\ln|2 - \sqrt{x^2+x+1} + x| + c.$$

6.7 Интегрирование тригонометрических выражений вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Основной метод интегрирования выражений такого вида состоит в том, что мы приводим этот интеграл к интегралу от рациональной функции путем замены переменных.

I. Универсальная подстановка.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Подставляя полученные равенства в исходный интеграл, имеем:

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Этот интеграл, очевидно, есть интеграл от рациональной функции переменной t.

Универсальная подстановка всегда преобразует данный интеграл к интегралу от рациональной функции, который, как известно, всегда выражается через элементарные функции. Однако, универсальная подстановка часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому в некоторых частных случаях используют другие подстановки.

Рассмотрим первый частный случай.

II. $\int R(-\sin x, \cos x)\, dx = -\int R(\sin x, \cos x)\, dx.$

В этом случае, очевидно, имеет место равенство

$$R(\sin x, \cos x) = R(\sin^2 x, cosx) \sin x.$$

В этом случае подстановка $t = \cos x$ приводит исходный интеграл к интегралу от рациональной функции

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x\, dx,$$
$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx = -\int R(1 - t^2, t)\, dt.$$

Аналогично

III. Если подинтегральная функция обладает свойством

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $t = \sin x$ приводит данный интеграл к интегралу от рациональной функции.

IV. Если подинтегральная функция такова, что

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $t = \operatorname{tg} x$, как легко проверить, также приводит исходный интеграл к интегралу от рациональной функции.

6.8 Понятие об эллиптических интегралах

Рассмотрим интегралы следующего вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})\, dx, \tag{6.13}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\, dx. \tag{6.14}$$

В свое время рассматривая интегралы с квадратичными иррациональностями, мы показали, что подстановки Эйлера приводят эти интегралы к интегралам от рациональных функций, которые выражаются через элементарные функции. Совсем иначе обстоит дело с интегралами (7.16), (7.17).

Такие интегралы, как правило, через элементарные функции не выражаются; в этом случае они называются эллиптическими интегралами. Легко показать, что (7.16) сводится к (7.17), который тоже преобразуется к одному из следующих 3-х типов:

1. $\displaystyle\int \frac{dz}{(1-z^2)(1+k^2z^2)}$;

2. $\displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dz}{(1+k^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$.

Это так называемая каноническая форма эллиптических интегралов соответственно первого, второго и третьего рода.

Глава 7

Определенный интеграл

7.1 Определение определенного интеграла

Сначала рассмотрим две задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача 1. Площадь криволинейной трапеции.

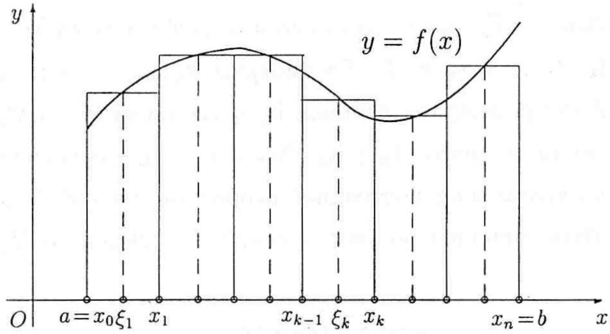


Рис. 7.1.

Криволинейной трапецией будем называть фигуру, ограниченную отрезком $[a, b]$ оси Ox, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Найдем площадь трапеции. Разобьем промежуток $[a, b]$ произвольно на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$. Через точки деления проведем прямые $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ до пересечения с графиком функции

$y = f(x)$. Криволинейная трапеция разобьется на n элементарных трапеций. Будем считать, что площадь элементарной криволинейной трапеции приближенно равняется площади прямоугольника с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой $f(\xi_k)$, ξ_k — произвольно выбранная точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$S_{\text{кр. трап.}} \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Чтобы получить точное значение площади криволинейной трапеции, надо перейти к пределу при условии $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$:

$$S_{\text{кр. трап.}} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Задача 2. Определение пути, пройденного материальной точкой за некоторый промежуток времени.

Пусть точка совершает прямолинейное движение и $v = f(t)$ — ее скорость. Определим путь s, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1, T_2]$. Разобьем отрезок $[T_1, T_2]$ произвольно на n частей точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = T_2$. Рассмотрим $[t_{k-1}, t_k]$, тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_{k-1}, t_k]$, равен $f(\tau_k)\Delta t_k$, где τ_k — произвольная точка сегмента $[t_{k-1}, t_k]$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ (мы считаем, что в это время точка двигалась с постоянной скоростью, равной $f(\tau_k)$).

Тогда весь путь, пройденный за промежуток времени $[T_1, T_2]$, приближенно равен

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

Точное значение пути мы получим, переходя в этом равенстве к пределу при условии, что $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k \to 0$

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

Общая постановка задачи

Пусть функция $y = f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$. Произведем разбиение сегмента на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

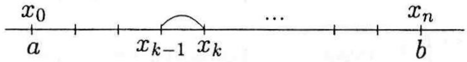


Рис. 7.2.

На каждом маленьком сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и составим сумму $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Эту сумму назовем *интегральной суммой*, составленной для данного разбиения и данного выбора точек ξ_k. Обозначим через λ: $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$ и назовем это число λ — *шаг разбиения*.

Определение 7.1. *Число I называется пределом интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)$, что будет выполняться $|I - \sigma| < \varepsilon$ для любого разбиения сегмента $[a, b]$, такого что $\lambda < \delta$ и не зависимо от выбора точек ξ_k.*

Определение 7.2. *Функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на сегменте $[a, b]$, если существует конечный предел ее интегральных сумм, не зависящий ни от способа разбиения $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k. При этом предел называют определенным интегралом от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.*

Теорема 7.1 (Необходимое условие существования определенного интеграла). *Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.*

Доказательство. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что это не так, и функция не является ограниченной на $[a, b]$. Тогда она не будет ограниченной на каком-то частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ и значит, за счет выбора точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ можно сделать как угодно большим. Поэтому интегральная сумма σ не может иметь конечного предела при $\lambda \to 0$, что противоречит интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Теорема доказана. □

Замечание. Требование ограниченности функции не является достаточным условием. Рассмотрим, например, функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } \ x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция является ограниченной на всей числовой оси. Покажем, что она, тем не менее, не является интегрируемой на любом сегменте. Рассмотрим произвольное разбиение $[a, b]$. Точки ξ_k выберем так, чтобы они были рациональными, и составим интегральную сумму σ_1:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a.$$

Для того же разбиения в качестве ξ_k выбираем иррациональные точки и вновь составим интегральную сумму σ_2:

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Значит, σ зависит от выбора точек ξ_k, тогда σ не имеет предела, не зависящего от выбора точек ξ_k (даже для одного разбиения) и, следовательно, функция не интегрируема.

Пример. Пользуясь определением, вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если $f(x) = c$.

Решение. Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c(b - a),$$

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b c\,dx = c(b - a).$$

7.2 Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла

Вернемся к геометрической задаче 1.

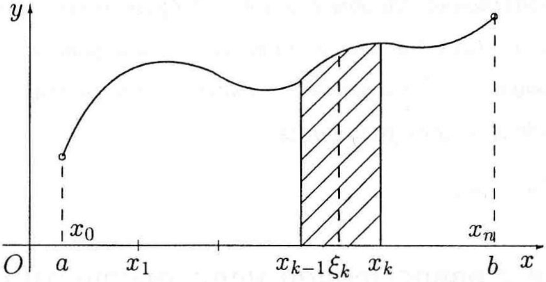
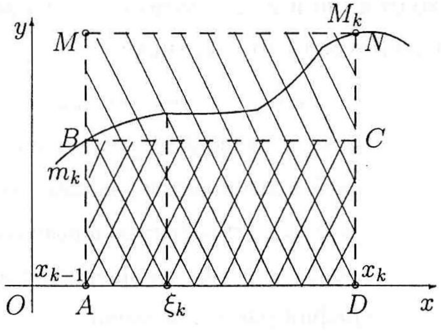


Рис. 7.3.

Очевидно, что интегральная сумма $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ есть сумма площадей прямоугольников с основаниями Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Обозначим через $m_k = \inf f(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $M_k = \sup f(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Составим сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$ и сумму $s = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$. Заметим, что в отличие от интегральной суммы σ, зависящей как от способа разбиения, так и от выбора точек ξ_k, суммы s и S зависят только от разбиения.



$$f(\xi_k)\Delta x_k = S_{\text{кр.трап.}ABND}$$

$$m_k\Delta x_k = S_{ABCD}$$

$$M_k\Delta x_k = S_{AMND}$$

Рис. 7.4.

Вся сумма s есть площадь наибольшей ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, которая целиком лежит внутри данной криволинейной трапеции, вся сумма S — это площадь наименьшей ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, которая содержит криволинейную трапецию. Практически очевидна следующая теорема:

Теорема 7.2 (необходимое и достаточное условие интегрируемости). *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была интегрируема на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, \varepsilon > 0$ существовало такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого выполнялось бы неравенство: $S - s < \varepsilon$.*

Иногда необходимое и достаточное условие записывается так: $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$, где λ — шаг разбиения.

