

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал ордена Трудового Красного Знамени федерального
государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Методические указания
и контрольные задания по выполнению контрольной работы
№ 1
по дисциплине
Теория электрических цепей
по теме
Расчет цепей синусоидального тока

направление подготовки 11.03.02 –
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
(все профили)

Ростов-на-Дону

2019

Методические указания
и контрольные задания по выполнению контрольной работы № 1
по дисциплине
«Теория электрических цепей»
по теме
«Расчет цепей синусоидального тока»

Составители: Ю.В. Жабинский, доцент кафедры ОНП,
Я.Б. Константинова, доцент кафедры ОНП,
А.В. Бородин, доцент кафедры ОНП

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры ОНП

Протокол от «21» октября 2019 г. № 3

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ | 4 |
| 1.1. Составление схемы цепи и выбор параметров элементов | 4 |
| 1.2. Условия задания | 6 |
| 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ..... | 7 |
| 2.1. Основные положения символического метода | 7 |
| 2.1.1. Замена синусоидальных функций комплексными числами | 7 |
| 2.1.2. Определение комплексных сопротивлений ветвей цепи | 9 |
| 2.2. Расчет установившегося режима цепи методом закона Кирхгофа | 12 |
| 2.2.1. Расчет цепи в дифференциальной форме | 12 |
| 2.2.2. Расчет цепи в символической форме | 14 |
| 2.3. Расчет цепи методом контурных токов (МКТ) в символической форме | 14 |
| 2.3.1. Основные положения МКТ | 14 |
| 2.3.2. Расчет установившегося режима цепи в матричной форме | 15 |
| 2.3.3. Расчет установившегося режима цепи | 22 |
| 2.3.4. Определение мгновенных значений токов ветвей | 23 |
| 2.4. Расчет цепи методом узловых потенциалов (МУП) | 23 |
| 2.4.1. Основные положения МУП | 23 |
| 2.4.2. Расчет цепи в матричной форме | 24 |
| 2.4.3. Расчет установившегося режима | 29 |
| 2.5. Проверка баланса мощностей | 30 |
| 2.6. Построение векторных, волновых и потенциальных диаграмм | 33 |
| 3. ПОРЯДОК ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ | 45 |
| 4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ | 47 |
| 5. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ | 50 |

1. ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

1.1. Составление схемы цепи и выбор значений параметров ее элементов

Задания на контрольную работу схемы цепи и ее параметров составлены в соответствии с последней цифрой в номере студенческого билета. Схема рассчитываемой электрической цепи условно представлена графом (рис.1) с шестью пронумерованными ветвями:

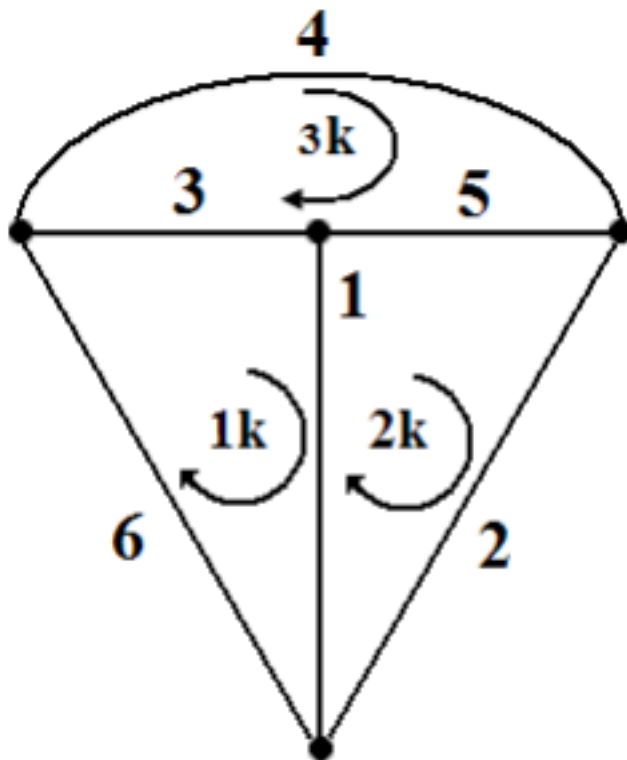


Рис.1

Конкретное наполнение ветвей графа задается кодом схемы, который выбирается по таблице 1 в соответствии с последней цифрой номера студенческого билета:

Таблица 1

| Вариант1 | | | | | | |
|-------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Код цепи | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант2 | | | | | | |
| Код цепи | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант3 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант4 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант5 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант 6 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант 7 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант 8 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант 9 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |
| Вариант 0 | | | | | | |
| Код цепи | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 |
| Состав цепи | L_1 R_1 | R_2 C_1 | L_2 C_2 | $e_1(t)$ R_3 | $e_2(t)$ L_3 | $e_3(t)$ C_3 |

Вариант значений параметров элементов электрической цепи выбирается из таблицы 2.

Таблица 2

| Вариант | R_1 , Ом | R_2 , Ом | R_3 , Ом | L_1 , мГн | L_2 , мГн | L_3 , мГн | C_1 , мкФ | C_2 , мкФ | C_3 , мкФ | F , Гц | $e_1(t)$, В | $e_2(t)$, В | $e_3(t)$, В |
|---------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1 | 40 | 65 | 4 | 40 | 1 | 2,7 | 35 | 40 | 53 | 700 | $200\cos(\omega t)$, | $90\sin(\omega t)$ | $20\sin(\omega t+15^\circ)$ |
| 2 | 80 | 25 | 18 | 6 | 12 | 5,6 | 4 | 2 | 6 | 1500 | $170 \sin(\omega t+180^\circ)$ | $70 \sin(\omega t)$ | $100\sin(\omega t - 20^\circ)$ |
| 3 | 100 | 5 | 22 | 3,2 | 3,6 | 14 | 5 | 8 | 4 | 3000 | $80\sin(\omega t-22^\circ)$ | $100\sin(\omega t)$ | $140\cos(\omega t)$ |
| 4 | 10 | 95 | 10 | 1,2 | 6,4 | 5,4 | 10 | 4 | 5 | 500 | $100\sin(\omega t+20^\circ)$ | $160\sin(\omega t+30^\circ)$ | $80\sin(\omega t+50^\circ)$ |
| 5 | 20 | 85 | 8 | 1,3 | 3,2 | 2,6 | 3 | 8 | 7 | 1000 | $70\sin(\omega t+130^\circ)$ | $30\sin(\omega t-90^\circ)$ | $200\sin(\omega t-85^\circ)$ |
| 6 | 30 | 75 | 6 | 1,4 | 1,7 | 2,5 | 1,2 | 5 | 9 | 1100 | $110\sin(\omega t)$ | $160\cos(\omega t-90^\circ)$ | $96\sin(\omega t-78^\circ)$ |
| 7 | 60 | 45 | 14 | 16 | 4 | 32 | 1,6 | 1,8 | 2 | 500 | $280\sin(\omega t-35^\circ)$ | $150\cos(\omega t)$ | $100\sin(\omega t)$ |
| 8 | 70 | 35 | 16 | 20 | 25 | 53 | 0,5 | 1 | 1,2 | 300 | $170\sin(\omega t-30^\circ)$ | $200\cos(\omega t)$ | $35\sin(\omega t-10^\circ)$ |
| 9 | 80 | 25 | 18 | 6 | 12 | 5,6 | 4 | 2 | 6 | 1500 | $170 \sin(\omega t+180^\circ)$ | $70 \sin(\omega t)$ | $100\sin(\omega t - 20^\circ)$ |
| 0 | 20 | 85 | 8 | 1,3 | 3,2 | 2,6 | 3 | 8 | 7 | 1000 | $70\sin(\omega t+130^\circ)$ | $30\sin(\omega t-90^\circ)$ | $200\sin(\omega t-85^\circ)$ |

1.2. Условия задания

В контрольной работе требуется:

- Составить для заданной цепи систему уравнений по законам Кирхгофа, записав ее в двух формах:
 - дифференциальной;
 - символической.
- Методом контурных токов (МКТ) определить комплексные действующие значения токов в ветвях цепи.
- Записать выражения для мгновенных значений токов ветвей, проверить в комплексной форме выполнимость первого закона Кирхгофа для всех узлов и второго закона Кирхгофа для всех контуров цепи.

4. Методом узловых потенциалов (МУП) определить комплексные действующие значения потенциалов всех узлов цепи, приняв потенциал одного из узлов (любого) равным нулю, и рассчитать комплексные действующие значения токов в ветвях цепи. Сравнить их со значениями, полученными в п.2.
5. Проверить баланс мощностей. Найти значения коэффициента мощности для приемников электрической энергии.
6. Построить векторную диаграмму токов для одного из узлов цепи и векторную диаграмму напряжений для одного из контуров.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Данная контрольная работа посвящена анализу установившегося режима линейной электрической цепи, находящейся под воздействием трех источников синусоидального напряжения одинаковой частоты. При расчете установившегося режима в линейной электрической цепи синусоидального тока используется метод комплексных амплитуд или называемый иначе - символический метод. В основе символического метода лежит замена синусоидальной функции некоторым комплексным числом, которое содержит в себе всю информацию об этой функции. Вследствие такой замены математические операции над синусоидальными (гармоническими) функциями времени заменяются алгебраическими операциями над соответствующими им комплексными числами, что существенно упрощает расчеты цепей синусоидального тока и делает их более наглядными. Рассмотрим использование этого метода при расчете установившегося режима в рассматриваемой цепи синусоидального тока.

2.1. Основные положения символического метода

2.1.1. Замена синусоидальных функций комплексными числами

Для заданных источников электрической энергии произведем замену синусоидальных э. д. с. $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ комплексными числами. Синусоидальную э. д. с. вида:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi), \quad (1)$$

где E_m - амплитуда синусоидального колебания,

$\omega = 2\pi f$ - угловая или круговая частота,

ψ - начальная фаза колебания,

заменим комплексной э. д. с. с амплитудой E_m следующего вида:

$$E_m = E_m e^{j\psi} \quad (2)$$

Комплексная амплитуда (2) содержит всю информацию о синусоидальной функции (1). При расчетах цепей, как правило, вместо комплексной амплитуды (2) используют комплексное действующее значение \dot{E} , определяемое выражением:

$$\dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = E e^{j\psi}, \quad (3)$$

Далее в комплексной форме записываются сопротивления всех ветвей цепи. Активное сопротивление R в комплексной форме записывается так же. Его значение не зависит от частоты ω и поэтому остается постоянным. Комплексные сопротивления индуктивности L и емкости C записываются в виде: $\underline{Z}_L = j\omega L$ и $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$, их значения зависят от частоты ω .

Записав в комплексной форме заданные значения э. д. с. или токов всех источников и комплексные сопротивления всех ветвей цепи, нужно задаться положительными направлениями токов в ветвях и записать их в комплексной форме. Полученная после таких преобразований схема цепи в символической форме представлена на рис.3.

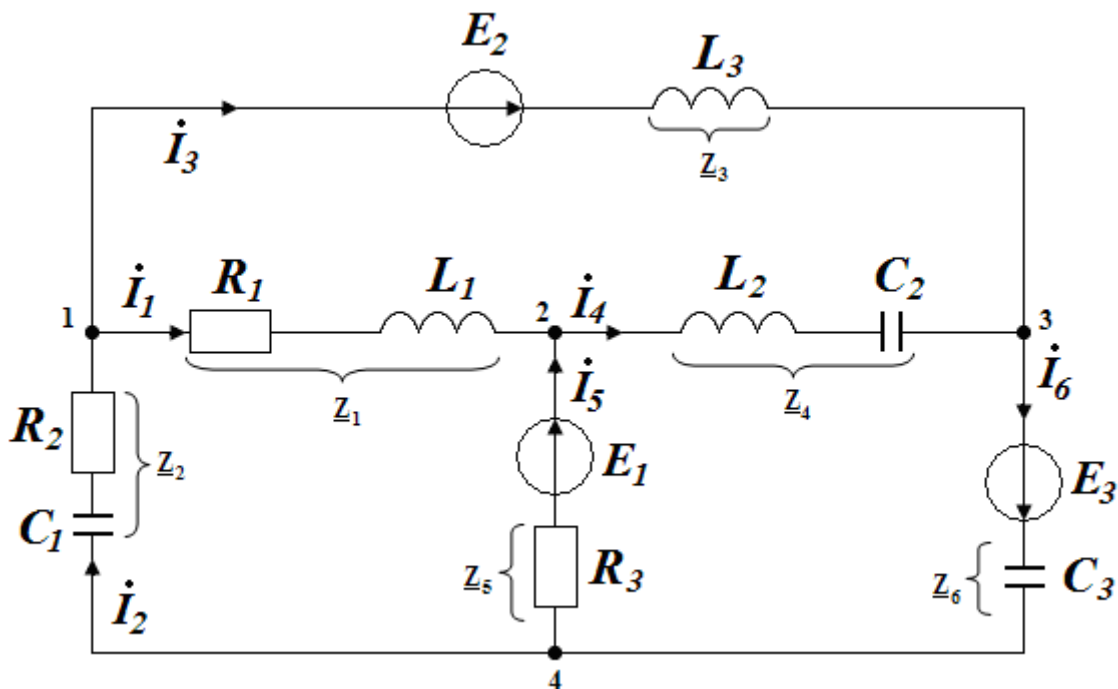


Рис. 3

Далее для полученной схемы (рис.3) составляется система уравнений электрического равновесия цепи относительно искомых токов и напряжений. При ее составлении могут использоваться все известные методы расчета электрических цепей, разработанные на основе законов Ома и Кирхгофа. Решив полученную систему уравнений, определяем комплексные действующие значения искомых токов и

напряжений. При необходимости от найденных комплексных токов и напряжений можно перейти к мгновенным значениям этих величин, используя выражение (1).

