СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФИЛИАЛ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»

С.А. ШВИДЧЕНКО

ИНФОРМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ)

Методические рекомендации
по выполнению контрольной работы

Ростов-на-Дону
2019

Швидченко С.А. ИНФОРМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). *Методические рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине «Информатика (спецглавы)».* СКФ МТУСИ. - Ростов н/Д, 2019. – 55с.

В методических указаниях приведены требования к выполнению контрольной работы и варианты тем.

Предназначено для студентов направления «ИТСС» для углубленного изучения баз данных на аудиторных занятиях и самостоятельного изучения материала по дисциплине «Информатика (спецглавы)».

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры «ИВТ»
Протокол от «26» августа 2019 г., № 1.

Требования к выполнению контрольной работы

1. Цели изучения дисциплины «Информатика (спецглавы)**».**

Целями освоения дисциплины «Информатика (спецглавы) являются: изучение общих принципов построения вычислительных моделей и анализ полученных результатов, применение современных информационных технологий, а также содействие формированию научного мировоззрения и развитию системного мышления.

2. Планируемые результаты обучения

Изучение дисциплины направлено на формирование у выпускника способность решать следующие профессиональные задачи в соответствии с видами профессиональной деятельности:

- сервисно-эксплуатационная деятельность: испытания и сдача в эксплуатацию инфокоммуникационного оборудования; настройка, регулировка, испытания и тестирование оборудования; настройка и обслуживание аппаратно-программных средств;
- экспериментально-исследовательская деятельность: проведение экспериментов по заданной методике; анализ результатов и составление рекомендаций по улучшению технико-экономических показателей инфокоммуникационного оборудования; математическое моделирование инфокоммуникационных процессов и объектов на базе стандартных пакетов автоматизированного проектирования.

3. Задания на курсовую работу.

Решение технической или научной задачи включает её математическое описание на языке уравнений, функций, дифференциальных операторов и т. д. Математическая формулировка задач может оказаться не переводимой на язык ЭВМ, поэтому для решения таких задач применяются численные методы. Исходная математическая задача заменяется другой, сформулированной в терминах чисел и арифметических действий.

В данной курсовой работе должны быть освещены вопросы практического решения задач численными методами. Они позволяют отделять и уточнять корни в нелинейных уравнениях, определять значение функции в точке, используя методы аппроксимации, определять корни систем линейных алгебраических уравнений, находить значения интегралов методами прямоугольников, трапеций, Симпсона, определять точку экстремума функции методами одномерной оптимизации (дихотомии и золотого сечения).

3.1 Назначение курсовой работы.

Задания предусматривают закрепление полученных знаний по теме «Численные методы и оптимизация». Перед выполнением работы рекомендуется изучить теоретический материал по теме [2], включая структурные схемы алгоритмов, программирование которых позволит решить поставленные задачи. Результаты решения и вывод промежуточных значений оформлять в виде таблиц с необходимыми комментариями.

3.2 Курсовая работа включает выполнение 4х задач:

Для каждого варианта курсовой работы экспериментально получена неко-торая функция y(x), представленная таблично. Для этих данных необходимо решить четыре задачи численными методами:

1. Для заданной функции y(x) (таблица 1) методом наименьших квадратов получить:

линейную $F1(x) = a_0+a_1x$ и квадратичную $F2(x) =a_0+ a_1x + a_2x^2$

аппроксимирующие функции:

- составить и решить систему нормальных уравнений; определить параметры аппроксимирующих функций; вычислить значения аппроксимирующих функций в узлах аппроксимации;

- построить график заданной функции и графики функций линейной и квадратичной аппроксимации; оценить качество аппроксимации.

В последующих задачах расчеты будут проводиться на основе полученной квадратичной аппроксимирующей функции;

2. Найти методом итерации и методом Ньютона два корня уравнения

F2(x) = 0 с заданной точностью 10^{-3}:

- отделить корни;

- проверить (аналитически) условия сходимости применяемых методов решения уравнений. В случае необходимости привести уравнение к виду, обеспечивающему сходимость процесса приближения к корню; выбрать начальное приближение; записать рекуррентную формулу для уточнения корня; оценить погрешность;

3. Вычислить интеграл функции F2(x) на отрезке между корнями уравнения F2(x)=0 при разбиении отрезка интегрирования на n1=10 и n2=20 подынтервалов. Для интегрирования использовать метод средних прямоугольников, трапеций и Симпсона. Оценить погрешность вычислений.