(Без доказательства.)

7.3 Понятие о равномерной непрерывности функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную на множестве X. Это значит, что она непрерывна в каждой точке этого множества, например в точке x' и в точке x''. Из определения непрерывности в точке следует, что для

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta' : \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon; \quad |x - x'| < \delta',$$
$$\exists\,\delta'' : \ |f(x) - f(x'')| < \varepsilon; \quad |x - x''| < \delta''.$$

Очевидно, что для одного и того же $\varepsilon > 0$, δ будет, вообще говоря разным, следовательно δ зависит не только от ε, но и от x. Особенно наглядно это утверждение рассматривается на геометрической картинке.

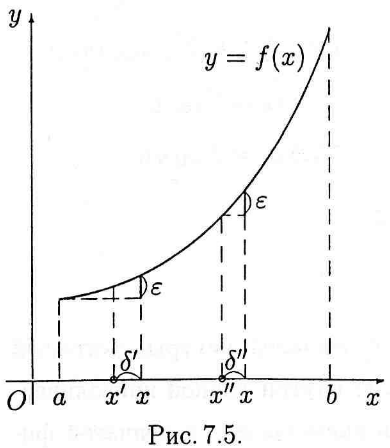


Рис. 7.5.

Очевидно, что для одного и того же ε число δ на разных участках оси Ox выбирается разным: там, где график растет быстро δ выбирается, вообще говоря, меньше, чем там, где график растет медленно.

Определение 7.3. *Функция $y = f(x)$ называется равномерно непрерывной на некотором множестве X, если для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует δ, зависящее только от ε ($\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$), такое что будет выполняться*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \quad \textit{для } \forall\, x',\ x'' \in X:\ |x'' - x'| < \delta.$$

Примеры. 1) $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 1$ ($x = [1, +\infty)$).

Тогда $|f(x'') - f(x')| = |\sqrt{x''} - \sqrt{x'}| = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}|x'' - x'|$ (мы воспользовались теоремой Лагранжа). Совершенно очевидно, что $\xi > 1$, значит

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x'' - x'| < \frac{1}{2}|x'' - x'|. \tag{7.1}$$

Зададим $\forall\, \varepsilon > 0$, и покажем, что $\exists\, \delta(\varepsilon)$. Выберем $\delta = 2\varepsilon$. Как только $|x''-x'| < \delta$, так обязательно $|f(x'')-f(x')| < \frac{1}{2}2\varepsilon$ в силу неравенства (8.17), следовательно, функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на множестве X.

2) $y = x^2$, $x \geqslant 1$, $X = [1, +\infty)$

Тогда $|f(x'') - f(x')| = |(x'')^2 - (x')^2| = 2\xi|x'' - x'|$.

Покажем, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной. Для этого, очевидно, достаточно показать, что хотя бы для некоторого ε_0 соответствующего δ не найдется, т. е. каким бы образом мы не выбрали число δ найдутся $x', x'' \in X$, такие что $|x'' - x'| < \delta$, $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$, где ε_0 — хотя бы одно единственное. Покажем, что в данном конкретном примере «плохим» окажется любое $\varepsilon > 0$. Выбираем $\forall\, \delta$ и $x' > \varepsilon/\delta$, $x'' = x' + \delta/2$. Тогда очевидно, что $|x'' - x'| = \delta/2 < \delta$, следовательно $\xi > \varepsilon/\delta$ (так как лежит между x' и x'') и

$$|f(x'') - f(x')| = 2\xi|(x'' - x')| > 2\frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Теорема 7.3 (Кантора). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.*

Доказательство (метод от противного). Предположим, что $y = f(x)$ не является равномерно непрерывной, т. е. $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, что для $\forall\, \delta\ \exists\, x', x'' \in [a, b]:\ |x'' - x'| < \delta$, а $|f(x'') - f(x') \geqslant \varepsilon_0$. Выберем $\delta = 1$. Найдутся точки

$x'_1, x''_1 \in [a,b]$, $|x''_1 - x'_1| < 1$; $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$. Выберем $\delta = 1/2$. Найдутся $x'_2, x''_2 \in [a,b]$

$$
\begin{aligned}
&|x''_2 - x'_2| < \frac{1}{2}; \quad |f(x''_2) - f(x'_2)| \geqslant \varepsilon_0,\\
&\delta = \frac{1}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\delta = \frac{1}{n}, \quad \exists\, x''_n, x'_n \in [a,b],\\
&|x''_n - x'_n| < \frac{1}{n}; \quad |f(x''_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0; \qquad (7.2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена, так как принадлежит сегменту $[a,b]$, и, следовательно, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся $\{x'_{n_k}\}$

$$\{x'_{n_k}\} \to c \in [a,b].$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{x''_{n_k}\}$. Выбираем x''_{n_k} с теми же n_k, тогда в силу неравенства $|x''_{n_k} - x'_{n_k}| < 1/n_k$ последовательность $\{x''_{n_k}\}$ так же стремится к c, $\{x''_{n_k}\} \to c$. Отсюда, в силу непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ имеем

$$\{f(x'_{n_k})\} \to f(c), \quad \{f(x''_{n_k})\} \to f(c)$$

и, следовательно $\{f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\} \to 0$. Но этого не может быть, так как в силу неравенства (7.2) $|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$, значит наше предположение неверно. Что и требовалось доказать. □

7.4 Классы интегрируемых функций

Используя теорему Кантора, перейдем к рассмотрению основных классов интегрируемых функций.

Теорема 7.4. *Всякая функция $y = f(x)$, непрерывная на $[a,b]$, интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство. Зададим $\forall\,\varepsilon > 0$. Используя необходимое и достаточное условие интегрируемости функции, покажем, что для этого ε найдется такое разбиение $[a,b]$ на части, что будет выполняться $S - s < \varepsilon$. Сначала воспользуемся теоремой Кантора и по заданному ε подберем такое δ, зависящее от ε и только от ε ($\delta(\varepsilon)$), что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, как только $|x'' - x'| < \delta$ (для $\forall\, x', x'' \in [a,b]$). Произведем теперь разбиение $[a,b]$ на части так, чтобы шаг разбиения λ ($\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$) был меньше δ и составим разность

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$

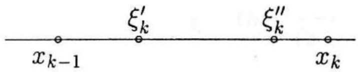


Рис. 7.6.

Из непрерывности функции на сегменте $[a,b]$ следует непрерывность ее на любом сегменте $[x_{k-1}, x_k]$, а потому в силу второй теоремы Вейерштрасса на этом сегменте она достигает своих точных границ, т. е. $M_k = f(\xi''_k)$, $m_k = f(\xi'_k)$, $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} [f(\xi''_k) - f(\xi'_k)]\Delta x_k < \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b - a) = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

($\Delta x_k < \delta$, значит $|\xi''_k - \xi'_k| < \delta$). Теорема доказана. □

Замечание. Теорема остается справедливой, если функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках $[a,b]$, кроме их конечного числа, где она терпит разрыв первого рода.

Теорема 7.5. *Если функция $y = f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и монотонна на нем, то она интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай монотонного возрастания функции. Разобьем $[a,b]$ произвольно на части, длины которых не превосходят $\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ (здесь ε — любое число).

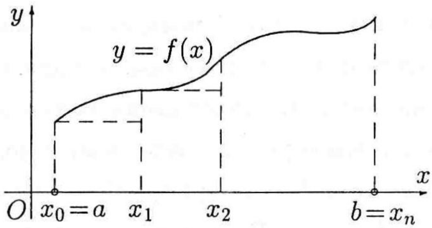


Рис. 7.7.

Составим разность:

$$S - s = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)} \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}[f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

так как $\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ и

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 + \ldots + M_n - m_n =$$
$$= f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1}) = f(b) - f(a).$$

Следовательно, согласно необходимому и достаточному условию интегрируемости функции (достаточности), мы получим утверждение теоремы. □

7.5 Свойства определенного интеграла

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то функции $f(x) \pm g(x)$,

$c \cdot f(x)$ также интегрируемы на $[a, b]$, причем:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx, \tag{7.3}$$

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx. \tag{7.4}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Сначала покажем интегрируемость функции $f(x) \pm g(x)$. Для этого составим интегральную сумму для этой функции:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k.$$

Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы (по условию), то обе суммы, стоящие в правой части, имеют пределы и они не зависят от способа разбиения сегмента $[a, b]$ и от выбора точек ξ_k. Поэтому сумма, стоящая в левой части, так же имеет предел, что и доказывает интегрируемость функции $f(x) \pm g(x)$. Кроме того, так как пределы сумм правой части равны соответственно $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\, dx$, то предел суммы, стоящей в левой части и равный $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx$, будет с другой стороны равен $\int\limits_a^b f(x)\, dx \pm \int\limits_a^b g(x)\, dx$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

4. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и $[c, d]$ — часть $[a, b]$, $[c, d] \subset [a, b]$, то функция $y = f(x)$ интегрируема на $[c, d]$. (Без доказательства.)

5. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема также на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7.5}$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $c \in (a, b)$. Покажем сначала интегрируемость $f(x)$ на $[a, b]$. Для этого зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется такое разбиение $[a, b]$, для которого будет выполняться $S - s < \varepsilon$.

Так как $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$, то для выбранного ε найдется разбиение $[a, c]$ на части, для которого $S' - s' < \varepsilon/2$. Аналогично с $[c, b]$: $S'' - s'' < \varepsilon/2$. Объединяя разбиения сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, мы получим такое разбиение $[a, b]$ на части, для которого будет иметь место неравенство

$$S - s = S' - s' + S'' - s'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Перейдем к доказательству равенства (7.5). Произведем разбиение $[a, b]$ на части произвольно, но так, чтобы точка $x = c$ была точкой деления. Тогда очевидно имеет место равенство

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где σ_1 — сумма, составленная для $[a, c]$; σ_2 — сумма, составленная для $[c, b]$. При $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$ σ_1 и σ_2 имеют конечные пределы, равные соответственно $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$. Следовательно, σ тоже имеет предел, равный $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и имеет место равенство (7.5).

2) Рассмотрим другое расположение точек $a < b < c$. Так как $[a, b] \subset [a, c]$, то интегрируемость $f(x)$ на $[a, b]$ следует из интегрируемости $f(x)$ на $[a, c]$ и свойства 4. Кроме того, из пункта 1 свойства 5 следует

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Отсюда, используя свойство 2, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Что и требовалось доказать. □

Свойства, выражающиеся с помощью неравенств

6. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и пусть $f(x) \geqslant 0$ для $\forall\, x \in [a, b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Доказательство. Составим произвольную интегральную сумму: $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. В силу условия теоремы каждое слагаемое этой суммы неотрицательно, следовательно, неотрицательной будет и вся сумма σ, а следовательно, и ее предел, равный определенному интегралу. □

Следствие. *Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и всюду на этом отрезке $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Функция $\varphi(x)$, очевидно, интегрируема на $[a, b]$ как разность интегрируемых функций. Кроме того, по условию теоремы $f(x) \geqslant 0$, следовательно в силу предыдущего свойства 6

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \geqslant 0, \qquad \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx \geqslant 0, \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если имеет место неравенство $f(x) \geqslant m$, $\forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant m(b-a)$.

В самом деле, в силу следствия

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b m\,dx = m(b-a).$$

□

Замечание (к свойству 6). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, неотрицательна на нем и не равна тождественно нулю, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant c > 0$, где c — некоторая константа.

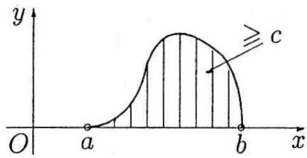


Рис. 7.8.

7. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом сегменте, причем выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{7.6}$$

Доказательство. Прежде всего докажем интегрируемость функции $|f(x)|$. Зададим $\forall \varepsilon > 0$. Тогда, так как $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то найдется такое разбиение этого сегмента, что будет выполняться неравенство $S - s < \varepsilon$. Обозначим через S', s' — суммы, составленные для $|f(x)|$. Легко показать, что имеет место неравенство $S' - s' \leqslant S - s < \varepsilon$, из которого следует интегрируемость функции $|f(x)|$.

Переходим к доказательству неравенства (7.6). Очевидно, что имеют место следующие неравенства: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Отсюда, в силу следствия к свойству 6 имеем $-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Отсюда, в силу свойств модуля ($-b \leqslant c \leqslant b \Longleftrightarrow |c| \leqslant b$) имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

8. Теорема о среднем

Теорема 7.6. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и M, m — точные границы этой функции на $[a,b]$. Тогда найдется такое число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, что будет выполняться равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \tag{7.7}$$

Доказательство. Имеем $m \leqslant f(x) \leqslant M$, поскольку M и m точные границы функции $f(x)$, тогда в силу свойства 6 будет выполняться

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad \text{или}$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M. \tag{7.8}$$

Обозначим $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ через $\mu \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. Кроме того, в силу неравенства (8.18) имеем $m \leqslant \mu \leqslant M$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $\gamma \in [a,b]$, такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\gamma)(b-a).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$. Кроме того, $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Следовательно, запишем теорему о среднем: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, $m \leqslant \mu \leqslant M$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то в силу второй теоремы Коши существует $\gamma \in [a,b]$ такая, что $f(\gamma)=\mu$, что и требовалось доказать. $\square$

7.6 Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и пусть c — некоторая фиксированная точка этого сегмента, не совпадающая с b, в силу свойства 4 $f(x)$ будет интегрируема на $[c,x]$ при любом $x \in [a,b]$ и следовательно можно рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом

$$\int\limits_c^x f(t)\,dt.$$

Обозначим этот интеграл через $F(x)$ и займемся изучением свойств функции $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt$.

Теорема 7.7 (о существовании первообразной у непрерывной функции). *Всякая функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$, имеет первообразную на этом сегменте, и одной из первообразных является $F(x)$.*

Доказательство. Докажем, что $F(x)$ имеет производную и $F'(x)=f(x)$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\int\limits_c^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_c^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\int\limits_c^x f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} xf(t)\,dt - \int\limits_c^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \frac{1}{\Delta x} f(\gamma)(x+\Delta x - x) = f(\gamma), \quad \gamma \in (x, x+\Delta x)$$

(по следствию к теореме о среднем). Сравнивая начало и конец равенства, и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. Попутно мы получили формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом:

$$\frac{d}{dx}\left[\int\limits_c^x f(t)\,dt\right] = f(x).$$

Замечание 2. Из предыдущих рассуждений следует, что если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$. Пусть $f(x)$ просто интегрируема на $[a,b]$. Покажем, что $F(x)$ непрерывна на этом сегменте. Оценим $F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \mu\Delta x$ в силу теоремы о среднем. Итак, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) \to 0$, что и означает непрерывность функции $F(x)$.

Следовательно, интеграл с переменным верхним пределом улучшает свойства подинтегральной функции.

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ — ее первообразная по доказанному. Пусть $\Phi(x)$ — какая-то другая первообразная той же функции, как известно, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + c$. Полагая в этом равенстве $x = a$, получим $\Phi(a) = c$, полагая в этом же равенстве $x = b$, получим

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + c; \quad \Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + \Phi(a).$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b. \tag{7.9}$$

Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, если известна любая первообразная подинтегральной функции. Она называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

7.7 Основные методы нахождения определенного интеграла

1. Замена переменных.

Теорема 7.8. *Пусть* $x = g(t)$ *непрерывно-дифференцируема на* $[\alpha, \beta]$, *сегмент* $[a, b]$ *является множеством значений этой функции, причем* $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. *Пусть, кроме того, функция* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$. *Тогда справедлива следующая формула замены переменных в определенном интеграле*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)\,dt. \tag{7.10}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что слова «функция $x = g(t)$ непрерывно-дифференцируема на $[\alpha, \beta]$» означают, что существует производная $g'(t)$ в любых точках сегмента, и эта производная непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Пусть $\Phi(x)$ есть некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда, в силу формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{7.11}$$

Легко показать, что функция $\Phi[g(t)]$ является первообразной для функции $f[g(t)] \cdot g'(t)$, так как

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'[g(t)] \cdot g'(t) = f[g(t)]g'(t)$$

(здесь мы использовали равенство $\Phi'(x) = f(x)$ и теорему и дифференцировании сложной функции). Отсюда в силу формулы Ньютона-Лейбница можно записать, что

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{7.12}$$

Сравнивая равенства (7.11) и (7.12) видим, что правые части у них совпадают, а следовательно, совпадают и левые, что и требовалось доказать. $\square$

2. Интегрирование по частям.

Теорема 7.9. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно-дифференцируемые на $[a,b]$ функции. Тогда справедливо следующее равенство:*

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

или

$$\int_a^b u(x)\,dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du. \tag{7.13}$$

Доказательство. Очевидно, что функция $u(x)\cdot v(x)$ является первообразной для функции $[u(x)\cdot v(x)]'$, но тогда в силу формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b [u(x)\cdot v(x)]'dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b.$$

Отсюда

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\,dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

Теорема доказана. □

Примеры. 1) Вычислить $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

Решение. Замена $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$. Пересчитаем пределы интегрирования:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies t = \frac{\pi}{4} = \alpha,$$
$$x = 1 \implies \sin t = 1 \implies t = \frac{\pi}{2} = \beta.$$

На отрезке $[\pi/4;\pi/2]$ функция $g(t)=\sin t$ определена, непрерывно-дифференцируема и ее значения не выходят за пределы $[\sqrt{2}/2;1]$, когда $t\in[\pi/4;\pi/2]$. Поэтому справедлива формула (7.10):

$$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=\left(-\operatorname{ctg} t-t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

2) Вычислить $\int\limits_{1}^{e}x^2\ln x\,dx$.