Определим комплексные действующие значения э. д. с. источников, имеющих в цепи. Вначале запишем э. д. с. этих источников в синусоидальной форме:

$$e_1(t) = 200 \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ В}$$

$$e_2(t) = 90 \sin(\omega t), \text{ В}$$

$$e_3(t) = 20 \sin(\omega t + 15^\circ), \text{ В}$$

а затем с учетом формулы (3), запишем их комплексные действующие значения в показательной форме:

$$\dot{E}_1 = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = 141 e^{j90^\circ}, \text{ В}$$

$$\dot{E}_2 = \frac{90}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 63.64 e^{j0^\circ}, \text{ В}$$

$$\dot{E}_3 = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j15^\circ} = 14.1 e^{j15^\circ}, \text{ В}$$

Используя формулу Эйлера:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi, \quad (4)$$

переходим от показательной к алгебраической форме записи этих э. д. с.:

$$\dot{E}_1 = 141 \times \cos 90^\circ + j 141 \times \sin 90^\circ = 0 + j 141 = j 141, \text{ В}$$

$$\dot{E}_2 = 63.64 \times \cos 0^\circ + j \sin 0^\circ = 63.64 + j 0 = 63.64, \text{ В}$$

$$\dot{E}_3 = 14.1 \times \cos 15^\circ + j 14.1 \times \sin 15^\circ = 13.62 + j 3.65, \text{ В}$$

2.1.2. Определение комплексных сопротивлений ветвей цепи

Рассмотрим методику определения комплексных сопротивлений ветвей цепи применительно к рассматриваемой схеме (рис.2). В данной цепи присутствует три вида пассивных ветвей с последовательно соединенными элементами. Эти ветви представлены на рис. 4 (а, б, в):

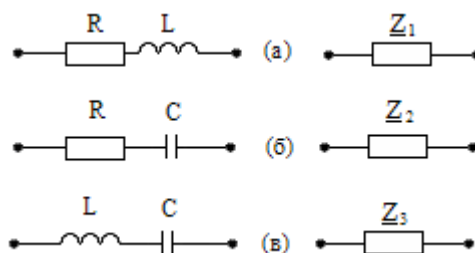


Рис.4

Комплексные сопротивления приведенных на рис. 4 ветвей обозначим как - $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$. Запишем их выражения в буквенном виде и определим численные значения. Так как по элементам каждой ветви протекает один и тот же ток, то эти элементы включены последовательно и эквивалентное сопротивление каждой ветви будет равно сумме сопротивлений отдельных элементов, из которых она состоит. Для ветви, представленной на рис. 4(а), комплексное сопротивление запишется следующим образом:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R + jx_L, \quad (5)$$

где $x_L = \omega L$ - реактивное сопротивление индуктивности L , имеющее размерность - Ом. Комплексное сопротивление (5) записано в алгебраической форме, а в показательной форме оно имеет вид:

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\phi_{z1}}, \quad (6)$$

где $\underline{Z}_1 = \sqrt{R^2 + x_L^2}$ - модуль комплексного сопротивления (он также называется полным сопротивлением ветви),

$\phi_{z1} = \arctg(x_L/R)$ - аргумент комплексного сопротивления \underline{Z}_1 .

Аналогично запишем комплексное сопротивление \underline{Z}_2 второй ветви (рис. 4б). В алгебраической форме оно имеет вид:

$$\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} = R - jx_C, \quad (7)$$

где $x_C = 1/(\omega C)$ - реактивное сопротивление емкости C , имеющее размерность - Ом.

В показательной форме это сопротивление запишется следующим образом:

$$\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\phi_{z2}}, \quad (8)$$

где $\underline{Z}_2 = \sqrt{R^2 + x_C^2}$ - модуль комплексного сопротивления \underline{Z}_2 ,

$\phi_{z2} = -\arctg(x_C/R)$ - аргумент этого сопротивления.

Комплексное сопротивление \underline{Z}_3 третьей ветви (рис. 4в) в алгебраической форме имеет вид:

$$\underline{Z}_3 = jx_L - jx_C = j(x_L - x_C) = jx, \quad (9)$$

и является чисто мнимой величиной. В этом случае модуль \underline{Z}_3 определится как разность двух реактивных сопротивлений $(x_L - x_C)$:

$$\underline{Z}_3 = |x_L - x_C| = |x| \quad (10)$$

а аргумент сопротивления принимает значения $+90^0$ или -90^0 в зависимости от знака сопротивления « x ». Если реактивное сопротивление « x » имеет положительное значение, то это означает, что характер сопротивления ветви будет индуктивным, если значение « x » будет отрицательным, то характер сопротивления ветви будет емкостным.

Определим численные значения комплексных сопротивлений ветвей рассматриваемой цепи. Для этого вначале рассчитаем сопротивления всех входящих в ветви реактивных элементов на заданной по условию частоте:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 700 = 4396, \text{ рад/с}$$

Рассчитаем реактивные сопротивления индуктивных элементов:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 4396 \times 40 \times 10^{-3} = 175.84, \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 4396 \times 1 \times 10^{-3} = 4.39, \text{ Ом},$$

$$x_{L3} = \omega L_3 = 4396 \times 2.7 \times 10^{-3} = 11.87, \text{ Ом}.$$

и емкостных элементов:

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{4396 \times 35 \times 10^{-6}} = 6.5, \text{ Ом},$$

$$x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{4396 \times 40 \times 10^{-6}} = 5.68, \text{ Ом},$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{4396 \times 53 \times 10^{-6}} = 4.29, \text{ Ом},$$

Рассчитанные комплексные сопротивления всех ветвей в алгебраической и показательной формах приведены ниже:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_{L1} = 40 + j175.84 = 180.33e^{+j77.2^0}, \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jx_{C1} = 65 - j6.5 = 65.32e^{-j5.7^0}, \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = 0 + jx_{L3} = j11.87 = 11.87e^{+j90^0}, \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = 0 + jx_{L2} - jx_{C2} = j(4.39 - 5.68) = -j1.29 = 1.29e^{-j90^0}, \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = R_3 + j0 = 4 + j0 = 4, \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_6 = 0 - jx_{C3} = 0 - j4.29 = -j4.29 = 4.29e^{-j90^0}, \text{ Ом}$$

При записи сопротивлений ветвей, содержащих источник электрической энергии, учтено, что внутреннее сопротивление идеального источника э. д. с. равно нулю.

Схема цепи, подготовленная для расчета установившегося режима методом контурных токов на базе символического метода представления синусоидальных

функций, представлена на рис.5 (в схеме показаны контурные токи, используемые этим методом):

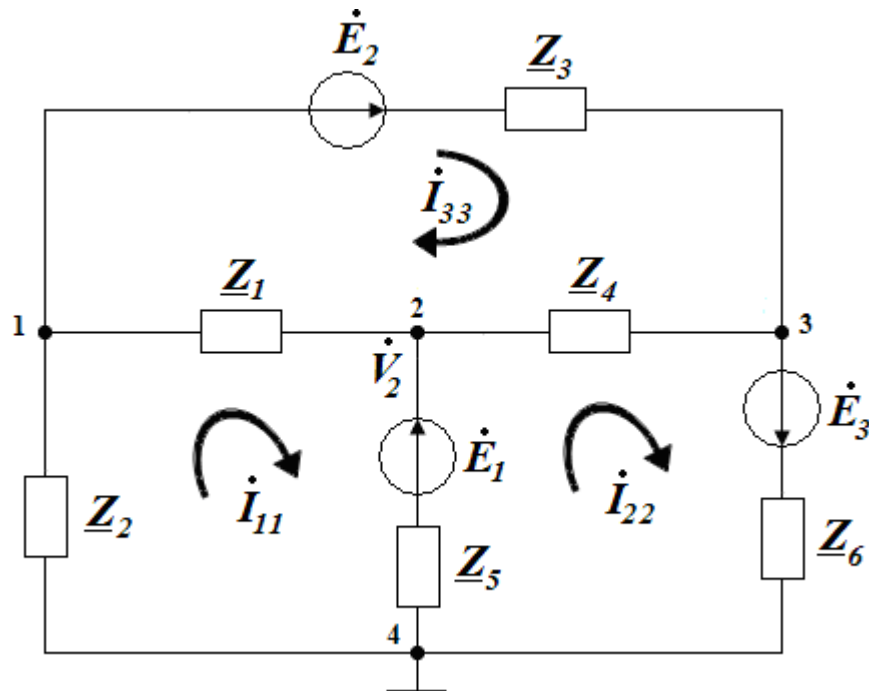


Рис.5

2.2. Расчет установившегося режима цепи методом законов Кирхгофа

2.2.1. Расчет цепи в дифференциальной форме

Система уравнений по законам Кирхгофа в дифференциальной форме составляется для мгновенных значений токов в ветвях $i_1(t) \div i_6(t)$, указанных на схеме (рис.2). Перед составлением уравнений выбираются положительные направления всех заданных и неизвестных токов и напряжений, включая э. д. с. источников электрической энергии. На схеме цепи указываются эти токи и напряжения соответствующими направленными стрелками. При записи уравнения по первому закону Кирхгофа для конкретного узла следует учитывать направление тока в ветви относительно этого узла. Ток, направленный к узлу, будем записывать со знаком “плюс”, а ток, направленный от узла, - со знаком “минус”. Один из узлов цепи принимается за базисный, и потенциал его считается равным нулю. Уравнение для этого узла не составляется, так как оно может быть получено путем преобразования уравнений, составленных для других узлов цепи, т.е. будет зависимым. Всего по первому закону Кирхгофа для любой цепи можно записать $(N_Y - 1)$ независимое уравнение, где (N_Y) - число узлов в рассматриваемой цепи. В качестве базисного узла в данном случае принят узел 4. Уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа для остальных узлов цепи, приведены ниже:

$$\begin{aligned}
\text{узел 1: } & -i_1 + i_2 - i_3 = 0; \\
\text{узел 2: } & i_1 + i_5 - i_4 = 0; \\
\text{узел 3: } & i_4 + i_3 - i_6 = 0.
\end{aligned}
\tag{11}$$

При составлении уравнения по второму закону Кирхгофа следует учесть связь между мгновенными значениями токов и напряжений на индуктивности $U_L(t)$ и емкости $U_C(t)$. Напряжения на индуктивности $U_L(t)$ и емкости $U_C(t)$ выражаются через токи $i_L(t)$ и $i_C(t)$ следующим образом [1]:

$$U_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \tag{12}$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt. \tag{13}$$

Связь между напряжением и током на резистивном элементе R определяется законом Ома:

$$U_R(t) = i_R(t)R \tag{14}$$

Перед составлением уравнений вначале выбирают независимые контуры и положительные направления их обхода. Положительные направления обхода контуров обозначаются на схеме цепи направленными линиями. Независимым считается контур, который содержит хотя бы один новый элемент, не входящий в состав других контуров. Ни один из независимых контуров не должен проходить через ветвь, содержащую источник тока. Эта ветвь при выборе независимых контуров и составлении уравнений по второму закону Кирхгофа исключается из схемы. При записи уравнения по второму закону Кирхгофа напряжения, направления которых совпадают с направлением обхода контура, берутся со знаком плюс, а при несовпадении направлений - напряжение на элементе берется со знаком минус. Составим систему уравнений для заданной цепи по второму закону Кирхгофа. Положительное направление обхода всех контуров выбрано против часовой стрелки. Полученные уравнения приведены ниже:

$$\begin{aligned}
\text{- контур 1: } & i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - i_5 R_3 + \frac{1}{C_1} \int i_2(t) dt + i_2 R_2 = -e_1(t); \\
\text{- контур 2: } & L_2 \frac{di_4}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_4(t) dt + \frac{1}{C_3} \int i_6(t) dt + i_5 R_3 = e_1(t) + e_3(t); \\
\text{- контур 3: } & L_3 \frac{di_3}{dt} - \frac{1}{C_2} \int i_4(t) dt - L_2 \frac{di_4}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 = e_2
\end{aligned}
\tag{15}$$

Полученная система из шести уравнений (11), (15) с шестью неизвестными позволяет определить все шесть неизвестных токов в ветвях цепи.

2.2.2. Расчет цепи в символической форме

Перед составлением системы уравнений в символической форме все заданные и неизвестные токи и напряжения, включая источники энергии, записываются в виде комплексных действующих значений с указанием их положительного направления. Уравнения по первому закону Кирхгофа в символической форме записываются аналогично уравнениям, записанным ранее в дифференциальной форме. Отличие состоит только в том, что в данном случае вместо синусоидальных функции времени используются комплексные действующие значения этих функций:

$$\begin{aligned}\text{узел 1:} \quad & -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ \text{узел 2:} \quad & \dot{I}_1 + \dot{I}_5 - \dot{I}_4 = 0; \\ \text{узел 3:} \quad & \dot{I}_4 + \dot{I}_3 - \dot{I}_6 = 0.\end{aligned}\tag{16}$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа используются комплексные значения сопротивлений индуктивности и емкости. Эти уравнения для схемы на рис. 4 с указанным направлением обхода имеют вид:

$$\begin{aligned}\text{контур 1:} \quad & \dot{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - \dot{I}_5 R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} \dot{I}_2 + \dot{I}_2 R_2 = -\dot{E}_1; \\ \text{контур 2:} \quad & j\omega L_2 \dot{I}_4 + \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_4 + \frac{1}{j\omega C_3} \dot{I}_6 + \dot{I}_5 R_3 = \dot{E}_1 + \dot{E}_3; \\ \text{контур 3:} \quad & j\omega L_3 \dot{I}_3 - \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_4 - j\omega L_2 \dot{I}_4 - j\omega L_1 \dot{I}_1 - \dot{I}_1 R_1 = \dot{E}_2.\end{aligned}\tag{17}$$

Полученные уравнения по своей структуре являются алгебраическими, решать их значительно проще, чем систему интегро-дифференциальных уравнений (15), составленную для мгновенных значений синусоидальных функций.