4. Определить точку экстремума функции F2(x) методами дихотомии и золотого сечения с точностью E $=10^{-3}$:

- проверить условие унимодальности и выбрать начальный отрезок оптимизации;

-записать условие окончания поиска минимума (максимума) функции.

Каждую из перечисленных задач необходимо решить с помощью языка программирования Pascal .

В пояснительной записке привести схемы алгоритмов, исходные тексты программ. Результаты решения и выводы промежуточных значений оформлять в виде таблиц с необходимыми комментариями.

Номер варианта и значения аргумента функции x определяется с помощью

таблицы по последним двум цифрам студенческого билета.

3.3 Варианты задания.

Таблица 1.

Варианты 00,23,46,69,92			Варианты 01,24,47,70,93			Варианты 02,25,48,71,94			Варианты. 03,26,49,72,95		
i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	-1	-0.356	0	-11	1.256	0	-9	0.91	0	5	-0.316
1	1	1.376	1	-9	0.911	1	-8	0.286	1	7	-1.296
2	3	1.03	2	-7	-0.436	2	-7	-0.436	2	9	-0.91
3	5	-0.316	3	-5	-1.416	3	-6	-1.06	3	11	0.476
4	7	-1.296	4	-3	-1.03	4	-5	-1.416	4	13	1.496
5	9	-0.91	5	-1	-0.356	5	-4	-1.406	5	15	1.15

Варианты 04,27,50,73,96			Варианты 05,28,51,74,97			Варианты 06,29,52,75,98			Варианты. 07,30,53,76,99		
i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	5	-0.939	0	14	1.594	0	13	2.056	0	-11	2.577
1	8	-1.286	1	12	2.44	1	11	2.577	1	-9	1.81
2	10	-0.266	2	10	2.366	2	-9	1.81	2	-7	0.124
3	12	1.12	3	-8	1.006	3	-7	0.124	3	-5	-1.116
4	14	1.506	4	-6	-0.064	4	-5	-1.116	4	-3	-0.91
5	16	0.526	5	-4	-1.206	5	-3	-0.91	5	-1	-0.376

Варианты 08,31,54,77,			Варианты 09,32,55,78,			Варианты 10,33,56,79,			Варианты. 11,34,57,80		
i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	-5	-1.116	0	-1	0.376	0	0	1	0	3	1.09
1	-4	-1.206	1	1	1.376	1	2	1.406	1	5	-0.116
2	-3	-0.91	2	3	1.09	2	4	0.526	2	7	-0.876

3	-2	-0.326	3	5	-0.116	3	6	-0.64	3	9	-0.19
4	-1	0.376	4	7	-0.876	4	8	-0.726	4	11	1.576
5	0	1	5	9	-0.19	5	10	0.634	5	13	3.056

Варианты 12,35,58,81			Варианты 13,36,59,82			Варианты 14,37,60,83			Варианты. 15,38,61,84		
i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	5	-0.116	0	8	-0.726	0	10	0.634	0	9	-0.19
1	7	-0.876	1	9	-0.19	1	12	2.44	1	11	1.576
2	9	-0.19	2	10	0.634	2	14	3.326	2	13	3.056
3	11	1.576	3	11	1.576	3	16	2.926	3	15	3.25
4	13	3.056	4	12	2.44	4	18	2.24	4	17	2.524
5	15	3.25	5	13	3.056	5	20	2.634	5	19	2.244

Варианты 16,39,62,85,			Варианты 17,40,63,86			Варианты 18,41,64,87			Варианты. 19,42,65,88		
i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	1	-0.356	0	-7	0.91	0	-4	-1.06	0	2	1
1	3	1.376	1	-6	0.286	1	-2	-1.406	1	4	386
2	5	1.03	2	-5	-0.436	2	0	-0.386	2	6	0.406
3	7	-0.316	3	-4	-1.06	3	2	1	3	8	-0.939
4	9	-1.296	4	-3	-1.416	4	4	1.386	4	10	-1.286
5	11	-0.91	5	-2	-1.406	5	6	0.406	5	12	-0.266