Решение. Положим $u=\ln x$, $dv=x^2\,dx$. Отсюда $du=\dfrac{dx}{x}$; $v=\dfrac{x^3}{3}$. Применим формулу интегрирования по частям (7.13):

$$\int\limits_{1}^{e}x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_{1}^{e}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{e^3\ln e}{3}-\frac{\ln 1}{3}-\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{e}x^2\,dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}x^3\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}+\frac{2e^3}{9}=\frac{1}{9}(1+2e^3).$$

7.8 Геометрические приложения определенного интеграла

7.8.1 Вычисление площадей

А) Площадь криволинейной трапеции.

Мы знаем, что к понятию определенного интеграла приводит задача о нахождении площади криволинейной трапеции (см. задачу 1). Итак, справедлива

Теорема 7.10. *Если $y=f(x)\geqslant 0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то площадь* *криволинейной трапеции*

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (7.14)$$

Следствие 1. *Если* $D = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y = f(x) < 0\}$, *то фигура* D^* *симметрична фигуре* D, *поэтому*

$$S_D = S_{D^*} = \int\limits_a^b (-f(x))\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

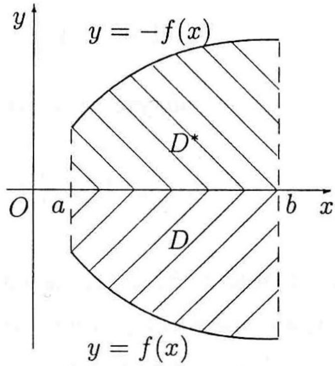


Рис. 7.9

Следствие 2. *Вычисление площади области* $D = \{(x,y) : \ a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$.

1. Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$. *Площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиком функций* $g(x)$ *и* $f(x)$.

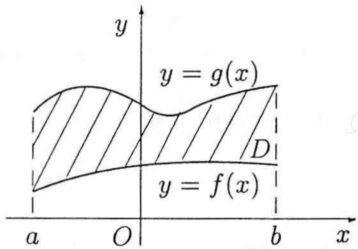


Рис. 7.10

Следовательно,

$$S_D = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,dx. \qquad (7.15)$$

2. Пусть $f(x)$ *не обязательно принимает положительные значения. Тогда построим графики функций* $y = g(x)+c$ *и* $y = f(x)+c$, c *— подобрано так, чтобы выполнялось условие* $f(x) + c \geqslant 0$ *для* $x \in [a, b]$.

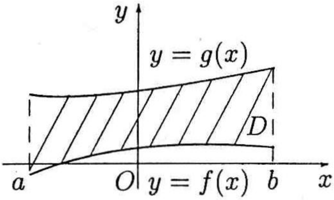


Рис. 7.11

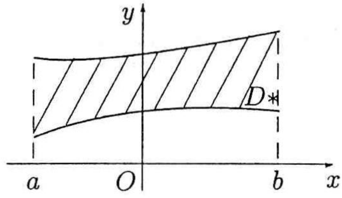


Рис. 7.12

Фигура D^* получается параллельным переносом фигуры D. Значит,

$$S_D = S_{D^*} = \int_a^b [g(x) + c - f(x) - c]\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Следствие 3. *Если $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$ в конечном числе точек, то площадь фигуры, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox и графиком функции $y = f(x)$, вычисляется по формуле*

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Сам интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ дает алгебраическую сумму площадей фигур, расположенных над и под осью Ox

$$\int_a^b f(x)\, dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

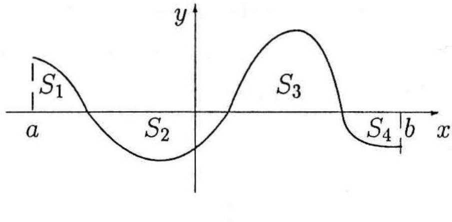


Рис. 7.13

В) Площадь криволинейного сектора.

Рассмотрим некоторую функцию $r = r(\varphi)$, определенную на $[\alpha, \beta]$. Будем считать, что r и φ — полярные координаты точки. Тогда любому $\varphi_0 \in [\alpha, \beta]$ соответствует $r_0 = r(\varphi_0)$ и, значит, точка $M_0(\varphi_0, r_0)$, где φ_0, r_0 — полярные координаты точки. Если φ будет меняться, «пробегая» весь

$[\alpha, \beta]$, то переменная точка M опишет некоторую кривую AB, заданную уравнением $r = r(\varphi)$.

Определение 7.4. *Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой AB, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.*

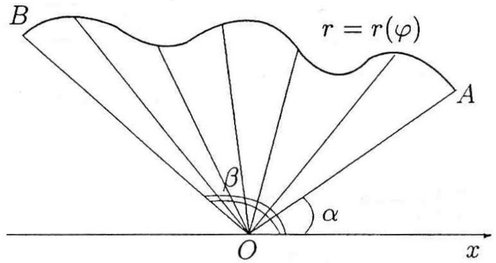


Рис. 7.14

Справедлива следующая

Теорема 7.11. *Если функция $r(\varphi) \geqslant 0$ и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле*

$$S_{\text{крив. сект.}} = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (7.16)$$

Доказательство. Разобьем весь $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на n частей $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_n = \beta$. Проведем лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда весь криволинейный сектор разобьется на n элементарных криволинейных секторов, площадь которых приближенно равна площади кругового сектора, ограниченного лучами $\varphi = \varphi_{k-1}$, $\varphi = \varphi_k$ и дугой окружности $r = r(\theta_k)$, θ_k — произвольная точка сегмента $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$.

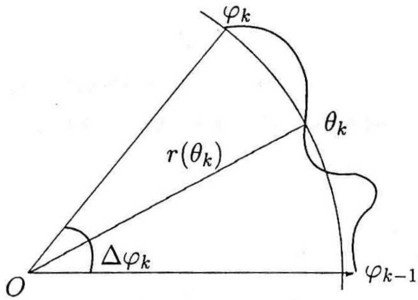


Рис. 7.15

Площадь элементарного криволинейного сектора будет приближенно равняться $\frac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$, $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. Таким образом, интересующая нас площадь

$$S \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\cdot\Delta\varphi_k.$$

Это равенство тем точнее, чем меньше $\Delta\varphi_k$.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta\varphi_k$ и рассмотрим

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\cdot\Delta\varphi_k.$$

Очевидно, что σ есть интегральная сумма, составленная для функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ и в силу непрерывности $r(\varphi)$ на $[\alpha,\beta]$ эта интегральная сумма имеет конечный предел при $\lambda \to 0$, независящий ни от разбиения сегмента $[\alpha,\beta]$ на части, ни от выбора точек θ_k; он равен $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$. Следовательно, окончательно

$$S_{\text{крив. сект.}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi,$$

что и требовалось доказать. □

7.8.2 Вычисление длины дуги

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ и $f(x)$ функция непрерывная на $[a,b]$.

Разобьем $[a,b]$ произвольно на n частей точками x_k: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$. Проведем прямые $x = x_k$, $k = 1,\ldots,n-1$. При этом дуга AB разобьется на n частей точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$,

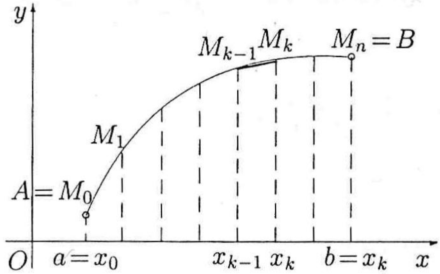


Рис. 7.16

$M_k, \ldots, M_n = B$ в направлении от A к B. Соединим эти точки отрезками прямых и получим ломаную линию $M_0M_1 \ldots M_n$. Обозначим длину этой ломаной через L_n, длину одного звена через $\Delta\ell_k$, $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta\ell_k$.

Определение 7.5. *Кривая AB называется спрямляемой, если существует конечный предел длин ломаных, вписанных в кривую AB при условии, что $\lambda \to 0$. Этот предел будет называть длиной дуги кривой и обозначать L_{AB}, то есть*

$$L_{AB} = \lim_{\lambda\to 0} L_n. \tag{7.17}$$

Теорема 7.12. *Если кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то AB является спрямляемой и*

$$L_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{7.18}$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольно на n частей, тогда AB разобьется на n частей точками $M_k(x_k, f(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим ломаную линию $M_0M_1 \ldots M_{k-1}M_k \ldots M_n$. Ее длина

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\ell_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

По теореме Лагранжа

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k],$$
$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(\xi_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x_k.$$

Последнее выражение является интегральной суммой для непрерывной, а, следовательно, и интегрируемой на $[a, b]$ функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Отсюда вытекает, что рассматриваемая кривая является спрямляемой и ее длина вычисляется по формуле

$$L_{AB} = \lim_{\lambda \to 0} L_n = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Пусть AB задана параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta; \quad A(x(\alpha), y(\alpha)); \quad B(x(\beta), y(\beta)).$$

Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно-дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$. Тогда формулу (7.18) можно записать так

$$L_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Сделаем замену переменных в этом интеграле $x = x(t)$, тогда $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$; $dx = x'(t)\, dt$ и, следовательно,

$$L_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2} \cdot x'(t)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

то есть

$$L_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{7.19}$$

Следствие 2. *Пусть кривая AB задается в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Можно свести это задание кривой к параметрическому заданию*

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Тогда из формулы (7.19) получим

$$L_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \tag{7.20}$$

Дифференциал дуги.