2.3. Расчет цепи методом контурных токов (МКТ) в символической форме

2.3.1. Основные положения МКТ

Метод контурных токов является одним из наиболее широко используемых методов анализа электрических цепей переменного тока. При использовании этого метода в каждом из независимых контуров цепи задается контурный ток, условно протекающий по всем элементам контура. Численно этот ток равен току, протекающему в главной ветви

контура, которой считается ветвь, входящая только в данный контур и не являющаяся составной частью других контуров.

Относительно контурных токов составляется система алгебраических уравнений по второму закону Кирхгофа для всех независимых контуров. Решение этой системы позволяет определить токи в контурах, а по ним находятся токи в каждой из ветвей схемы цепи. Достоинством МКТ является значительно меньшее по сравнению с методом законов Кирхгофа число уравнений, необходимых для расчета значений токов, протекающих в ветвях рассматриваемой цепи.

Число уравнений (N_1) , которые необходимо составить при использовании данного метода, определяется числом ветвей схемы (N_B) , числом узлов (N_Y) в ней и числом ветвей, содержащих источник тока (N_T) [1]:

$$N_1 = N_B - N_Y + 1 - N_T \quad (18)$$

2.3.2. Расчет установившегося режима цепи в матричной форме

В рассматриваемой цепи (рис. 1) шесть ветвей $(N_B = 6)$, четыре узла $(N_Y = 4)$ и нет ветвей, содержащих источники тока (N_T) . Общее число уравнений, которые нужно составить по МКТ в данном случае, будет равно:

$$N_1 = 6 - 4 + 1 - 0 = 3,$$

и, следовательно, число независимых контуров для рассматриваемой цепи должно быть равно трем.

В схеме цепи (рис.1) выбираем произвольно три независимых контура и положительные направления их обхода. Главной ветвью первого контура (1k) будет ветвь под номером 6, главной ветвью второго контура (2k) - ветвь 2, а главной ветвью третьего контура (3k) - ветвь 4. Остальные ветви каждого из контуров являются смежными, так как являются общими для двух контуров.

В схеме цепи, составленной для расчета ее режима методом контурных токов (рис.5) действующие значения контурных токов обозначим, как $\dot{I}_{11}, \dot{I}_{22}, \dot{I}_{33}$, и составим по второму закону Кирхгофа систему уравнений для всех контуров относительно этих токов. Уравнение для первого контура запишется в виде:

$$\dot{I}_{11} \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_2 \right) - \dot{I}_{22} \underline{Z}_5 - \dot{I}_{33} \underline{Z}_1 = -\dot{E}_1. \quad (19)$$

Аналогично запишем уравнения для второго и третьего контуров:

$$\dot{I}_{22} \left(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_5 \right) - \dot{I}_{11} \underline{Z}_5 - \dot{I}_{33} \underline{Z}_4 = \dot{E}_1 + \dot{E}_3, \quad (20)$$

$$\dot{I}_{33} \left(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_1 \right) - \dot{I}_{22} \underline{Z}_4 - \dot{I}_{11} \underline{Z}_1 = \dot{E}_2. \quad (21)$$

Полученную систему уравнений (19),(20) и (21) перепишем с учетом новых обозначений в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{11} \underline{Z}_{11} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{12} + \dot{I}_{33} \underline{Z}_{13} &= \dot{E}_{11}, \\ \dot{I}_{11} \underline{Z}_{21} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{22} + \dot{I}_{33} \underline{Z}_{23} &= \dot{E}_{22}, \\ \dot{I}_{11} \underline{Z}_{31} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{32} + \dot{I}_{33} \underline{Z}_{33} &= \dot{E}_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В систему уравнений (22) введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_2, \\ \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_5, \\ \underline{Z}_{33} &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Комплексное сопротивление \underline{Z}_{kk} для k - го контура равно сумме комплексных сопротивлений всех ветвей, входящих в данный контур. Сопротивление вида (23) называются собственными контурными сопротивлениями.

Комплексные сопротивления вида \underline{Z}_{kk} в системе (22) имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_5, \\ \underline{Z}_{13} &= \underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_1, \\ \underline{Z}_{23} &= \underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_4. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Таким образом, комплексное сопротивление \underline{Z}_{ik} соответствует сопротивлению смежной (общей) ветви для двух контуров, взятому со знаком минус. Знак минус в выражениях (22) обусловлен тем обстоятельством, что в смежных ветвях цепи контурные токи протекают в противоположных направлениях. Если в данной смежной ветви контурные токи окажутся направленными в одну сторону, то соответствующее взаимное сопротивление вида (24) следует брать со знаком плюс.

Величины $\dot{E}_{11}, \dot{E}_{22}, \dot{E}_{33}$ в правой части уравнений (22) называются контурными э. д. с. каждого из контуров и представляет собой алгебраическую сумму э. д. с. всех источников, входящих в данный контур. Если направление э. д. с. совпадает с направлением обхода контура, то ее значение берется с плюсом, в противном случае э. д. с. берется со знаком минус. Значения \dot{E}_{kk} для каждого из трех контуров рассматриваемой схемы (рис.5) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{11} &= -\dot{E}_1, \\ \dot{E}_{22} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_3, \\ \dot{E}_{33} &= \dot{E}_2. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

и поэтому стоят в правых частях уравнений (19), (20), (21).

Система уравнений (22) может быть записана в матричной форме следующим образом:

$$\left[\underline{Z} \right] * \left[\dot{I} \right] = \left[\dot{E} \right]. \quad (26)$$

Матрица сопротивлений $\left[\underline{Z} \right]$ составляется с учетом комплексных значений вида (23) и

(24) и имеет вид:

$$\left[\underline{Z} \right] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Матрицы $\left[\dot{I} \right]$ и $\left[\dot{E} \right]$ в (26) являются одно столбцовыми и записываются в виде:

$$\left[\dot{I} \right] = \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\left[\dot{E} \right] = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Решение системы уравнений (22) и соответствующей ей матричной записи (26) удобно выполнить по правилу Крамера. Обозначим через Δ_Z - определитель матрицы (27).

Неизвестные контурные токи представим с помощью трех дополнительных определителей по формулам:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_{Z1}}{\Delta_Z} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \dot{E}_{22} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \dot{E}_{33} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{vmatrix}, \quad (30)$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta_{Z2}}{\Delta_Z} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} \dot{E}_{11} \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} \dot{E}_{22} \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} \dot{E}_{33} \underline{Z}_{33} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\dot{I}_{33} = \frac{\Delta_{Z3}}{\Delta_Z} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} \underline{Z}_{12} \dot{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21} \underline{Z}_{22} \dot{E}_{22} \\ \underline{Z}_{31} \underline{Z}_{32} \dot{E}_{33} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Дополнительный определитель Δ_{ZK} получается из определителя Δ_Z путем вычеркивания k -того столбца и заменой этого столбца значениями столбцовой матрицы (27).

По найденным контурным токам определяются токи в ветвях, представляющие собой либо контурный ток с соответствующим знаком, либо алгебраическую сумму контурных токов, протекающих в конкретной ветви:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{11} - \dot{I}_{33}, \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_{11}, \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_{33}, \\ \dot{I}_4 &= \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33}, \\ \dot{I}_5 &= \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11}, \\ \dot{I}_6 &= \dot{I}_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

При записи выражений токов в (33) учитывалось положительное направление тока каждой ветви и направления протекающих по ней контурных токов. Таким образом, при расчете цепи с использованием МКТ удалось систему из шести уравнений, составленную по методу законов Кирхгофа (16), (17), свести к системе из трех уравнений, составленной по МКТ относительно контурных токов (22). Определив контурные токи, легко найти ток в любой ветви исследуемой цепи.

Применим МКТ для расчета токов в символической форме в рассматриваемой цепи (рис. 5).

Определим вначале для данной цепи комплексные значения элементов матрицы

$\begin{bmatrix} \underline{Z} \end{bmatrix}$ в соответствии с (23), (24):

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_2 = 40 + j175.84 + 4 + 65 - j6.5 = 109 + j169.34 = 201.39e^{j57.2^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_5 = -j1.29 - j4.29 + 4 = 4 - j5.58 = 6.86e^{-j54.4^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_1 = j11.87 - j1.29 + 40 + j175.84 = 40 + j186.42 = 190.66e^{j77.9^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_5 = -4 = 4e^{j180^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_1 = -40 - j175.84 = 180.33e^{-j102.8^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_4 = j1.29 = 1.29e^{j90^\circ}, \text{ Ом}$$

Далее находим комплексные значения контурных э. д. с. \underline{E}_{kk} по формулам (25):

$$\dot{E}_{11} = -j141, \text{ В}$$

$$\dot{E}_{22} = 13.62 + j144.65 = 145.3e^{j84.6^\circ}, \text{ В}$$

$$\dot{E}_{33} = 63.64, \text{ В}$$

Затем рассчитываем определитель Δ_Z матрицы $\begin{bmatrix} \underline{Z} \end{bmatrix}$ (27) и три дополнительных определителя, записанных в формулах (30), (31), (32):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{Z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201.39e^{j57.2^\circ} & 4e^{j180^\circ} & 180.33e^{-j102.8^\circ} \\ 4e^{j180^\circ} & 6.86e^{-j54.4^\circ} & 1.29e^{j90^\circ} \\ 180.33e^{-j102.8^\circ} & 1.29e^{j90^\circ} & 190.66e^{j77.9^\circ} \end{bmatrix} = \\ &= 263403.5e^{j80.7^\circ} + 930.5e^{j167.2^\circ} + 930.5e^{j167.2^\circ} - 223079.7e^{-j260^\circ} - 3050.6e^{j77.9^\circ} - 335.1e^{j237.2^\circ} = \\ &= (42567 + j259941.3) + (-907.38 + j206.15) + (-907.38 + j206.15) - \\ &- (-38737.38 + j219690.6) - (639.46 + j2982.8) - (-181.54 - j281.71) = \\ &= 79031.67 + j37961.85 = 87676.15e^{j25.7^\circ}, \text{ Ом} \end{aligned}$$

$$\Delta_{Z1} = \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{13} \\ \dot{E}_{22} \underline{Z}_{22} \underline{Z}_{23} \\ \dot{E}_{33} \underline{Z}_{32} \underline{Z}_{33} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 141e^{-j90^\circ} & 4e^{j180^\circ} & 180.33e^{-j102.8^\circ} \\ 145.3e^{j84.6^\circ} & 6.86e^{-j54.4^\circ} & 1.29e^{j90^\circ} \\ 63.64 & 1.29e^{j90^\circ} & 190.66e^{j77.9^\circ} \end{bmatrix} = 89655.25e^{-j55.3^\circ}$$

$$\Delta_{Z2} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} \dot{E}_{11} \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} \dot{E}_{22} \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} \dot{E}_{32} \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201.39e^{j57.2^\circ} & 141e^{-j90^\circ} & 180.33e^{-j102.8^\circ} \\ 4e^{j180^\circ} & 145.3e^{j84.6^\circ} & 1.29e^{j90^\circ} \\ 180.33e^{-j102.8^\circ} & 63.64 & 190.66e^{j77.9^\circ} \end{bmatrix} = 1790973.6e^{j165^\circ}$$

$$\Delta_{Z3} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} \underline{Z}_{12} \dot{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21} \underline{Z}_{22} \dot{E}_{22} \\ \underline{Z}_{31} \underline{Z}_{32} \dot{E}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201.39e^{j57.2^\circ} & 4e^{j180^\circ} & 141e^{-j90^\circ} \\ 4e^{j180^\circ} & 6.86e^{-j54.4^\circ} & 145.3e^{j84.6^\circ} \\ 180.33e^{-j102.8^\circ} & 1.29e^{j90^\circ} & 63.64 \end{bmatrix} = 121871e^{-j50.5^\circ}$$

Подставляя найденные значения в соответствующие формулы, находим значения контурных токов:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} &= \frac{\Delta_{Z1}}{\Delta_Z} = \frac{89655.25e^{-j55.3^\circ}}{87676.15e^{j25.7^\circ}} = 1.023e^{-j81^\circ} = 0.16 - j1.01, \text{ A} \\ \dot{I}_{22} &= \frac{\Delta_{Z2}}{\Delta_Z} = \frac{1790973.6e^{j165^\circ}}{87676.15e^{j25.7^\circ}} = 20.43e^{j139.3^\circ} = -15.5 + j13.31, \text{ A} \\ \dot{I}_{33} &= \frac{\Delta_{Z3}}{\Delta_Z} = \frac{121870.98e^{-j50.5^\circ}}{87676.15e^{j25.7^\circ}} = 1.39e^{-j76.2^\circ} = 0.332 - j1.35, \text{ A} \end{aligned}$$