Варианты. 20,43,66,89			Варианты. 21,44,67,90			Варианты. 22,45,68,91		
i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	7	-0.316	0	11	2.056	0	10	2.44
1	9	-1.296	1	-9	2.577	1	-8	2.366
2	11	-0.91	2	-7	1.81	2	-6	1.006

3	13	0.476	3	-5	0.124	3	-4	-0.64
4	15	1.496	4	-3	-1.116	4	-2	-1.206
5	17	1.15	5	-1	-0.91	5	0	-0.326

3.4 Требования к оформлению.

Курсовая работа выполняется в печатном виде (формат А4) с учётом возможностей, которыми располагают для оформления WORD и EXCEL (Microsoft office), и в электронном виде. Курсовая работа включает:

– Титульный лист;
– Оглавление;
– Задание;
– Введение;
– Разделы решения задач с программами решения (Турбо Паскаль);
– Заключение;
– Список используемой литературы.

Результаты решения, полученные программно, вывод промежуточных значений оформляются в виде таблиц с необходимыми, но краткими пояснениями. Листы работы сшиваются и нумеруются.

4 Методические указания по выполнению курсовой работы.

ЗАДАНИЕ №1:

В случае обработки экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений, научных опытов, технических испытаний и могут иметь место ошибки этих данных. Метод наименьших квадратов используется при обработке реальных количественных данных, полученных с погрешностью. В таком случае аппроксимирующую функцию строят с помощью метода наименьших квадратов.

Пусть в результате эксперимента были получены данные, представленные в виде таблицы.

Необходимо построить аналитическую зависимость, наиболее близко описывающую результаты эксперимента.

Идея метода наименьших квадратов заключается в том, что функцию

φ = $f(x, a_0, a_1, \ldots a_k)$ необходимо подобрать таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений от расчётных была наименьшей.

$$S = \sum_{i=0}^{n}[y(x_i) - f(x_i)]^2 \to min$$

Задача сводится к определению коэффициентов **a_i** аппроксимирующей функции **φ**. Для её решения необходимо составить систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Если параметры **a_i** входят в зависимость **φ** линейно, то получим систему из к+1-линейного уравнения с к+1 неизвестным:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a_0, a_1, \ldots . a_k))\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a_0, a_1, \ldots . a_k))\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \\ \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a_0, a_1, \ldots . a_k))\frac{\partial f}{\partial a_k} = 0 \end{cases}$$

Система называется системой нормальных уравнений, её матрица – матрицей Грамма.

Зная коэффициенты **a_i**, являющиеся решением системы, можно составить искомую аппроксимирующую функцию.

Подбор параметров аппроксимирующей функции:

Линейная функция:

Необходимо определить параметры функции $F_1(x)=a_0 + a_1x$

Система линейных уравнений для нахождения коэффициентов многочлена $F_1(x)=a_0 + a_1x$ (линейная аппроксимация):

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + (\sum_{i=0}^{n} x_i)a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ (\sum_{i=0}^{n} x_i)a_0 + (\sum_{i=0}^{n} x_i)a_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Решением системы уравнений (линейная аппроксимация) являются: [1]:

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}; \qquad a_1 = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i y_i - (n+1)\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - (n+1)(\overline{x})^2}; \qquad (1.1)$$

где

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n+1}; \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n+1}.$$

Квадратичная функция:

Необходимо определить параметры функции $F_2(x)= a_0+a_1x + a_2x^2$

Составим и решим систему нормальных уравнений, коэффициенты которой получаются из матрицы Грамма[1], для определения параметров многочлена второй степени $F_2(x)= a_0+a_1x + a_2x^2$.

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 = \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 = \sum x_i y_i \\ \left(\sum x_i^2\right)a_0 + \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

Результаты вычисления элементов матрицы Грамма, решения системы нормальных уравнений методом Гаусса, вычисление значений аппроксимирующих функций в узлах аппроксимации, оценку качества аппроксимации выполнить программно.