Рассмотрим дугу AB, заданную уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta].$

Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$. Выберем некоторую переменную точку $M \in AB$. Ей соответствует значение параметра t. Длину переменной дуги AM обозначим $L(t)$ и согласно формуле (7.19)

$$L(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}\, d\tau.$$

Так как подинтегральная функция непрерывна, то $L(t)$, как интеграл с переменным верхним пределом, есть функция дифференцируемая и

$$L'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}.$$

Или

$$L'^2(t) = \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \implies [L'(t)\, dt]^2 = [\varphi'(t)\, dt]^2 + [\psi'(t)\, dt]^2 \implies$$
$$\implies dL^2 = d\varphi^2 + d\psi^2 \tag{7.21}$$

или

$$\left(\frac{d\varphi}{dL}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dL}\right)^2 = 1.$$

Замечание. Все сказанное ранее для плоских дуг распространяется и на пространственные дуги:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = g(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $g(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, то

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + g'^2(t)}\, dt.$$

7.8.3 Вычисление объемов с помощью определенного интеграла

1) Вычисление объема по заданной площади поперечного сечения.

Рассмотрим некоторое тело T. Возьмем произвольное x и проведем плоскость, перпендикулярно оси Ox. В сечении получим плоскую фигуру. Предположим, что площадь этой фигуры $S(x)$ нам известна и функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Найдем объем этого тела T.

Разобьем сегмент $[a, b]$ произвольно на n частей $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n$. Через каждую точку деления x_k проведем плоскость перпендикулярную оси Ox. При этом все тело T разобьется на определенные элементарные слои, вычислим приближенно объем V_k одного слоя. Для этого выберем произвольную точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную оси Ox. Площадь плоской фигуры, полученной в сечении, равна $S(\xi_k)$. Заменим теперь элементарный слой цилиндром с основанием, площадь которого есть $S(\xi_k)$, и высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Тогда $V_k \approx S(\xi_k)\Delta x_k$ и, следовательно,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

Полученная сумма есть, очевидно, интегральная сумма, составленная для непрерывной функции $S(x)$, $x \in [a, b]$. Следовательно эта интегральная сумма имеет конечный предел при $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$, независящий ни от способа разбиения $[a, b]$ ни от выбора точек ξ_k. Итак, окончательно

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{7.22}$$

2) Объем тела вращения.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Вычислим объем тела, полученного в результате вращения кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Очевидно, что эта задача является частным случаем уже рассмотренной в п. 1 задачи. Действительно, проведя через произвольную точку $x \in [a, b]$ сечение плоскостью перпендикулярной оси Ox, мы получим круг, радиус которого равен $f(x)$ и, значит, площадь этого сечения $S(x) = \pi f^2(x)$. Таким образом, используя формулу (7.22), получим

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx. \tag{7.23}$$

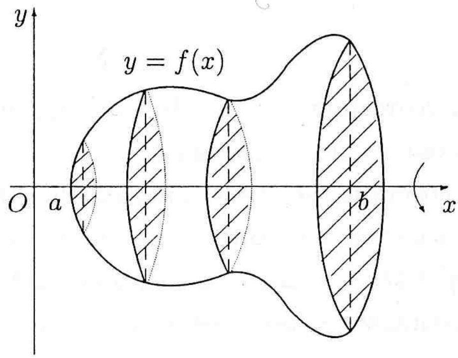


Рис. 7.17

Замечание. Аналогично можно получить формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox:

$$V_{Oy} = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\, dy. \tag{7.24}$$

7.8.4 Площадь поверхности вращения

Рассмотрим поверхность, образованную вращением кривой $y = f(x)$ (функция $y = f(x) \geqslant 0$ непрерывно-дифференцируемая на $[a, b]$) вокруг оси Ox. Найдем площадь поверхности вращения. Сначала выясним, что будем понимать под площадью поверхности вращения тела.

Разобьем сегмент $[a, b]$ произвольным образом на n частей

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

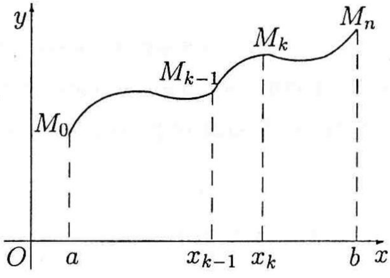


Рис. 7.18

Каждой точке x_k соответствует точка $M_k(x_k, f(x_k))$ на кривой. Соединив точки M_k, получим ломаную, вписанную в данную кривую.

Рассмотрим для простоты одно звено ломаной $M_{k-1}M_k$. При вращении его вокруг оси Ox получим усеченный конус, площадь поверхности которого равна $2\pi\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\Delta\ell_k$, где $\Delta\ell_k$ — длина отрезка $\overline{M_{k-1}M_k}$. Через P_n обозначим сумму площадей поверхностей всех конусов

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\frac{y_{k-1}+y_k}{2} \cdot \Delta\ell_k.$$

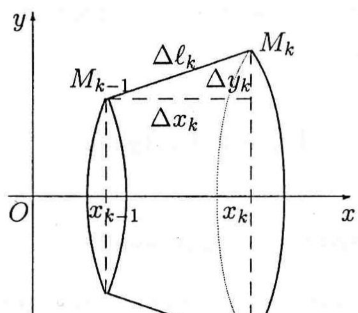


Рис. 7.19

Определение 7.6. *Если существует конечный предел P_n при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$, то его назовем площадью поверхности тела вращения* *и обозначим P:*

$$P = \lim_{\lambda \to 0} P_n. \tag{7.25}$$

Теорема 7.13. *Если функция $y = f(x)$ непрерывно-дифференцируема на $[a, b]$, то площадь поверхности тела вращения P вычисляется по формуле*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{7.26}$$

Доказательство. Разобьем $[a, b]$ произвольно на n частей. Согласно (7.25) составим P_n

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta \ell_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta \ell_k.$$

Очевидно

$$\Delta \ell_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k.$$

Воспользуемся теоремой Лагранжа:

$$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Тогда

$$\Delta \ell_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k.$$

Таким образом

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x_k$$

или

$$P_n = 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) - f(\xi_k)}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k) - f(\xi_k)}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x_k \right\}.$$

Очевидно, что последнее слагаемое есть интегральная сумма, составленная для функции $2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Покажем, что первые два слагаемых стремятся к нулю при $\lambda \to 0$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на нем и, следовательно, $\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2} < M$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на нем, и поэтому для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad |x'' - x'| < \delta, \quad \forall\, x', x'' \in [a,b].$$

Так как $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$, то можно считать, что $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, а потому и подавно $|x_k - \xi_k| < \delta$. Следовательно, $|f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ и значит

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k) - f(\xi_k)}{2} \cdot \sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot M.$$

Аналогично оценивается и первое слагаемое. Итак, находя предел для выражения P_n при $\lambda \to 0$, мы получим формулу (7.26). Теорема доказана. $\square$

Замечание. 1) Если поверхность получена вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, причем $\psi(t) \geqslant 0$ и $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то делая замену переменных в (7.26) $x = \varphi(t)$, имеем

$$P_{Ox} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

2) Если кривая AB задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha,\beta]$, где $r(\varphi)$ непрерывно-дифференцируемая на $[\alpha,\beta]$, то это сводится к параметрическому заданию кривой $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ и значит,

$$P_{Ox} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих понятие определенного интеграла.

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $3x^2+2y-4 = 0$ и осью Ox.

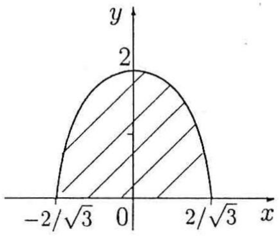


Рис. 7.20

Решение. Данная кривая есть парабола, ее уравнение легко привести к виду $-3x^2 = 2(y - 2)$, то есть вершина в точке $(0, 2)$. Точки пересечения с осью Ox найдем из уравнения $3x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x = \pm 2/\sqrt{3}$.

$$S = \int\limits_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} y(x)\,dx = \int\limits_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} \frac{4 - 3x^2}{2}\,dx = 2x\Big|_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2}\Big|_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

Пример 12. Найти площадь, ограниченную первой аркой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t) \end{cases} \text{ и осью } Ox.$$

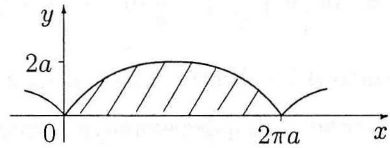


Рис. 7.21

Решение. Из уравнения кривой $dx = a(1 - \cos t)\,dt$. Первая арка циклоиды соответствует изменению параметра t от 0 до 2π. Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} dt - 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos t + \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= a^2 t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 \sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{4} \sin 2t\Big|_0^{2\pi} = a^2 2\pi + \frac{a^2}{2} 2\pi = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

Пример 13. Найти площадь, ограниченную кривой $r = 4(1 + \cos\varphi)$.