По формулам (33) определяем комплексные токи во всех ветвях цепи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 0.16 - j1.01 - 0.33 + j1.35 = -0.17 + j0.34 = 0.38e^{j116.6^\circ}, \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= 0.16 - j1.01 = 1.022e^{-j81^\circ}, \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= 0.33 - j1.35 = 1.39e^{-j76.3^\circ}, \text{ A} \\ \dot{I}_4 &= -15.53 + j13.38 - 0.33 + j1.35 = -15.86 + j14.73 = 21.65e^{j137^\circ}, \text{ A} \\ \dot{I}_5 &= -15.53 + j13.38 - 0.16 + j1.01 = -15.69 + j14.39 = 21.3e^{j137.5^\circ}, \text{ A} \\ \dot{I}_6 &= -15.53 + j13.38 = 20.5e^{j139.3^\circ}, \text{ A} \end{aligned} \tag{34}$$

Проверим выполнение первого закона Кирхгофа для узла 1 рассматриваемой цепи, подставив в формулу (16) для узла 1 рассчитанные значения токов \dot{I}_1 и \dot{I}_3 :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_3 \quad (35)$$

Складывая в алгебраической форме комплексные значения токов \dot{I}_1 и \dot{I}_3 , получаем численное значение тока \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = -0.17 + j0.34 + 0.33 - j1.35 = 0.16 - j1.01 = 1.022e^{-j81^\circ}, \text{ А}$$

Полученный результат совпадает со значением тока $\dot{I}_2 = 1.022e^{-j81^\circ}$, А, полученным ранее в результате расчета режима цепи МКТ. Аналогичная проверка для других узлов цепи также подтверждает выполнение первого закона Кирхгофа с достаточно высокой точностью:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_5 - \dot{I}_4 = -0.17 + j0.34 - 15.69 + j14.39 + 15.86 - j14.73 = 0$$

$$\dot{I}_4 + \dot{I}_3 - \dot{I}_6 = -15.86 + j14.73 + 0.33 - j1.35 + 15.53 - j13.38 = 0$$

Проверка второго закона Кирхгофа для контура с контурным током \dot{I}_{11} дает следующие результаты. Вначале перепишем из (17) уравнение, составленное для этого контура по второму закону Кирхгофа относительно токов ветвей:

$$\dot{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - \dot{I}_5 R_3 + \frac{1}{j\omega C_1} \dot{I}_2 + \dot{I}_2 R_2 = -\dot{E}_1$$

и подставим в него численные значения заданных и рассчитанных параметров:

$$0.38e^{j116.6^\circ} \times 40 + 0.38e^{j116.6^\circ} \times 175.84e^{j90^\circ} - 21.3e^{j137.5^\circ} \times 4 + 1.022e^{-j81^\circ} \times 6.5e^{-j90^\circ} + 1.022e^{-j81^\circ} \times 65 = -j141$$

$$15.2e^{j116.6^\circ} + 66.82e^{j206.6^\circ} - 85.2e^{j137.5^\circ} + 6.64e^{-j171^\circ} + 66.43e^{-j81^\circ} = -j141$$

$$(-6.81 + j13.6) + (-59.75 - j30) - (-62.81 + j57.56) + (-6.56 - j1.04) + (10.39 - j65.61) = -j141$$

$$0.08 - j140.61 = -j141$$

Запишем левую и правую часть уравнения в показательной форме и рассчитаем погрешность расчета Δ :

$$140.61e^{-j89.96^\circ} = 141e^{-j90^\circ}$$

$$\Delta = \frac{0.39}{141} \times 100\% = 0.27\%$$

Полученная погрешность $\Delta = 0.27\%$ меньше допустимой погрешности -1% .

2.3.3. Расчет установившегося режима цепи с помощью программы «Sigma-2»

Полученную п. 5.2. систему уравнений (22) можно решить не только применяя правило Крамера, но и значительно эффективнее, используя компьютерную программу «Sigma-2», имеющуюся в лаборатории ТЭЦ СКФ МТУСИ. После загрузки программы нужно указать число уравнений, входящих в систему (22), и будут ли коэффициенты в системе комплексными числами. После этого нужно ввести коэффициенты уравнений, входящих в (22), по изложенной ниже схеме.

Вначале подставим в уравнения системы (22):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{11} \underline{Z}_{11} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{12} + \dot{I}_{33} \underline{Z}_{13} &= \dot{E}_{11}, \\ \dot{I}_{11} \underline{Z}_{21} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{22} + \dot{I}_{33} \underline{Z}_{23} &= \dot{E}_{22}, \\ \dot{I}_{11} \underline{Z}_{31} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{32} + \dot{I}_{33} \underline{Z}_{33} &= \dot{E}_{33}. \end{aligned} \right\}$$

численные значения всех комплексных сопротивлений и э. д. с.:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{11}(109 + j169.34) + \dot{I}_{22}(-4 + j0) + \dot{I}_{33}(-40 - j175.84) &= 0 - j141 \\ \dot{I}_{11}(-4 + j0) + \dot{I}_{22}(4 - j5.58) + \dot{I}_{33}(0 + j1.29) &= 13.62 + j144.65 \\ \dot{I}_{11}(-40 - j175.84) + \dot{I}_{22}(0 + j1.29) + \dot{I}_{33}(40 + j186.42) &= 63.64 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

а затем введем их построчно, начиная с первой строки и первого коэффициента. При вводе коэффициентов должна присутствовать и действительная, и мнимая часть коэффициента. Если в коэффициенте какая-то часть отсутствует (т.е. равна нулю), то тогда вместо нее вводится 0.

После ввода всех коэффициентов системы (36) программа выдала такие значения контурных токов, округленные до третьего знака после запятой:

$$\dot{I}_{11} = 0.16 - j1.013 = 1.025e^{-j81^\circ}, \text{ А}$$

$$\dot{I}_{22} = -15.53 + j13.376 = 20.496e^{j139.3^\circ}, \text{ А}$$

$$\dot{I}_{33} = 0.331 - j1.353 = 1.393e^{-j76.3^\circ}, \text{ А}$$

Сравнивая полученные с помощью программы «Sigma-2» контурные токи, видим, что они совпали с полученными ранее аналогичными значениями с высокой точностью (доли процента).

2.3.4. Определение мгновенных значений токов ветвей

Для записи мгновенных значений токов ветвей воспользуемся представлением найденных токов в показательной форме. Ограничимся записью только первых трех токов, представленных в (34). Используя выражение синусоидальной функции в зависимости от времени (1) и ее комплексное представление (3), запишем для первых трех токов их мгновенные значения:

$$\begin{aligned}i_1(t) &= 0.38\sqrt{2} \sin(\omega t + 116.6^\circ), \text{ А}, \\i_2(t) &= 1.022\sqrt{2} \sin(\omega t - 81^\circ), \text{ А}, \\i_3(t) &= 1.39\sqrt{2} \sin(\omega t - 76.3^\circ), \text{ А}.\end{aligned}\tag{36}$$

Покажем выполнение первого закона Кирхгофа (35) для мгновенных значений токов в произвольный момент времени. С этой целью рассчитаем значения токов (36) в момент времени t_1 , равный:

$$t_1 = 1 \times 10^{-3}, \text{ с}$$

При выполнении расчетов следует учесть, что переменная составляющая фазы ωt_1 в (36) измеряется в радианах, поэтому начальная фаза тоже должна подставляться в радианах. Подставим численные значения ω и t_1 и определим мгновенные значения токов:

$$\begin{aligned}i_1(t_1) &= 0.381\sqrt{2} \sin(\omega t_1 + 116.6^\circ) = 0.381 \times 1.41 \sin(4396 \times 10^{-3} + 2.035) = \\&= 0.539 \sin(4.396 + 2.035) = 0.082, \text{ А} \\i_2(t_1) &= 1.022\sqrt{2} \sin(\omega t_1 - 81^\circ) = 1.022 \times 1.414 \sin(4396 \times 10^{-3} - 1.414) = \\&= 1.445 \sin(4.396 - 1.414) = 1.445 \sin(2.982) = 0.229, \text{ А} \\i_3(t_1) &= 1.39\sqrt{2} \sin(\omega t_1 - 72.6^\circ) = 1.39 \times 1.414 \sin(4396 \times 10^{-3} - 1.33) = \\&= 1.965 \sin(3.066) = 0.147, \text{ А}\end{aligned}$$

Подставив полученные значения токов в уравнение (35):

$$0.229 = 0.082 + 0.147; \quad 0.229 = 0.229$$

убеждаемся в том, что первый закон Кирхгофа выполняется и для мгновенных значений токов с достаточно высокой точностью:

2.4. Расчет цепи методом узловых потенциалов (МУП)

2.4.1. Основные положения МУП

Метод узловых потенциалов, также как и МКТ, является широко распространенным методом расчета электрических цепей. Число уравнений N_2 , которое нужно составить при использовании этого метода, определяется числом узлов N_y схемы и равно:

$$N_2 = N_Y - 1. \quad (37)$$

Из двух этих методов при расчете цепи используется тот, при использовании которого потребуется составить систему с меньшим количеством уравнений. Количество уравнений, которое необходимо составить при использовании МУП или МКТ, зависит от топологии цепи, количества имеющихся в схеме источников тока и напряжения, вида их включения.

При использовании МУП один из узлов цепи, к которому подключено наибольшее число ветвей, выбирается в качестве базисного, и его потенциал считается равным нулю. Потенциалы всех остальных узлов определяются относительно потенциала базисного узла, а так как он равен нулю, то они по величине совпадают с напряжениями этих узлов. Далее для всех узлов цепи, кроме базисного, составляются уравнения по первому закону Кирхгофа. Полученная система уравнений преобразуется в каноническую форму и решается относительно потенциалов всех узлов цепи. Рассчитав потенциалы узлов, с помощью закона Ома легко определить ток в любой ветви.

2.4.2. Расчет цепи в матричной форме

Применим МУП для расчета токов в рассматриваемой цепи (рис.6).

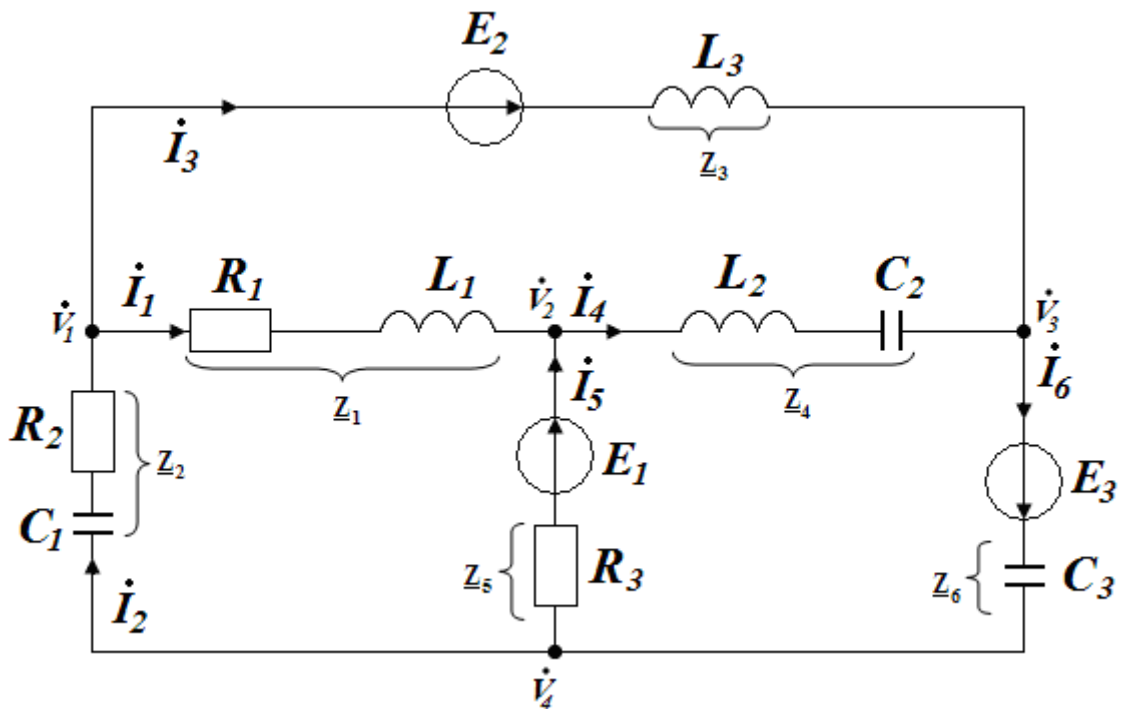


Рис. 6

В качестве базисного узла выберем узел 4, а комплексные потенциалы остальных узлов обозначим как $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$. Система уравнений, составленная по МУП [2] для

рассматриваемой цепи в общем виде и канонической форме, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \underline{Y}_{11} + \dot{V}_2 \underline{Y}_{12} + \dot{V}_3 \underline{Y}_{13} &= \dot{J}_{11} \\ \dot{V}_1 \underline{Y}_{21} + \dot{V}_2 \underline{Y}_{22} + \dot{V}_3 \underline{Y}_{23} &= \dot{J}_{22} \\ \dot{V}_1 \underline{Y}_{13} + \dot{V}_2 \underline{Y}_{23} + \dot{V}_3 \underline{Y}_{33} &= \dot{J}_{33}\end{aligned}\quad (38)$$

где:

- $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{33}$ - собственные проводимости узлов 1, 2, 3, определяемые как сумма проводимостей ветвей, подключенных к соответствующему узлу;
- $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31}, \underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32}$ - взаимные проводимости, определяемые как сумма проводимостей ветвей, включенных между двумя указанными смежными узлами;
- $\dot{J}_{11}, \dot{J}_{22}, \dot{J}_{33}$ - узловые токи, определяемые как алгебраическая сумма:
 - токов всех источников тока, подключенных к данному узлу (токи, направленные к рассматриваемому узлу, берутся с «плюсом», направленные от узла – с «минусом»);
 - произведения э. д. с. источника напряжения, включенного в ветвь, подключенную к рассматриваемому узлу, на проводимость этой ветви. Подобным образом учитываются все источники, подключенные к рассматриваемому узлу. Если э. д. с. источника направлена к рассматриваемому узлу, то указанное произведение берется со знаком «плюс», в противном случае - берется «минус».