В качестве меры уклонения заданных значений функции от многочлена степени m (качество аппроксимации) принимается величина

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(F_m(x_i) - y(x_i))^2}$$

Построение графиков заданной точечной функции, линейной и квадратичной аппроксимирующих функций.

Построение графиков выполнить с учётом возможностей WORD , EXCEL (Microsoft office 2010).

ЗАДАНИЕ № 2.

Применяя численные методы найти с точностью $E=10^{-3}$ два корня нелинейного уравнения F2(x)=0, где F2(x), полученная в предыдущем задании функция квадратичной аппроксимации набора некоторых экспериментальных отсчётов.

1. Отделить корни уравнения. При графическом отделении корней следует построить график функции уравнения до пересечения с осью абцис и затем определить отрезки, содержащие корни. Убедиться, что функция

меняет знаки на концах отрезков, т. е. в каждом отрезке существует, по крайней мере, по одному корню.(f(a)f(b)<0.) Корень x^* будет единственным на отрезке [a;b], если производная функции существует и сохраняет знак внутри отрезка.

2. На отрезках уточнить корни методом итерации (один корень) и Ньютона (другой корень) При уточнении корня методом итерации приводят уравнение f(x) = 0 к виду **<u>x =φ(x)</u>** Тогда рекуррентная формула уточнения корня $\mathbf{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$. Начальное значение в методе итерации – произвольное значение из отрезка [a;b]. Следует воспользоваться следующей методикой получения итерирующей функции. Итерирующая функция **<u>φ(x) = λ·f(x) + x</u>** обеспечивает выполнение условия сходимости $|\varphi'(\mathbf{x})| < \mathbf{1}$ **при** $\mathbf{x} \in$ **[a;b].**

Правило выбора параметра λ:

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} < 0, \text{ если } f'(x) > 0, \\ 0 < \lambda < \frac{1}{r}, \text{ если } f'(x) < 0. \end{cases}$$

$\mathbf{r = max(|}f\mathbf{'(a)|,|}f\mathbf{'(b)|)}$при $x \in$ [a;b].

Условие окончания поиска корня:

$$\begin{cases} |x_n - x_{n+1}| < E \\ |f(x_n) - f(x_{n+1})| < E \end{cases}$$

Оценка погрешности:

$|x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-q} q^n$, q = max$|\varphi'(\mathbf{x})|$ при$x \in$ [a; b], $\mathbf{m = |x_0 - \varphi_{(x0)}|}$.

Итерационный процесс уточнения корня выполнить программно.

3. Достаточные условия сходимости метода Ньютона определены следующим:

- $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)\cdot f(b) <0$;
- $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют знаки при $a \le x \le b$;
- Начальное приближение x_0 выбирается из условия $f(x)\cdot f''(x)>0$.

Рекуррентная формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1,..$$

Из оценки погрешности

$|x^* - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$ следует условие окончания уточнения корня при заданной точности E :

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1 E}{M_2}},$$

M_2 и m_1 -модули наибольшего и наименьшего значений соответственно $f''(x)$ и $f'(x)$. Здесь $E=10^{-4}$.

Итерационный процесс уточнения корня выполнить программно.

ЗАДАНИЕ № 3.

Интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, где x_1 и x_2 корни уравнения, полученные в предыдущем задании, вычислить при разбиении отрезка интегрирования на $n_1=10$ и$n_2=20$ подынтервалов методами Симпсона, трапеции и серединных прямоугольников. Оценить погрешность.

В основе численного интегрирования лежит приближённое вычисление площади, ограниченной подынтегральной функцией f(x) в интервале $[x_1; x_2]$ изменения аргумента x.

Численные методы группируются по способу аппроксимации подынтегральной функции.

Методы Ньютона-Котеса, которые используются для выполнения задания № 3, основаны на аппроксимации функции полиномом степени n. Алгоритмы этого класса отличаются только степенью полинома. При этом интервал интегрирования разбивается на ряд меньших, равных подынтервалов, для которых вычисляются площади. Просуммировав их – получим приближённое значение заданного интеграла.

В курсовой работе использованы методы:

- метод средних прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона.