Решение. В силу симметричности фигуры относительно оси Ox, будем вычислять площадь верхней части. Площадь заключена между двумя лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

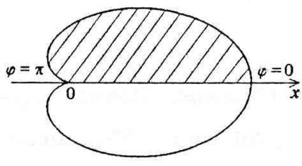


Рис. 7.22

$$S = 2\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi r^2(\varphi)d\varphi = \int\limits_0^\pi 16(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 16\int\limits_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 16\left[\varphi\Big|_0^\pi + 2\sin\varphi\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (1+\cos 2\varphi)d\varphi\right] =$$

$$= 16\left[\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^\pi\right] = 24\pi.$$

Пример 14. Найти длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получаем $y' = -y^{1/3}/x^{1/3}$. Поэтому длина дуги одной четверти астроиды вычисляется по формуле

$$\frac{1}{4}L = \int\limits_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx =$$

$$= \int\limits_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx = \int\limits_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx = \frac{3}{2}a.$$

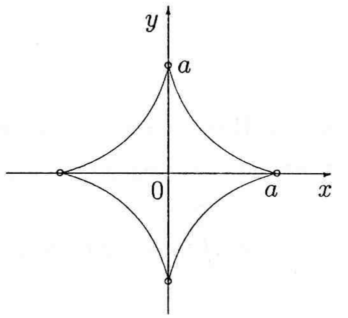


Рис. 7.23

Пример 15. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}.$

Решение. Имеем $x' = dx/dt = a(1-\cos t)$, $y' = dy/dt = a\sin t$, поэтому

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Пример 16. Найти длину всей кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

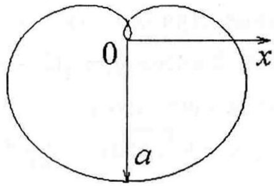


Рис. 7.24

Решение. Вся кривая описывается точкой (φ, r) при изменении φ от 0 до 3π. Имеем $r' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, поэтому длина всей дуги кривой

$$L = \int\limits_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\gamma}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

Пример 17. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2 + (y-b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси Ox.

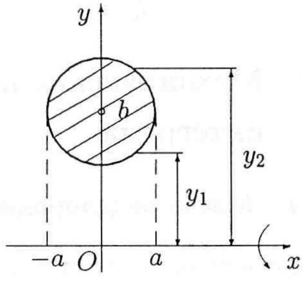


Рис. 7.25

Решение. Разрешим уравнение круга относительно y: $y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$, $y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$. Поэтому

$$V_{Ox} = \pi\int\limits_{-a}^{a}\left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right]dx = 4\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Сделаем замену переменных $x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t\,dt$. Пересчитаем пределы интегрирования $x = -a \longrightarrow t = -\pi/2$; $x = a \longrightarrow t = \pi/2$. Отсюда имеем

$$V_{Ox} = 4\pi b\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)}\,a\cos t dx = 4\pi a^2 b\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt =$$

$$= 2\pi a^2 b\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt = 2\pi a^2 bt\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \pi a^2 b\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi^2 a^2 b.$$

Пример 18. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox петли кривой $9y^2 = x(3 - x^2)$.

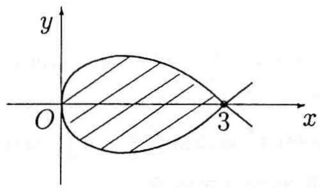


Рис. 7.26

Решение. Для верхней части кривой при $0 \leqslant x \leqslant 3$ имеем $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Отсюда дифференциал дуги $d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$. Тогда

$$P_{Ox} = 2\pi \int\limits_0^3 \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x} \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{\pi}{3} \int\limits_0^3 (3 - x)(x + 1)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} \int\limits_0^3 (2x - x^2 + 3)\, dx = 3\pi.$$

7.9 Механические приложения определенного интеграла

7.9.1 Масса неоднородного стержня

Пусть на сегменте $[a, b]$ расположен неоднородный стержень, линейная плотность которого $\rho(x)$ есть функция непрерывная на $[a, b]$. Напомним, что $\rho(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta m / \Delta x$, где Δm — масса части стержня на сегменте $[x, x + \Delta x]$. Разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, на каждом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольно точку ξ_k и предположим, что на этом сегменте плотность есть величина постоянная, равная $\rho(\xi_k)$. Тогда масса m_k этого сегмента будет равняться приближенно произведению $\rho(\xi_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, а масса m всего стержня приближенно запишется так: $m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k$. Для нахождения точного значения m надо перейти к пределу в последнем равенстве при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$. Окончательно получим

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)\, dx. \tag{7.27}$$

Заметим, что этот интеграл существует, так как $\rho(x)$ непрерывная на $[a, b]$.

7.9.2 Координаты центра тяжести

1) Рассмотрим сначала на плоскости Oxy систему материальных точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$,..., $A_n(x_n, y_n)$, массы которых равны соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Обозначим через (x_c, y_c) координаты центра тяжести этой системы. Воспользуемся известным фактом из курса механики и запишем следующие равенства

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \frac{M_y}{m}, \\ y_c &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_ky_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \frac{M_x}{m}, \end{aligned} \tag{7.28}$$

где $M_y = \sum\limits_{k=1}^{n} m_kx_k$ есть статический момент системы относительно оси Oy, $M_x = \sum\limits_{k=1}^{n} m_ky_k$ — статический момент системы относительно оси Ox, $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$.

Ниже мы используем эти формулы для нахождения координат центров тяжести различных фигур.

2) Центр тяжести плоской кривой.

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на сегменте $[a, b]$; и пусть эта кривая есть материальная линия, ее линейная плотность ρ есть величина постоянная (кривая однородна). Разобьем кривую произвольно на n частей точками $A = A_0, A_1, \ldots$, $A_n = B$, длины дуг A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ равны соответственно Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n. Массы m_k этих дуг будут равняться произведению длин на

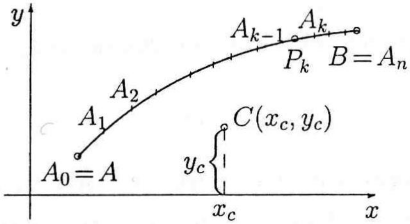


Рис. 7.27

плотность ρ: $m_k = \rho\Delta s_k$. На каждой дуге $A_{k-1}A_k$ выберем $m_k = \rho\Delta s_k$. На каждой дуге $A_{k-1}A_k$ выберем произвольно точку $P_k[\xi_k, f(\xi_k)]$ и будем считать, что масса этой дуги $\rho\Delta s_k$ сосредоточена в точке P_k. При этом кривую AB можно приближенно заменить системой материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с расположенными в них массами $\rho\Delta s_1$, $\rho\Delta s_2$, …, $\rho\Delta s_n$. Отсюда, в силу равенства (7.28), для координат центра тяжести плоской кривой (x_c, y_c) получаем следующие приближенные равенства:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \rho\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho\Delta s_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k}, \quad y_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\rho\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho\Delta s_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k}.$$

Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то все суммы, стоящие в числителе и знаменателе обеих дробей имеют пределы при $\lambda \to 0$, равные пределам соответствующих интегральных сумм. Таким образом получаем окончательно

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int\limits_a^b x\,ds}{\int\limits_a^b ds} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{S}; \\ y_c &= \frac{\int\limits_a^b f(x)\,ds}{\int\limits_a^b ds} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{S}, \end{aligned} \tag{7.29}$$

где S — длина кривой AB.

Из формулы для y_c получаем, что $S \cdot y_c = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ или, умножая обе части последнего равенства на 2π,

$$2\pi y_c \cdot S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

где правая часть есть площадь поверхности, полученной при вращении кривой AB вокруг оси Ox, а $2\pi y_c$ есть длина окружности радиуса y_c.

Таким образом, имеет место

Теорема 7.14 (Первая теорема Гульдена). *Площадь поверхности тела, полученного при вращении плоской кривой вокруг некоторой не пересекающей ее оси, расположенной в той же плоскости, равна длине окружности, описанной центром тяжести кривой, умноженной на длину этой кривой.*

Пример. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y > 0$.

Решение. Имеем $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $dS = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$. Тогда

$$x_c = \frac{a\int\limits_{-a}^{a} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_{-a}^{a}}{\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi a} = 0;$$

$$y_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi a}.$$

3) Центр тяжести криволинейной трапеции.