Составим систему уравнений по МУП для рассматриваемой цепи:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) - \dot{V}_2 \underline{Y}_1 - \dot{V}_3 \underline{Y}_3 &= -\dot{E}_2 \underline{Y}_3 \\ -\dot{V}_1 \underline{Y}_1 + \dot{V}_2(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) - \dot{V}_3 \underline{Y}_4 &= \dot{E}_1 \underline{Y}_5 \\ -\dot{V}_1 \underline{Y}_3 - \dot{V}_2 \underline{Y}_4 + \dot{V}_3(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6) &= \dot{E}_2 \underline{Y}_3 - \dot{E}_3 \underline{Y}_6\end{aligned}\quad (39)$$

где - $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$, $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5$, $\underline{Y}_{33} = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6$ - собственные проводимости узлов 1,2,3;

- $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_1$; $\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = -\underline{Y}_3$; $\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -\underline{Y}_4$ - взаимные проводимости между узлами (1,2), (1,3) и (2,3);

- $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3, \underline{Y}_4, \underline{Y}_5, \underline{Y}_6$ - комплексные проводимости ветвей цепи.

Выразим комплексные проводимости ветвей через их комплексные сопротивления \underline{Z}_k и рассчитаем численные значения проводимостей \underline{Y}_k :

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{180.33e^{j77.2^\circ}} = 5.545 \times 10^{-3} e^{-j77.2^\circ} = 1.228 \times 10^{-3} - j5.407 \times 10^{-3}, \text{См} \\
\underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{65.32e^{-j5.7^\circ}} = 15.31 \times 10^{-3} e^{j5.7^\circ} = 15.23 \times 10^{-3} + j1.52 \times 10^{-3}, \text{См} \\
\underline{Y}_3 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{11.87e^{j90^\circ}} = 84.25 \times 10^{-3} e^{-j90^\circ} = -j84.25 \times 10^{-3}, \text{См} \\
\underline{Y}_4 &= \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{1}{1.29e^{-j90^\circ}} = 0.775e^{j90^\circ} = j0.775, \text{См} \\
\underline{Y}_5 &= \frac{1}{\underline{Z}_5} = \frac{1}{4} = 0.25, \text{См}
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\underline{Y}_6 = \frac{1}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{4.29e^{-j90^\circ}} = 0.233e^{j90^\circ} = j0.233, \text{См}$$

Для решения системы уравнений (39) запишем ее в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\underline{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{J}} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Матричные обозначения в написанном уравнении имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{J}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{11} \\ \dot{j}_{22} \\ \dot{j}_{33} \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Матрица (42) носит название матрицы узловых проводимостей для анализируемой цепи. Диагональные элементы $\left(\underline{Y}_{kk} \right)$ данной матрицы представляют собой собственные проводимостей узлов цепи. Матрица (43) – это матрица узловых потенциалов, а матрица (44) – матрица узловых токов.

Подставив численные значения параметров, рассчитаем собственные проводимости узлов цепи, взаимные проводимости и запишем матрицы (42), (43), (44) в численном виде:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 10^{-3}(1.228 - j5.407 + 15.23 + j1.52 - j84.25) = \\
&= 10^{-3}(16.458 - j88.137) = 0.0896e^{-j79.4^\circ}, C_M \\
\underline{Y}_{22} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = 1.228 \times 10^{-3} - j5.407 \times 10^{-3} + 0.25 + j0.7752 = \\
&= 0.2512 + j0.7698 = 0.8097e^{j71.9^\circ}, C_M \\
\underline{Y}_{33} &= \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 = -j0.0842 + j0.7752 + j0.2331 = j0.9241 = 0.9241e^{j90^\circ}, C_M \\
\underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_1 = 0.0055e^{j102.5^\circ}, C_M \\
\underline{Y}_{13} &= \underline{Y}_{31} = -\underline{Y}_3 = 0.0842e^{j90^\circ}, C_M \\
\underline{Y}_{23} &= \underline{Y}_{32} = -\underline{Y}_4 = 0.775e^{-j90^\circ}, C_M
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0896e^{-j79.4^\circ} & 0.0055e^{j102.8^\circ} & 0.0842e^{j90^\circ} \\ 0.0055e^{j102.8^\circ} & 0.8097e^{j71.9^\circ} & 0.7752e^{-j90^\circ} \\ 0.0842e^{j90^\circ} & 0.7752e^{-j90^\circ} & 0.9241e^{j90^\circ} \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} \underline{Y} \end{bmatrix} = 0.0202 + j0.0196 = 0.0281e^{j44.1^\circ}, C_M \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\dot{j}_{11} &= -\dot{E}_2 \underline{Y}_3 = (-63.64) \times (-j0.0842) = j5.361 = 5.361e^{j90^\circ}, A \\
\dot{j}_{22} &= \dot{E}_1 \underline{Y}_5 = j141 \times 0.25 = j35.25 = 35.25e^{j90^\circ}, A \\
\dot{j}_{33} &= \dot{E}_2 \underline{Y}_3 - \dot{E}_3 \underline{Y}_6 = (63.64 \times (-j0.0842)) - (14.14e^{j15^\circ} \times j0.2331) = \\
&= (0.8531 - j8.5447) = 8.5872e^{-j84.3^\circ}, A
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{11} \\ \dot{j}_{22} \\ \dot{j}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.361e^{j90^\circ}, A \\ 35.25e^{j90^\circ}, A \\ 8.5872e^{-j84.3^\circ}, A \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0896e^{-j79.4^\circ} & 0.0055e^{j102.8^\circ} & 0.0842e^{j90^\circ} \\ 0.0055e^{j102.8^\circ} & 0.8097e^{j71.9^\circ} & 0.7752e^{-j90^\circ} \\ 0.0842e^{j90^\circ} & 0.7752e^{-j90^\circ} & 0.9241e^{j90^\circ} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.361e^{j90^\circ} \\ 35.25e^{j90^\circ} \\ 8.5872e^{-j84.3^\circ} \end{bmatrix} \tag{49}$$

Решение системы уравнений (49), представленной в матричной форме, совершенно аналогично рассмотренному ранее использованию метода Крамера. Определитель матрицы (46) обозначен, как Δ_Y , и значение его рассчитано выше (47). Необходимо рассчитать три дополнительных определителя, обозначенных как

$\Delta_{Y1}, \Delta_{Y2}, \Delta_{Y3}$. Каждый из них Δ_{yk} получается из основного определителя Δ_Y путем вычеркивания k -го столбца и заменой его значениями матрицы (48).

Приведем только конечные результаты расчета искомых комплексных потенциалов всех трех узлов цепи:

$$\dot{V}_1 = \frac{\Delta_{Y1}}{\Delta_Y} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{13} \\ \dot{j}_{22} \underline{Y}_{22} \underline{Y}_{23} \\ \dot{j}_{33} \underline{Y}_{32} \underline{Y}_{33} \end{vmatrix} = \frac{1.8951e^{j137.6^\circ}}{0.0281e^{j44.1^\circ}} = 67.44e^{j93.5^\circ}, B \quad (50)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\Delta_{Y2}}{\Delta_Y} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} \dot{j}_{11} \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} \dot{j}_{22} \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} \dot{j}_{33} \underline{Y}_{33} \end{vmatrix} = \frac{2.9523e^{j97.1^\circ}}{0.0281e^{j44.1^\circ}} = 105.06e^{j53^\circ}, B \quad (51)$$

$$\dot{V}_3 = \frac{\Delta_{Y3}}{\Delta_Y} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{12} \dot{j}_{11} \\ \underline{Y}_{21} \underline{Y}_{22} \dot{j}_{22} \\ \underline{Y}_{31} \underline{Y}_{32} \dot{j}_{33} \end{vmatrix} = \frac{2.155e^{j99.4^\circ}}{0.0281e^{j44.1^\circ}} = 76.7e^{j55.3^\circ}, B. \quad (52)$$

По найденным значениям узловых потенциалов определяются токи во всех ветвях цепи по закону Ома с помощью следующих формул, имея в виду, что $\dot{V}_4 = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) \underline{Y}_1 = (67.44e^{j93.5^\circ} - 105.06e^{j53^\circ}) \times 0.0055e^{-j77.2^\circ} = \\ &= (-4.1171 + j67.3142 - 63.2266 - j83.904) \times 0.0055e^{-j77.2^\circ} = 69.357e^{-j166.2^\circ} \times 0.0055e^{-j77.2^\circ} = \\ &= 0.3814e^{-j243.4^\circ} = 0.3814e^{j116.4^\circ}, A \\ \dot{I}_2 &= (\dot{V}_4 - \dot{V}_1) \underline{Y}_2 = (0 - 67.44e^{j93.5^\circ}) \times 0.0153e^{j5.7^\circ} = -1.032e^{j99.2^\circ} = 1.032e^{-j80.8^\circ}, A \\ \dot{I}_3 &= (\dot{V}_1 - \dot{V}_3) \underline{Y}_3 + \dot{E}_2 \underline{Y}_3 = (\dot{V}_1 - \dot{V}_3 + \dot{E}_2) \underline{Y}_3 = (67.44e^{j93.5^\circ} - 76.7e^{j55.3^\circ} + 63.64) \times 0.0842e^{-j90^\circ} = \\ &= (-4.1171 + j67.3142 - 43.6637 - j63.0584 + 63.64) \times 0.0842e^{-j90^\circ} = \\ &= (15.8592 + j4.2558) \times (-j0.0842) = -j1.3353 + 0.3583 = 1.3825e^{-j75^\circ}, A \\ \dot{I}_4 &= (\dot{V}_2 - \dot{V}_3) \underline{Y}_4 = (105.06e^{j53^\circ} - 76.7e^{j55.3^\circ}) \times 0.7752e^{j90^\circ} = \\ &= (63.2266 + j83.904 - 43.664 - j63.058) \times j0.7752 = \\ &= (19.562 + j20.846) \times j0.7752 = -16.16 + j15.1644 = 22.161e^{j136.8^\circ}, A \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}_5 &= (\dot{V}_4 - \dot{V}_2) \underline{Y}_5 + \dot{E}_1 \underline{Y}_5 = (\dot{V}_4 - \dot{V}_2 + \dot{E}_1) \underline{Y}_5 = (0 - 105.06e^{j53^\circ} + j141) \times 0.25 = \\
&= (-63.2266 - j83.904 + j141) \times 0.25 = -15.8065 + j14.274 = 21.3e^{j137.9^\circ}, A \\
\dot{I}_6 &= (\dot{V}_3 - \dot{V}_4) \underline{Y}_6 + \dot{E}_3 \underline{Y}_6 = (\dot{V}_3 - \dot{V}_4 + \dot{E}_3) \underline{Y}_6 = (76.7e^{j55.3^\circ} - 0 + 14.14e^{j15^\circ}) \times j0.2331 = \\
&= (43.664 + j63.058 + 13.66 + j3.66) \times j0.2331 = (57.324 + j66.718) \times j0.2331 = \\
&= -15.552 + j13.3622 = 20.504e^{j139.3^\circ}, A
\end{aligned} \tag{53}$$

Сравнивая токи ветвей, рассчитанные МКТ и МУП, видим, что погрешности в определении модуля токов составили следующие значения:

$$\Delta I_1 = 0\%, \quad \Delta I_2 = 0.98\%, \quad \Delta I_3 = 0.54\%, \quad \Delta I_4 = 2.3\%, \quad \Delta I_5 = 0.47\%, \quad \Delta I_6 = 0\%.$$

Максимальная погрешность получилась для тока \dot{I}_4 . Это связано с тем, что для расчета проводимостей нужно было взять 4-5 значащих цифр после запятой, так как сами проводимости имеют очень малые значения. Погрешность в определении аргументов токов не превышала 1.5 градуса для тока \dot{I}_3 - $\Delta \varphi_3 = 1.2^\circ$.