1. Вычисление интеграла методом средних прямоугольников**.**

Для вычисления определённого интеграла в методе средних прямоугольников отрезок интегрирования разбивается на n равных частей:

h = (b-a)/n;

$$x_i = x_0 + ih, i = 0,1,...n;$$
$$x_0 = a, x_n = b.$$

Если $a = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ -середина отрезка, то формула называется формулой средних прямоугольников ($a = a + \frac{h}{2}$). Таким образом за приближённое значение определённого интеграла принимается сумма площадей прямоугольников со сторонами равными h и $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$[3]:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

2. Вычисление интеграла методом трапеций.

Интегрирование по методу трапеций предусматривает замену функции f(x) полиномом первой степени. Графиком такой функции является прямая с угловым коэффициентом, т. е. предусматриваемая замена приводит к образованию трапеций (каждые две ординаты на графике функции будут соединяться прямой).

Интеграл будет представлять сумму площадей n трапеций, каждая высотой h

$$I = 0.5h\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

3. Вычисление интеграла методом Симпсона.

По методу Симпсона проводится расчёт суммы площадей n/2 криволинейных, ограниченных сверху квадратичными параболами, трапеций. Число n должно быть чётным. Каждая парабола занимает на оси X интервал, равный 2h. Приближённая формула для расчёта интеграла имеет вид [3]:

$$I = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right)$$

$$y_0 - f(x_0);$$
$$y_n - f(x_n);$$
$$y_1 - f(x_1);$$

……………

и т.д.

4. Оценка погрешностей.

Точность вычисления интеграла определяется суммой погрешностей выбранного метода и округлений. Эту суммарную погрешность определяем по правилу Рунге:

$R = \dfrac{\left|I_h - I_{h/2}\right|}{2^k - 1}$, *где* k=2 для метода средних прямоугольников и метода трапеций, k=4 для метода Симпсона.

Результаты программного вычисления представить в таблице для n=10 и n=20.

ЗАДАНИЕ № 4.

ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ.

Определить точку экстремума функции f(x) методами одномерной оптимизации (с точностью E):

- проверить условие унимодальности и выбрать начальный отрезок оптимизации;

-записать условие окончания поиска минимума(максимума) функции.

Задача имеет единственное решение, если f(x) является унимодальной функцией.

Если f(x) дважды дифференцируема на отрезке [a;b] и $f''(x) \geq 0$ при x$\in$ [a;b], то f(x) –унимодальная на отрезке [a;b] .

Методы одномерной оптимизации используют следующее свойство непрерывных функций [2]: если точки g и h (g<h) расположены на отрезке [a,b] и $f(g) <= f(h)$, то на отрезке [a,h] есть хотя бы один минимум функции, если $f(g) > f(h)$, то на отрезке [g,b] есть хотя бы один минимум. В силу унимодальности функции этот минимум будет единственным. Тем самым уменьшается отрезок поиска минимума. Повторяя указанный процесс, получим последовательность уменьшающихся отрезков. Поиск минимума можно свести к определению отрезка, длина которого станет меньше заданной точности. Это будет окончанием поиска: $|b_k - a_k| < E$.

Для нахождения точки экстремума применить методы дихотомии или золотого сечения в соответствии с заданием с точностью E=10^{-3}.

Для нахождения максимума следует ввести новую функцию $f_1(x) = -f(x)$. Проверка унимодальности необходима для использования указанных методов оптимизации.

В методе дихотомии точки g и h выбираются близкими к середине отрезка локализации точки экстремума.

$$g = \frac{1}{2}(a_k + b_k - \delta);\ h = \frac{1}{2}(a + b + \delta), \text{где}\ \delta = \text{const},\ 0<\delta<b-a$$

Тогда погрешность метода равна $\frac{1}{2^{n/2}} + \delta$, где n-число вычислений функции. Из соотношения $\frac{1}{2^{n/2}}\delta < \varepsilon$ получаем ограничение $\delta < \varepsilon - \frac{1}{2^{n/2}}$. Положим $\delta = \varepsilon / 2 = 0.0005$

Поиск точки экстремума на отрезке [a,b] методом золотого сечения осуществляется двумя точками:

$$g = a + (b - a)\frac{3 - \sqrt{5}}{2};\ h = a + (b - a)\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Условие окончания поиска b-a < E.

Результаты программного поиска представить в таблице с краткими пояснениями.