Как обычно, разобьем криволинейную трапецию на элементарные трапеции с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и заменим каждую такую трапецию прямоугольником с тем же основанием и высотой $f(\xi_k)$, где ξ_k средняя

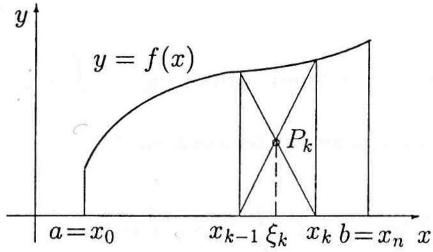


Рис. 7.28

точка $[x_{k-1}, x_k]$. Масса прямоугольника равна $\rho \cdot f(\xi_k)\Delta x_k$ (ρ есть поверхностная плотность, т. е. масса, приходящаяся на единицу площади). Из механики известно, что центр тяжести прямоугольника лежит в точке пересечения его диагоналей и, следовательно, координаты центра тяжести k-го прямоугольника равны ξ_k, $\frac{1}{2}f(\xi_k)$. Будем считать, что масса этого прямоугольника находится в точке $P_k(\xi_k, \frac{1}{2}f(\xi_k))$. Таким образом, трапецию можно приближенно заменить системой материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $\rho f(\xi_1)\Delta x_1$, $\rho f(\xi_2)\Delta x_2, \ldots$, $\rho f(\xi_n)\Delta x_n$, и, следовательно, используя равенства (7.28), получим приближенные равенства

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \rho f(\xi_k)\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho f(\xi_k)\Delta x_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\rho f(\xi_k)\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho f(\xi_k)\Delta x_k} = \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}.$$

Переходя к пределу в последних равенствах при $\lambda \to 0$, получаем окончательно

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x f(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int\limits_a^b x f(x)\,dx}{S}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{S}, \tag{7.30}$$

где S — площадь всей трапеции.

Как и в предыдущем случае, из второго равенства (7.30) имеем равенство

$$2\pi y_c \cdot S = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

которое формулируется так

Теорема 7.15 (Вторая теорема Гульдена). *Объем тела вращения криволинейной трапеции вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в той же плоскости, равен площади этой трапеции, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести трапеции при этом вращении.*

4) Центр тяжести неоднородного стержня.

Разбивая, как всегда, сегмент $[a, b]$ на части (см. I), массу m_k части стержня $[x_{k-1}, x_k]$ найдем по формуле (7.27)

$$m_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx = \rho(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \rho(\xi_k)\Delta x_k$$

(здесь мы воспользовались теоремой о среднем, ξ_k некоторая точка сегмента $[x_{k-1}, x_k]$). Будем считать, что эта масса сосредоточена именно в точке $P_k(\xi_k)$. Таким образом мы вновь получаем систему точек на стержне $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $\rho(\xi_1)\Delta x_1, \rho(\xi_2)\Delta x_2, \ldots, \rho(\xi_n)\Delta x_n$. Рассуждая как в предыдущих пунктах, можем записать

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\xi_k\Delta x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k}$$

или, окончательно, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}$$

(x_c — координаты центра тяжести неоднородного стержня).

7.9.3 Работа переменной силы

Пусть материальная точка M движется по некоторой прямой OS под действием силы F, направление которой совпадает с направлением движения. Определить работу, произведенную силой, при перемещении точки из положения $s = a$ в положение $s = b$.

Если F постоянна, то, как известно, работа A находится по формуле

$$A = F(b - a).$$

Предположим, что F зависит от положения точки, т. е. $F = F(s)$, где $F(s)$ непрерывна на $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ на n произвольных частей $[s_{k-1}, s_k]$, выберем произвольно точку $\xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$ и будем считать, что на $[s_{k-1}, s_k]$ $F(s)$ постоянна и равна $F(\xi_k)$. Тогда работа A будет приближенно равна

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k, \quad \Delta s_k = s_k - s_{k-1}.$$

Отсюда при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta s_k \to 0$ (учитывая, что $F(s)$ непрерывна на $[a, b]$) находим

$$A = \int\limits_a^b F(s)\, ds.$$

Глава 8

Несобственный интеграл

8.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$, тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, t]$, $t \geqslant a$, а следовательно, существует интеграл $\int\limits_a^t f(x)\,dx$.

Этот интеграл является функцией своего верхнего предела $F(t)$, определенной на промежутке $[a, +\infty)$ и при $t \to +\infty$ может стремиться к определенному пределу.

Определение 8.1. *Несобственным интегралом* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *от функции* $f(x)$, *непрерывной при* $a \leqslant x < +\infty$, *называется предел определенного интеграла* $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$, *когда* $t \to +\infty$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

Если предел (8.1) существует и конечен, то несобственный интерграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называют сходящимся и говорят, что его значение равно значению предела.

Если же $\int\limits_a^t f(x)\,dx$ не имеет предела при $t \to +\infty$ или этот предел бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется расходящимся и числового значения не имеет.

В случае, когда $f(x) > 0$ сходящийся, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ можно геометрически истолковать как площадь полубесконечной криволинейной трапеции (рис. 8.1).

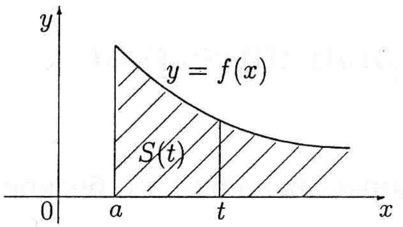


Рис. 8.1.

Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то площадь такой трапеции выражается определенным числом $S = \lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$. Если же интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то площадь будет равна ∞.

Аналогичным образом для функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(-\infty; b]$, определяется несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{b} f(x)\,dx, \tag{8.2}$$

если этот предел существует и конечен.

Для функции $f(x)$, непрерывной на всей числовой оси, несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется равенством:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{t}^{b} f(x)\,dx, \tag{8.3}$$

где c — любое число.

При этом несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, если каждый из интегралов в правой части равенства (8.3) сходится. Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется расходящимся.

Определение 8.2. *Говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится в смысле главного по Коши значения, если существует конечный предел*

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx = v.\,p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{8.4}$$

Очевидно, что из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, *всегда следует его сходимость в смысле главного значения. Если же несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то он может иметь главное значение по Коши.*

Рассмотрим основные свойства, которыми обладают несобственные интегралы.

1°. **Формула Ньютона-Лейбница.** Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная, то

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Для любого $t\in[a,+\infty)$ по формуле Ньютона-Лейбница имеем $\int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx = F(t)-F(a)$. Тогда из формулы (8.1) следует, что

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

□

Аналогично при выполнении соответствующих условий справедливы формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}, \tag{8.6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{8.7}$$

2°. **Линейность интеграла.** Если несобственные интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\,dx$ также сходится и

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\,dx = \alpha \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Доказательство. На основании соответствующих свойств предела и линейности определенного интеграла имеем

$$\int\limits_{a}^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{a}^{t} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\alpha \int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx + \beta \int\limits_{a}^{t} g(x)\,dx\right] = \alpha \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx +$$

$$+\beta \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{a}^{t} g(x)\,dx = \alpha \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

□

Замечание. Очевидно, что свойством линейности обладают также интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3°. **Интегрирование неравенств.** Если несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся и для всех $x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{8.8}$$

Доказательство. В силу соответствующего свойства определенного интеграла для любого $t \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^{t} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{t} g(x)\,dx.$$

Перейдя в нем к пределу при $t \to +\infty$, получим неравенство (8.8) □

Примеры. 1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]\Big|_0^{+\infty} = -0 + 1 = 1.$$

Таким образом, данный интеграл сходится.

2. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$, где $a > 0$ сходится при $m > 1$ и расходится при $m \leqslant 1$.

Решение. При $m > 1$ имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \left[\frac{1}{(-m+1)x^{m-1}}\right]_a^{+\infty} = \frac{1}{(m-1)a^{m-1}},$$

т. е. заданный интеграл сходится.

При $m < 1$ имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \left[\frac{1}{(-m+1)x^{m-1}}\right]_a^{+\infty} = \left[\frac{x^{1-m}}{1-m}\right]_a^{+\infty} = \infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Наконец, при $m = 1$ получаем

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_a^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln a = \infty,$$

т. е. интеграл также расходится.

3. Найти главное значение по Коши интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение. Имеем

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{-t}^{t} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \ln|x|\Big|_{-t}^{t} = \lim_{t\to+\infty} [\ln t - \ln|-t|] = 0.$$

Таким образом, данный интеграл сходится в смысле главного по Коши значения.

8.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и не ограничена вблизи b. Тогда функция непрерывна, а значит, интегрируема на любом отрезке $[a, t]$, $a \leqslant t < b$. Следовательно, существует интеграл $\int\limits_a^t f(x)\,dx$, который является функцией своего верхнего предела t, определенной на промежутке $[a, b)$.

Определение 8.3. *Несобственным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *от функции* $f(x)$, *непрерывной при* $a \leqslant x < b$ *и имеющей разрыв 2-го рода при* $x = b$, *называется предел определенного интеграла* $\int\limits_a^t f(x)\,dx$ *при* $t \to b - 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-0} \int\limits_a^t f(x)\,dx. \tag{8.9}$$

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называется сходящимся, а этот предел является его числовым* *значением. Если же предел не существует или равен ∞, то несобственный интеграл называется расходящимся и числового значения не имеет.*

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл (8.9) можно геометрически истолковать, как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (рис. 8.2).