2.4.3. Расчет установившегося режима цепи с помощью программы «Sigma-2»

Полученную в п. 2.4.2. систему уравнений (34):

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 \underline{Y}_{11} + \dot{V}_2 \underline{Y}_{12} + \dot{V}_3 \underline{Y}_{13} &= \dot{J}_{11} \\
\dot{V}_1 \underline{Y}_{21} + \dot{V}_2 \underline{Y}_{22} + \dot{V}_3 \underline{Y}_{23} &= \dot{J}_{22} \\
\dot{V}_1 \underline{Y}_{13} + \dot{V}_2 \underline{Y}_{23} + \dot{V}_3 \underline{Y}_{33} &= \dot{J}_{33}
\end{aligned}$$

можно решить более эффективно, используя компьютерную программу «Sigma-2». Для этого увеличим точность расчета проводимостей и узловых токов и подставим их в уравнения (38). Получится следующая система:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{V}_1(0.016461 - j0.088133) + \dot{V}_2(-0.001228 + j0.005407) + \dot{V}_3(0 + j0.084246) &= 0 + j5.361415 \\
\dot{V}_1(-0.001228 + j0.005407) + \dot{V}_2(0.251228 + j0.767787) + \dot{V}_3(0 - j0.775194) &= 0 + j35.25 \\
\dot{V}_1(0 + j0.084246) + \dot{V}_2(0 - j0.775194) + \dot{V}_3(0 + j0.924048) &= 0.850663 - j8.536133
\end{aligned} \right\} \tag{54}$$

Решение системы уравнений (54) дает следующие значения потенциалов узлов:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -3.90525 + j67.42156 = 67.53e^{j93.3^\circ}, B \\
\dot{V}_2 &= 62.54958 + j84.07211 = 104.79e^{j53.3^\circ}, B \\
\dot{V}_3 &= 43.59181 + j63.46156 = 76.99e^{j55.5^\circ}, B
\end{aligned} \tag{55}$$

Расчет токов ветвей по найденным потенциалам узлов (50) дал следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) / \underline{Z}_1 = (-3.905 + j67.42 - 62.55 - j84.072) / 180.33e^{j77.2^\circ} = \\
 &= (-66.455 - j16.652) / 180.33e^{j77.2^\circ} = 68.509e^{-j165.9^\circ} / 180.33e^{j77.2^\circ} = \\
 &= 0.38e^{-j243.1^\circ} = 0.38e^{j116.9^\circ}, \text{ A} \\
 \dot{I}_2 &= (\dot{V}_4 - \dot{V}_1) / \underline{Z}_2 = (0 + 3.905 - j67.42) / 65.32e^{-j5.7^\circ} = 67.53e^{-j86.7^\circ} / 65.32e^{-j5.7^\circ} = \\
 &= 1.0339e^{-j81^\circ}, \text{ A} \\
 \dot{I}_3 &= (\dot{V}_1 - \dot{V}_3 + \dot{E}_2) / \underline{Z}_3 = (-3.905 + j67.42 - 43.59 - j63.46 + 63.64) / 11.87e^{j90^\circ} = \\
 &= (16.145 + j3.96) / 11.87e^{j90^\circ} = 16.62e^{j13.8^\circ} / 11.87e^{j90^\circ} = 1.4e^{-j76.2^\circ}, \text{ A} \\
 \dot{I}_4 &= (\dot{V}_2 - \dot{V}_3) / \underline{Z}_4 = (62.55 + j84.07 - 43.59 - j63.46) / 1.29e^{-j90^\circ} = \\
 &= (18.96 + j20.61) / 1.29e^{-j90^\circ} = 28e^{j47.4^\circ} / 1.29e^{-j90^\circ} = 21.7e^{j137.4^\circ}, \text{ A} \\
 \dot{I}_5 &= (\dot{V}_4 - \dot{V}_2 + \dot{E}_1) / \underline{Z}_5 = (0 - 62.55 - j84.07 + j141) / 4 = (-62.55 + j56.93) / 4 = \\
 &= 84.58e^{j137.7^\circ} / 4 = 21.14e^{j137.7^\circ}, \text{ A} \\
 \dot{I}_6 &= (\dot{V}_3 - \dot{V}_4 + \dot{E}_3) / \underline{Z}_6 = (43.59 + j63.46 - 0 + 13.62 + j3.65) / 4.29e^{-j90^\circ} = \\
 &= (57.21 + j67.11) / 4.29e^{-j90^\circ} = 88.18e^{j79.6^\circ} / 4.29e^{-j90^\circ} = 20.55e^{j139.6^\circ}, \text{ A}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Сравнивая токи ветвей, ранее рассчитанные МКТ и полученные МУП с помощью программы «Sigma-2», видим, что погрешности в определении модулей токов составили в данном случае следующие значения:

$$\Delta I_1 = 0.26\%, \quad \Delta I_2 = 1.15\%, \quad \Delta I_3 = 0.72\%, \quad \Delta I_4 = 0.23\%, \quad \Delta I_5 = 0.75\%, \quad \Delta I_6 = 0.24\%.$$

Максимальная погрешность снизилась до 1.15% и получилась для тока \dot{I}_2 . Максимальная погрешность в определении аргументов токов не превышала 0.4 градуса.

2.5. Проверка баланса мощностей

Проверка баланса мощностей в цепи переменного тока заключается в определении комплексных мощностей всех источников электрической энергии и сопоставлении их комплексными мощностями всех потребителей. В качестве источников в данной цепи выступают источники э. д. с., а в качестве потребителей - активные и реактивные сопротивления ветвей. В любой электрической цепи произведенная энергия должна быть равна израсходованной, так как накапливать энергию в обычной цепи нельзя. Также нельзя израсходовать больше, чем произведено [1].

Если в ветви с током $\dot{I} = I e^{j\psi_I}$ действует источник электрической энергии с э. д. с. $\dot{E} = E e^{j\psi_E}$, то комплексная мощность \hat{S} , развиваемая этим источником и отдаваемая во внешнюю цепь, определяется выражением [1]:

$$\hat{S} = \dot{E} \dot{I}^* = E e^{j\psi_E} \times I e^{-j\psi_I} = E \times I e^{j(\psi_E - \psi_I)} = S e^{j\varphi}, \text{ ВА} \quad (57)$$

где \dot{I}^* - комплексно - сопряженное значение тока ветви \dot{I} ,

ψ_E, ψ_I - начальные фазы (аргументы) э. д. с. \dot{E} и тока \dot{I} ,

S - полная мощность, выделяемая источником напряжения, измеряется в ВА (вольт амперах),

φ - угол сдвига фаз между э. д. с. источника и протекающим через источник током.

Как любая комплексная величина, \hat{S} может быть записана в алгебраической форме:

$$\hat{S} = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ \quad (58)$$

где P - активная мощность источника, измеряется в ваттах (Вт);

Q - реактивная мощность источника, измеряется в варах (вольт-амперах реактивных).

Модуль комплексной мощности связан с активной и реактивной мощностью следующей формулой:

$$S = \left[\hat{S} \right] = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (59)$$

При наличии нескольких источников комплексная мощность (57) рассчитывается для каждого источника в отдельности, а полученные результаты складываются алгебраически, т.е. с учетом знака мощности. Мощность будет положительной, если направления тока и э. д. с. источника совпадают, и следовательно источник отдает мощность. Если направления тока и э. д. с. не совпадают, то мощность берется со знаком минус, и источник в данном случае не отдает, а потребляет мощность.

Комплексная мощность, потребляемая в элементах цепи и нагрузке, включает в себя активную мощность, расходуемую в активных сопротивлениях, и реактивную мощность, потребляемую реактивными сопротивлениями. Для расчета этих мощностей необходимо знать значение тока, протекающего в конкретной ветви. Предположим, что резистивный элемент (R) включен в ветвь с током \dot{I}_1 , а реактивные элементы (L и C) находятся в ветвях с токами \dot{I}_2 и \dot{I}_3 соответственно. В этом случае мощность, рассеиваемая на резисторе, определяется значением:

$$P = I_1^2 R, \quad (60)$$

где $I_1 = \left| \dot{I}_1 \right|$ - модуль (действующее значение) тока \dot{I}_1 . Реактивные мощности, потребляемые

в реактивных элементах L и C , рассчитываются по формулам:

$$Q_L = I_2^2 x_L, \quad (61)$$

$$Q_C = -I_3^2 x_C, \quad (62)$$

где I_2, I_3 - модули соответствующих комплексных токов;

x_L, x_C - значение реактивных сопротивлений индуктивности и емкости.

Если в цепи содержится несколько резистивных и реактивных элементов, то потребляемая мощность определяется в каждом из них, а затем полученные значения суммируются: отдельно в резистивных и отдельно в реактивных элементах. Баланс проверяется отдельно по активным и отдельно по реактивным мощностям.

Проверим баланс для рассматриваемой цепи, взяв значения токов, полученные МКТ. Рассчитаем сначала комплексные мощности всех трех источников $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3$:

$$\hat{S}_1 = \dot{E}_1 I_5^* = 141e^{j90^\circ} \times 21,3e^{-j137,5^\circ} = 3003,3e^{-j47,5^\circ} = 2029 - j2214,26, \text{BA}$$

$$\hat{S}_2 = \dot{E}_2 I_3^* = 63,64 \times 1,39e^{j76,3^\circ} = 88,46e^{j76,3^\circ} = 20,95 + j85,94, \text{BA}$$

$$\hat{S}_3 = \dot{E}_3 I_6^* = 14,14e^{j15^\circ} \times 20,5e^{-j139,3^\circ} = 287,04e^{-j124,3^\circ} = -161,75 - j237,12, \text{BA}$$

Суммируя комплексные мощности источников, получаем суммарную комплексную мощность:

$$\begin{aligned} \hat{S}_H &= \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 = 2029 - j2214,26 + 20,95 + j85,94 - 161,75 - j237,12 = \\ &= 1888,2 - j2365,44 = 3026,6e^{-j51,4^\circ}, \text{BA} \end{aligned} \quad (63)$$

Из (58) следует, что суммарное значение активных P_H и реактивных Q_H мощностей источников равно:

$$P_H = 1888,2, \text{Вт} \quad (64)$$

$$Q_H = -2365,44, \text{вар} \quad (65)$$

С помощью (60) рассчитываем значение активных мощностей на трех резистивных элементах:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (0,38)^2 \times 40 = 5,776, \text{Вт}$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (1,022)^2 \times 65 = 67,89, \text{Вт}$$

$$P_3 = I_5^2 R_3 = (21,3)^2 \times 4 = 1814,76, \text{Вт}$$

Суммируя активные мощности резистивных элементов, получаем суммарную мощность потребителей:

$$P_{\Pi} = P_1 + P_2 + P_3 = 5.776 + 67.89 + 1814.76 = 1888.42, \text{ Вт} \quad (66)$$

Небаланс по активным мощностям источников и потребителей составил:

$$\Delta P = \frac{1888.42 - 1888.2}{1888.2} \times 100\% = 0.01\% \quad (67)$$

Допустимое значение небаланса по активным мощностям считается равным 1%.

Используя выражения (61), (62), рассчитаем реактивные мощности потребителей:

$$\begin{aligned} Q_{\Pi} &= I_1^2 x_{L1} + I_2^2 (-x_{C1}) + I_3^2 x_{L3} + I_4^2 (x_{L2} - x_{C2}) + I_6^2 (-x_{C3}) = \\ &= (0.38)^2 \times 175.84 - (1.022)^2 \times 6.5 + (1.39)^2 \times 11.87 - (21.65)^2 \times 1.29 - (20.5)^2 \times 4.29 = \\ &= 25.39 - 6.79 + 22.93 - 604.65 - 1802.87 = 48.32 - 2414.31 = -2365.99, \text{ вар} \end{aligned}$$

Небаланс по реактивным мощностям источников и потребителей составляет:

$$\Delta Q = \frac{-2365.44 - (-2365.99)}{2365.44} \times 100\% = 0.02\%$$

Допустимое значение небаланса по реактивным мощностям считается равным 3-5%.

Полученные значения $\Delta P, \Delta Q$ свидетельствуют о высокой точности проведенных расчетов.

Комплексная мощность, потребляемая в цепи равна:

$$\hat{S}_{\Pi} = P_{\Pi} + jQ_{\Pi} = 1888.42 - j2365.99 = 3027.2e^{-j51.4^\circ}, \text{ ВА} \quad (68)$$

Рассчитав все мощности, можно определить коэффициент мощности $K_M = \cos \varphi$ для исследуемой цепи:

$$K_M = \cos \varphi = \frac{P_{\Pi}}{S_{\Pi}} = \frac{1888.42}{3027.2} = 0,624 \quad (69)$$

2.6. Построение векторных, волновых и потенциальных диаграмм

Расчет электрических цепей синусоидального тока символическим методом часто сопровождается построением векторных диаграмм токов или напряжений. Под векторной диаграммой понимается совокупность векторов на комплексной плоскости, отображающих токи и напряжения исследуемой электрической цепи. Векторные диаграммы, в основном, используются для наглядного представления полученных результатов расчета на комплексной плоскости. С их помощью могут быть вычислены дополнительные значения токов, напряжений, углов сдвига фаз, которые не определялись в основном расчете.

Естественно, точность определения параметров по векторной диаграмме существенно уступает точности аналитических расчетов, поэтому векторные диаграммы выступают в качестве важного средства контроля правильности выполненных расчетов.

Векторные диаграммы строятся по уравнениям, составленным для рассматриваемой цепи по законам Кирхгофа. При этом векторные диаграммы токов строятся на основе уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, для узлов рассматриваемой цепи, а векторные диаграммы напряжений – на основе уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, для любого из контуров цепи. Проще, быстрее и нагляднее векторные диаграммы строятся, если комплексные значения токов и напряжений представлены в показательной форме.

Построение векторных диаграмм в цепи с последовательным соединением элементов целесообразно начинать с построения вектора тока, который является в данном случае общим параметром для всех элементов цепи. Затем строится векторная диаграмма напряжений. В цепи с параллельным соединением элементов лучше начинать построение с вектора напряжения, а затем приступать к построению векторов токов.

Перед построением векторной диаграммы используемое уравнение записывается в численном виде, все составляющие уравнения представляются комплексными числами в показательной форме и располагаются в порядке следования соответствующих элементов на схеме цепи. Далее выбирается масштаб, используемый при построении конкретной диаграммы. Он должен быть таким, чтобы обеспечивалась наглядность каждой диаграммы.

Построение векторов производится в порядке их записи в уравнении. Если диаграмма строится без учета конкретной последовательности соединения элементов (порядка их включения) в схеме, то она не может быть использована вообще.

Сложение векторов может производиться либо по правилу параллелограмма (рис. 7а) для каждой пары векторов, либо по правилу векторного многоугольника (рис. 7б):

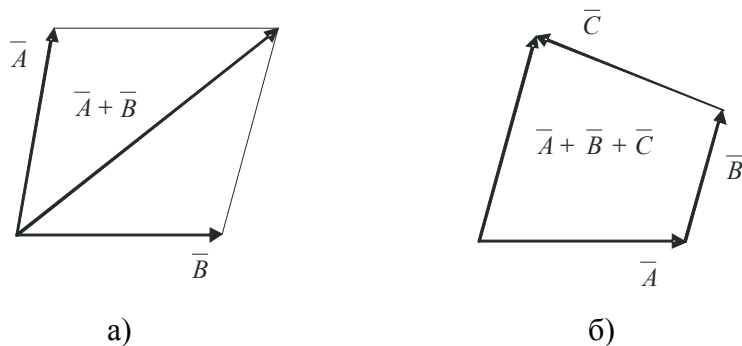


Рис. 7

В последнем случае каждый последующий вектор строится из конца предыдущего, т. е. стрелка предыдущего вектора примыкает к хвосту последующего. Сумма всех

векторов определяется вектором, хвост которого примыкает к хвосту первого вектора, а стрелка - к стрелке последнего вектора.

При построении векторной диаграммы напряжений первый вектор строится, как правило, из начала координат. С помощью транспортира откладывается угол, соответствующий аргументу первого вектора. Положительный угол откладывается в сторону вращения вектора вокруг начала координат против часовой стрелки, а отрицательный – в сторону вращения по часовой стрелке. На луче, проведенном по этим углом, в масштабе из начала координат откладывается направленный отрезок, длина которого равна модулю первого вектора. Получается точка, потенциал в которой соответствует на схеме потенциалу на конце рассматриваемого элемента. Далее из этой точки аналогичным образом строится следующий вектор. Порядок расположения векторов на диаграмме должен строго соответствовать порядку расположения элементов на схеме цепи. Конец вектора (стрелка) напряжения на каждом элементе примыкает к началу (хвосту) вектора напряжения на следующем элементе. Последний вектор должен своим концом упереться в начало координат, так как правая часть уравнения, по которому составлялась векторная диаграмма, равна нулю. Если этого не наблюдается, то при расчете или построении была допущена ошибка, которую нужно найти.

Рассмотрим пример построения векторной диаграммы для разветвленной электрической цепи, приведенной на рис. 8:

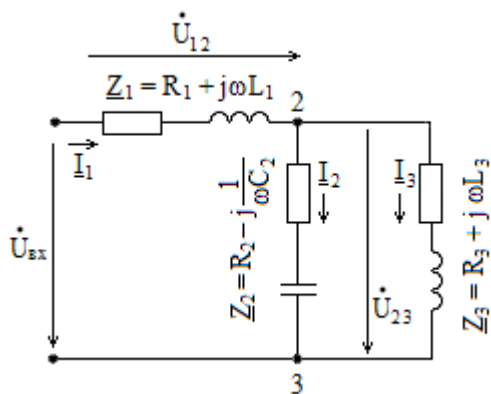


Рис. 8

Для схемы задано:

$$\underline{Z}_1 = 3 + j4 = 5e^{j53,1^\circ}, \text{ Ом} \quad , \quad I_2 = 2\text{А}$$

$$\underline{Z}_2 = 8 - j6 = 10e^{-j36,8^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = 6 + j10 = 11,7e^{j53^\circ}, \text{ Ом}$$

Требуется рассчитать неизвестные токи и напряжения и построить для них векторные диаграммы. Определим вначале напряжение \dot{U}_{23} и значение неизвестных токов:

$$\dot{U}_{23} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 = 2 \cdot 10e^{-j36,8^\circ} = 20e^{-j36,8^\circ}, \text{ В}$$

$$I_3 = \underline{U}_{23} / \underline{Z}_3 = 20e^{-j36,8^\circ} / 11,7e^{j53^\circ} = 1,7e^{-j95,8^\circ}, \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 1,7e^{-j95,8^\circ} = 2 + 17(\cos 95,8^\circ - j\sin 95,8^\circ) = 1,83 - j1,69 = 2,49e^{-j42,7^\circ}, \text{ A}$$

Зная величину тока I_1 , можно рассчитать напряжение \dot{U}_{12} и входное напряжение $\dot{U}_{\text{вх}}$

$$\dot{U}_{12} = I_1 \cdot \underline{Z}_1 = 2,49e^{-j42,7^\circ} \cdot 5e^{j53,1^\circ} = 12,45e^{j10,4^\circ}, \text{ В}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 3 + j4 + \frac{10e^{-j36,8^\circ} \cdot 11,7e^{j59^\circ}}{8 - j6 + 6 + j10} = 11 + j4,86 = 12e^{j23,8^\circ}, \text{ Ом}$$

$$\dot{U}_{\text{вх}} = I_1 \cdot \underline{Z} = 2,49e^{-j42,7^\circ} \cdot 12e^{j23,8^\circ} = 30e^{-j18,9^\circ}, \text{ В}$$

Правильность расчета входного напряжения проверяем вначале по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_{\text{вх}} = \dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} = 12,45e^{j10,4^\circ} + 20e^{-j36,8^\circ} = 12,24 + j2,24 + 16 - j12 = 30e^{-j19^\circ}, \text{ В}$$

а затем с помощью векторной диаграммы (рис. 9). Численные значения модуля и фазы вектора $\dot{U}_{\text{вх}}$, полученные непосредственным замером на векторной диаграмме, совпали с рассчитанными значениями этого напряжения.

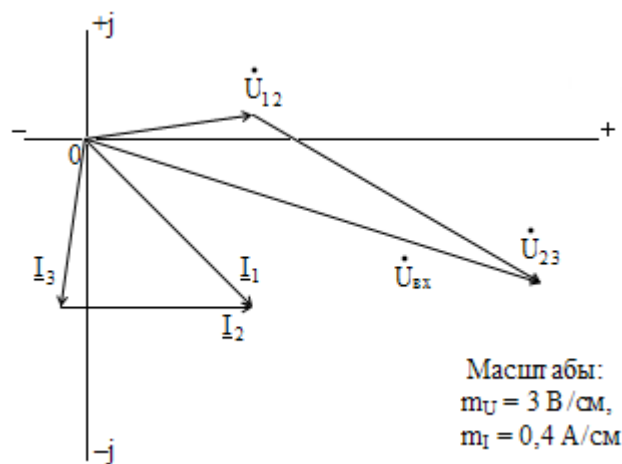


Рис. 9.

$$i_1 = I_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi_{I_1}) = 2,49 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 42,7^\circ), \text{ А} \quad (70)$$

$$u_{12} = U_{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_{12}}) = 12,45 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 10,4^\circ), \text{ В} \quad (71)$$

С помощью выражений (70) и (71) можно построить волновые диаграммы (графики в функции времени) тока $i_{1(t)}$ и напряжения $u_{12(t)}$. Каждая из этих диаграмм должна содержать, как минимум одно колебание, т.е. изменение каждого параметра нужно рассматривать в течение времени, равного периоду колебания T . Для построения диаграмм разобьем интервал T на десять отрезков и для каждого из полученных моментов времени по (70), (71) рассчитаем мгновенные значения $i_{1(t)}$ и $u_{12(t)}$. Результаты расчетов сведены в табл. 4:

Таблица 4

| t | ωt , град. | $\sin (\omega t - 42,7^\circ)$ | i_1 , A | $\sin (\omega t + 10,4^\circ)$ | u_{12} , B |
|------|--------------------|--------------------------------|-----------|--------------------------------|--------------|
| 0 | 0 | $\sin (-42,7^\circ) = -0,678$ | -2,38 | $\sin 10,4^\circ = 0,18$ | 3,17 |
| 0,1T | 36° | $\sin (-6,7^\circ) = -0,116$ | -0,41 | $\sin 46,4^\circ = 0,724$ | 12,74 |
| 0,2T | 72° | $\sin 29,3^\circ = 0,489$ | 1,72 | $\sin 82,4^\circ = 0,991$ | 17,44 |
| 0,3T | 108° | $\sin 65,3^\circ = 0,908$ | 3,19 | $\sin 118,4^\circ = 0,879$ | 15,48 |
| 0,4T | 144° | $\sin 101,3^\circ = 0,98$ | 3,45 | $\sin 154,4^\circ = 0,432$ | 7,60 |
| 0,5T | 180° | $\sin 137,3^\circ = 0,678$ | 2,38 | $\sin 190,4^\circ = -0,18$ | -3,17 |
| 0,6T | 216° | $\sin 173,3^\circ = 0,116$ | 0,41 | $\sin 226,4^\circ = -0,724$ | -12,74 |
| 0,7T | 252° | $\sin 209,3^\circ = -0,489$ | -1,72 | $\sin 262,4^\circ = -0,991$ | -17,44 |
| 0,8T | 288° | $\sin 245,3^\circ = -0,908$ | -3,19 | $\sin 298,4^\circ = -0,879$ | -15,48 |
| 0,9T | 324° | $\sin 281,3^\circ = -0,98$ | -3,45 | $\sin 334,4^\circ = -0,432$ | -7,60 |
| T | 360° | $\sin 317,3^\circ = -0,678$ | -2,38 | $\sin 370,4^\circ = 0,18$ | 3,17 |

Порядок выполнения расчетов и заполнения табл. 4 не требуют объяснений. Остановимся только на переходе от времени t , к фазе колебания ωt в градусах или радианах. Для конкретного момента времени $t_1 = 0,1T$ выражение ωt_1 может быть преобразовано к виду:

$$\omega t_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot 0,1T = 0,2\pi = 0,2 \cdot 180^\circ = 36^\circ$$

Целесообразность представления ωt в градусах обусловлена тем, что начальные фазы тока ψ_{i_1} и напряжения $\psi_{u_{12}}$ также выражены в градусах. По данным табл. 4 строятся волновые диаграммы (рис. 10):

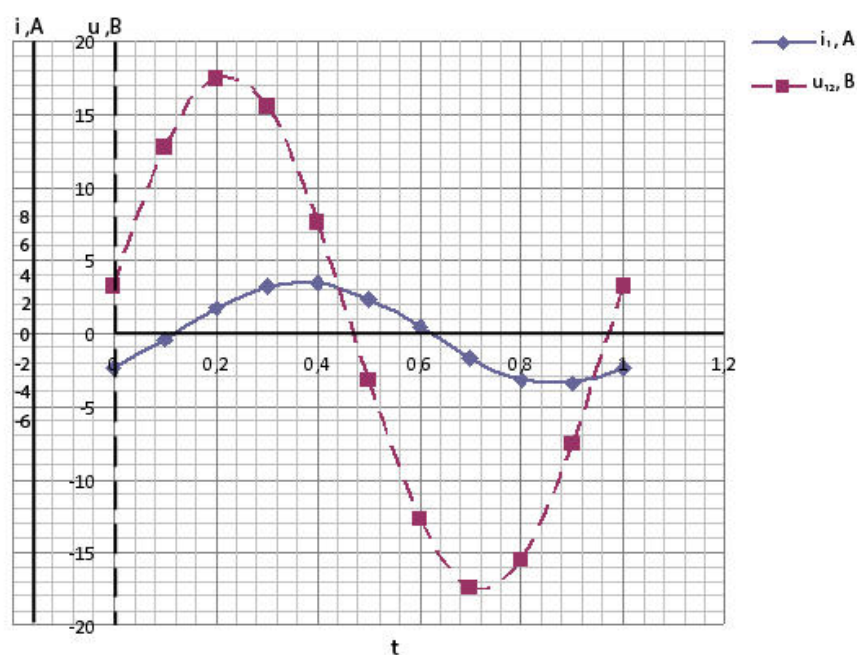


Рис. 10

При выборе масштабов m_u и m_i нужно стремиться к тому, чтобы амплитуды тока и напряжения существенно отличались друг от друга. Желательно также изображать графики различными линиями или разным цветом.

Каждой точке схемы электрической цепи в месте соединения двух или нескольких элементов соответствует свое значение комплексного потенциала. Совокупность точек комплексной плоскости, изображающих потенциалы одноименных точек электрической схемы, называются топографической или потенциальной диаграммой. Эта диаграмма представляет собой векторную диаграмму, на которой отложены комплексные потенциалы отдельных точек рассматриваемой цепи по отношению к базисной точке цепи, потенциал которой принят за нуль. Базисную точку помещают в начало координат и из нее начинают построение всей диаграммы. Положение остальных точек схемы на диаграмме определяется параметрами цепи, э. д. с. источников напряжения и токами ветвей.

На этой диаграмме, также как и на векторной, напряжение между любыми двумя точками электрической цепи определяется вектором, проведенным от одной из них к другой. Длина вектора определяет величину напряжения, а аргумент – разность фаз конечной и начальной точек диаграммы.