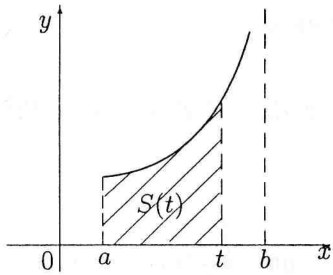


Рис. 8.2.

Аналогично для функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервале $(a, b]$ и неограниченной вблизи a, вводится понятие несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Полагают, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+0} \int\limits_t^b f(x)\,dx, \tag{8.10}$$

если этот предел существует и конечен.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ всюду, кроме некоторой точки c, $a < c < b$, и не ограничена вблизи c. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{8.11}$$

При этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, если каждый из интегралов в правой части равенства сходится. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется расходящимся.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций имеет место формула, аналогичная формуле Ньютона-Лейбница. Пусть, например, функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и не ограничена вблизи b. Обозначая через $F(x)$ первообразную функции $f(x)$ на $[a, t]$, по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a) = F(x)\Big|_a^t.$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0} F(t) - F(a). \qquad (8.12)$$

Для вычисления несобственных интегралов более удобной оказывается формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) - F(a), \qquad (8.13)$$

где ε — бесконечно малая положительная величина.

Аналогично, для несобственных интегралов (8.10) и (8.11) получаются формулы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon), \qquad (8.14)$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \qquad (8.15)$$

Для интеграла (8.15) можно ввести главное значение по Коши.

Определение 8.4. *Говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *($c \in (a, b)$ — точка разрыва 2-го рода для $f(x)$) сходится в смысле главного* *по Коши значения, если существует конечный предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]=v.\,p.\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{8.16}$$

Заметим, что формула (8.15) совпадает с формулой (8.16), если $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$. Следовательно, сходящийся несобственный интеграл всегда будет иметь главное значение по Коши.

Примеры. 4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1/2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\sqrt{1-2x})\Big|_0^{1/2-\varepsilon}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-2(1/2-\varepsilon)}+1=1.$$

5. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^2\frac{dx}{1-x}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln|1-x|)\Big|_{1+\varepsilon}^2=-\ln 1+\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon=-\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

6. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}+\int\limits_1^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{(1-x)^2}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon_2}^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{1-x}\Big|_{1+\varepsilon_2}^2=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{\varepsilon_1}-1-1+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{\varepsilon_2}=\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x-2}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{x-2} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x-2} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_1^{2-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-2} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{2+\varepsilon_2}^3 \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \ln|x-2| \Big|_1^{2-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \ln|x-2| \Big|_{2+\varepsilon_2}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \ln\varepsilon_1 - \ln|-1| + \ln 1 - \lim_{\varepsilon_2\to 0} \varepsilon_2 = \infty,$$

т. е. данный интеграл расходится.

Выясним, сходится ли он в смысле главного значения. По формуле (8.16) получаем

$$\text{v. p.} \int\limits_1^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} + \int\limits_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-2} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln|x-2| \Big|_1^{2-\varepsilon} + \ln|x-2| \Big|_{2+\varepsilon}^3 \right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon \right] = 0.$$

Таким образом, главное значение исходного интеграла по Коши равно 0.

8.3 Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций

Во многих приложениях несобственных интегралов часто бывает достаточным знать, сходится или расходится несобственный интеграл; числовое же его значение не всегда бывает существенным. Установим сейчас два признака, которые позволяют выяснить, сходится или расходится несобственный интеграл, не вычисляя его. Прежде сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 8.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на полуинтервале $[a,b)$ ($b=+\infty$ или $b\in\mathbb{R}$ — точка разрыва 2-го рода для $f(x)$). Тогда для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточ-*

но, чтобы множество всех интегралов $\int\limits_a^t f(x)\,dx$, $t \in [a,b)$, *было ограничено сверху, т. е. чтобы существовала такая постоянная* $c > 0$, *что для всех* $t \in [a,b)$ *выполнялось бы неравенство*

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx \leqslant c.$$

Доказательство. Обозначим $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$. Если $a \leqslant t_1 < t_2 < b$, то

$$F(t_2) = \int\limits_a^{t_2} f(x)\,dx = \int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx = F(t_1),$$

так как $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geqslant 0$ в силу неотрицательности функции $f(x)$. Следовательно, функция $F(t)$ возрастает на полуинтервале $[a,b)$.

По теореме о пределе монотонной функции конечный предел $\lim\limits_{t\to b}\int\limits_a^t f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда функция $F(t)$ ограничена сверху. Согласно определению несобственного интеграла, данное условие равносильно сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. □

Теорема 8.1 (первый признак сравнения). *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на полуинтервале* $[a,b)$ *и* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *для любого* $x \in [a,b)$. *Тогда:*

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. 1. Пусть сходится $\int\limits_a^b g(x)\,dx$. Тогда, в силу леммы существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $t \in [a,b)$ $\int\limits_a^t g(x)\,dx \leqslant c$. По свойству определенного интеграла из неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ следует, что $\int\limits_a^t f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^t g(x)\,dx \leqslant c$ для любого $t \in [a, b)$. А это означает, в силу той же леммы, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2. Пусть расходится $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если предположить, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то в силу уже доказанного $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также сходится, а это противоречит условию. Таким образом, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится. □

Теорема 8.2 (второй признак сравнения). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и неотрицательны на полуинтервале $[a, b)$, $g(x) \neq 0$ для любого $x \in [a, b)$ и существует конечный ненулевой предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)/g(x) = K$ $(0 < K < \infty)$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится или расходится одновременно.*

Доказательство. 1. Из того, что K является пределом функции $f(x)/g(x)$ при $x \to b$ следует существование такого $t \in [a, b)$, что для любого $x \in (t, b)$ справедливо неравенство $f(x)/g(x) < K + 1$ или

$$f(x) < (K + 1)g(x). \tag{8.17}$$

Пусть сходится $\int\limits_a^b g(x)\,dx$. По свойству линейности несобственного интеграла интеграл $\int\limits_a^b (K + 1)g(x)\,dx$ также сходится. Следовательно, в силу неравенства (8.17) и по первому признаку сравнения интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2. Пусть теперь интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится. Поскольку $K > 0$, существует такое число K_1, что $0 < K_1 < K$. Из того, что $\lim\limits_{x \to b} f(x)/g(x) = K$ следует существование такого $t \in [a, b)$, что для всех $x \in (t, b)$ выполняется неравенство $f(x)/g(x) > K_1$, т. е.

$$f(x) > K_1 g(x). \tag{8.18}$$

Отсюда в силу расходимости $\int\limits_a^b K_1 g(x)\,dx$ следует по первому признаку сравнения расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. □

Для исследования сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций часто используют следующий признак, который мы приведем без доказательства.

Теорема 8.3 (третий признак сравнения). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b)$, $g(x) \geqslant 0$ и $|f(x)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b)$. Тогда из сходимости $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

При применении признаков сравнения для исследования сходимости несобственных интегралов подынтегральную функцию обычно сравнивают с функциями

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha}, \quad \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad \frac{1}{x^\alpha}.$$

Ранее было показано, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Аналогично можно показать, что несобственные интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$.

Примеры. 8. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$.

Решение. Имеем

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{2}(1-x)^{1/4}} \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

Следовательно, так как $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$ сходится, то по 2-му признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

9. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, так как $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то по 2-му признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию с функцией $1/x^2$. Очевидно, что

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{для всех} \quad x \in [1, +\infty).$$

Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится т. к. $\alpha = 2 > 1$. Следовательно, по третьему признаку сравнения сходится и данный интеграл.

Литература

[1] *Демидович Б. П.* Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов). — М.: Астрель-АСТ, 2002.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. П.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1967.

[3] *Щипачев В. С.* Высшая математика. — М.: Высшая школа, 1990.

[4] *Гаврилова Р. М., Карапетянц Н. К.* Производная и дифференциал. Методические указания для студентов 1 курса физического факультета (мат. анализ № 5). — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1982.

[5] *Гаврилова Р. М., Карапетянц Н. К.* Приложение производной. Методические указания для студентов 1 курса физического факультета (мат. анализ № 6). — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1984.

[6] *Гаврилова Р. М., Карапетянц Н. К.* Неопределенный интеграл. Методические указания для студентов 1 курса физического факультета (математ. анализ № 8). — Ростов н/Д: УПЛ РГУ, 1983.

[7] *Гаврилова Р. М., Говорухина А. А., Карташева Л. В., Костецкая Г. С., Радченко Т. Н.* Приложения определенного интеграла. Методические указания и индивидуальные задания для студентов 1 курса физического факультета. — Ростов н/Д: УПЛ РГУ, 1994.