Рассмотрим порядок построения потенциальной диаграммы неразветвленной электрической цепи, представленной на рис. 11:

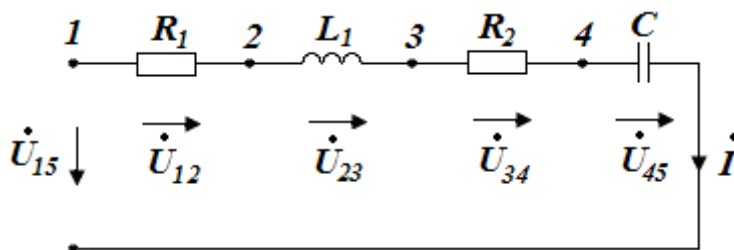


Рис. 11

Векторная диаграмма рассматриваемой цепи представлена на рис. 12, а потенциальная (топографическая) на рис. 13:

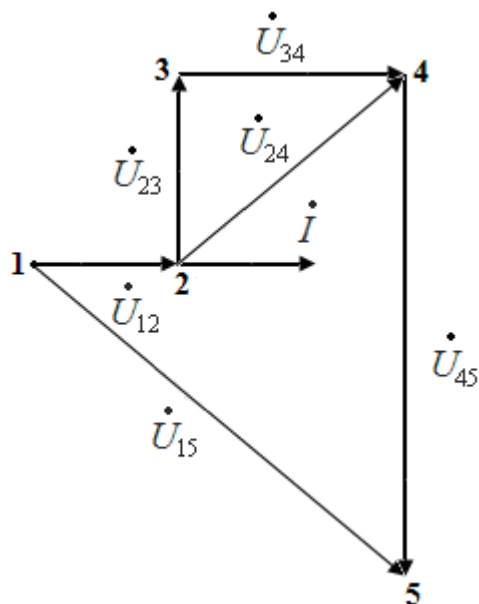


Рис. 12

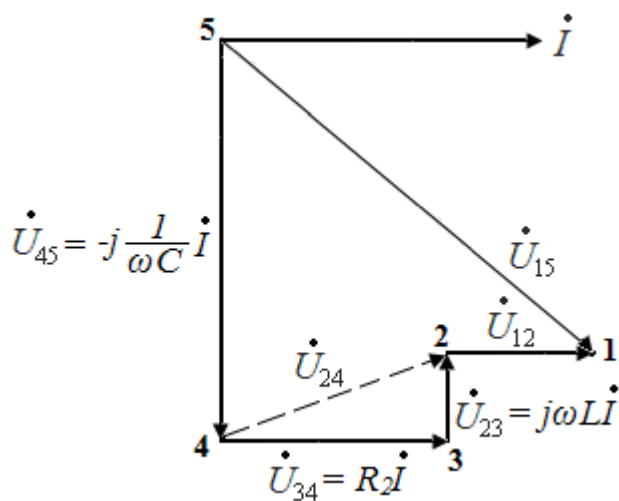


Рис. 13

Вектора на потенциальной диаграмме (рис.13) пронумерованы в соответствии с нумерацией точек, принятой на схеме цепи (рис. 11). Напряжение между любыми двумя точками схемы, например на участке 2 - 4, определяется вектором \dot{U}_{24} , соединяющим точки 2 и 4 диаграммы и направленным на этой диаграмме от точки 4 к точке 2. Это соответствует известному правилу вычитания векторов, согласно которому вектор \dot{U}_{24} , представляющий собой разность потенциалов $\dot{U}_2 - \dot{U}_4$, направлен от конца вектора \dot{U}_4 к концу вектора \dot{U}_2 (рис.14):

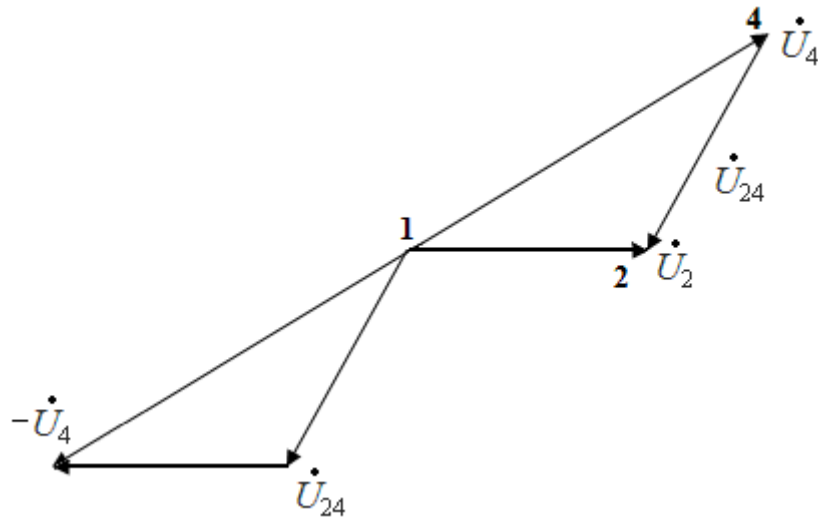


Рис. 14

Тот же результат получается, если из вектора \dot{U}_{12} , который характеризует узел 2 с потенциалом \dot{V}_2 , вычесть вектор \dot{U}_{14} , характеризующий узел 4 с потенциалом \dot{V}_4 :

$$\dot{U}_{24} = \dot{U}_{12} - \dot{U}_{14} = (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) - (\dot{V}_1 - \dot{V}_4) = \dot{V}_4 - \dot{V}_2$$

Следовательно, вектор напряжения \dot{U}_{24} на топографической диаграмме (рис. 15) направлен от точки 4 к точке 2, т.е. он направлен к точке высшего (уменьшаемого) потенциала:

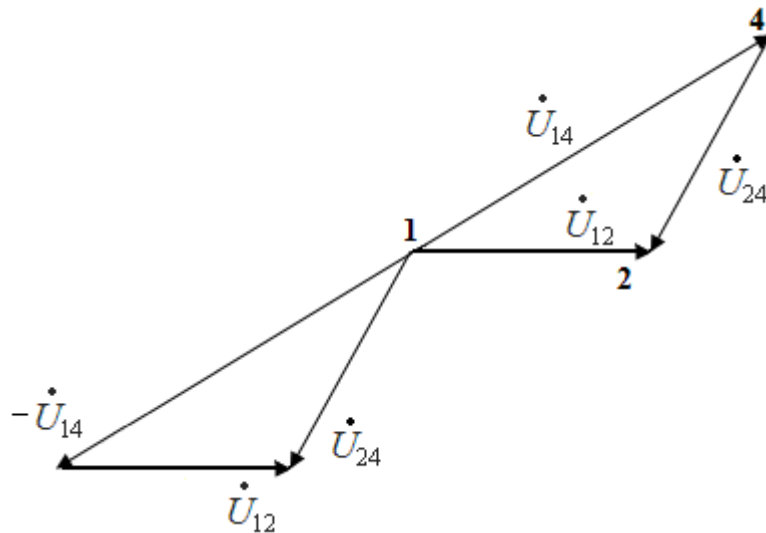


Рис. 15

В тоже время напряжение \dot{U}_{24} на схеме цепи (рис. 10) и векторной диаграмме (рис. 11) указывается стрелкой, направленной от точки с высшим потенциалом к точке с низшим потенциалом, что следует из выражения (72):

$$\dot{U}_{12} + \dot{U}_{24} = \dot{U}_{14}, \quad \dot{U}_{24} = \dot{U}_{14} - \dot{U}_{12} = (\dot{V}_1 - \dot{V}_4) - (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) = (\dot{V}_2 - \dot{V}_4) \quad (72)$$

или простого вычитания векторов (рис. 16):

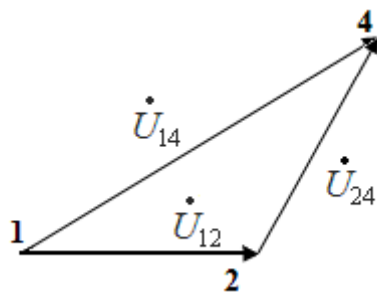


Рис. 16

В связи с вышеизложенным правилом построения векторов на потенциальной диаграмме при построении потенциальной диаграммы (рис. 13) рассматриваемой цепи (рис. 11) обход схемы совершался навстречу положительному направлению тока \dot{I} . Базисной точкой была принята точка 5. Порядок расположения векторов падения напряжения на потенциальной диаграмме строго соответствовал порядку расположения элементов цепи на схеме. При построении диаграммы конец вектора (стрелка) напряжения на каждом последующем элементе примыкает к началу (хвосту) вектора напряжения предыдущего элемента. При соблюдении этого правила потенциал определенной точки на потенциальной диаграмме соответствовал напряжению соответствующей ей точки на схеме цепи.

При построении векторных диаграмм следует иметь в виду, что умножение и деление комплексного числа на $j = \sqrt{-1}$, приводит к повороту соответствующего ему вектора на 90° . При умножении комплексного числа на величину j , соответствующий ему вектор поворачивается против часовой стрелки на угол 90° , т.е. результирующий вектор опережает исходный на угол 90° . Деление комплексного числа на j приводит к повороту результирующего вектора на 90° по часовой стрелке, т.е. результирующий вектор будет отставать от исходного на 90° . Указанные правила можно проиллюстрировать с помощью векторов напряжений \dot{U}_{23} и \dot{U}_{45} на векторной диаграмме рис. 11. Напряжение $\dot{U}_{23} = j\omega L \dot{I}$ пропорционально вектору $\omega L \dot{I}$, умноженному на j . Следовательно, вектор \dot{U}_{23} опережает исходный вектор $\omega L \dot{I}$ на угол 90° . Напряжение \dot{U}_{45} также пропорционально току \dot{I} , умноженному на величину $\frac{1}{j} = -j$. Следовательно, вектор \dot{U}_{45} отстает от исходного вектора \dot{I} на угол 90° .

Рассмотрим пример построения потенциальной диаграммы для двухконтурной электрической цепи, схема которой приведена на рис. 17:

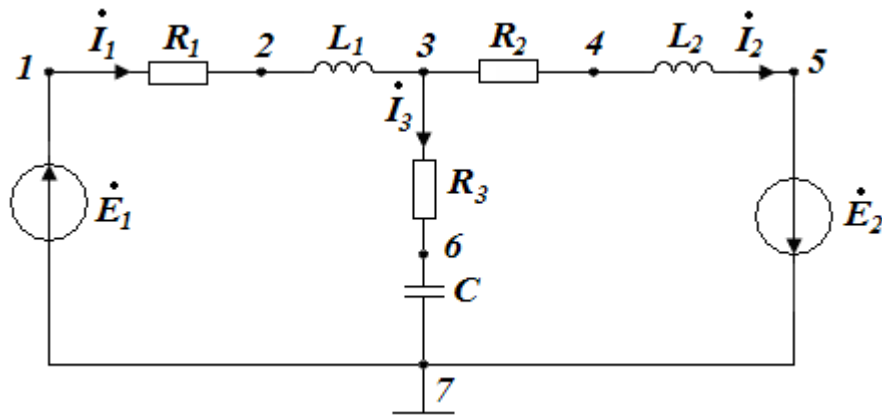


Рис. 17

В данной цепи действуют два источника напряжения с комплексными значениями э. д. с. :

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= 100e^{j30^\circ}, \text{ В} \\ \dot{E}_2 &= 100e^{-j60^\circ}, \text{ В}\end{aligned}\quad (73)$$

Параметры пассивных элементов цепи равны:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}; \quad L_1 = 31,8 \text{ мГн}; \quad L_2 = 15,9 \text{ мГн}; \quad C = 159 \text{ мкФ}. \quad (74)$$

Значения реактивных сопротивлений цепи при заданной частоте $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ имеют следующие значения:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 10 \text{ Ом}, \quad x_{L2} = \omega L_2 = 5 \text{ Ом}, \quad x_C = \frac{1}{\omega C} = 20 \text{ Ом} \quad (75)$$

В результате расчета токов в ветвях заданной цепи были получены следующие значения:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= 8,72e^{+j39,25^\circ}, \text{ А} \\ \dot{I}_2 &= 4,56e^{+j59,55^\circ}, \text{ А} \\ \dot{I}_3 &= 4,60e^{+j19,55^\circ}, \text{ А}\end{aligned}\quad (76)$$

По найденным значениям токов ветвей были рассчитаны напряжения на всех участках цепи (рис. 17):

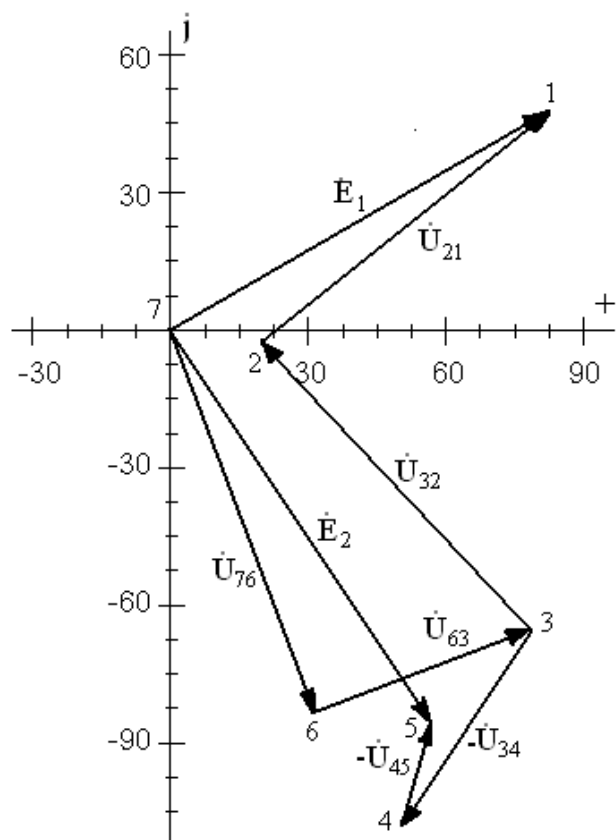
$$\begin{aligned}
\dot{U}_{12} &= R_1 \dot{I}_1 = 10 \cdot 8,72 e^{+j39,25^\circ} = 87,2 e^{+j39,25^\circ}; B \\
\dot{U}_{23} &= j\omega L_1 \dot{I}_1 = j10 \cdot 8,72 e^{+j39,25^\circ} = 87,2 e^{+j129,25^\circ}; B \\
\dot{U}_{34} &= R_2 \dot{I}_2 = 10 \cdot 4,56 e^{+j59,55^\circ} = 45,6 e^{+j59,55^\circ}; B \\
\dot{U}_{45} &= j\omega L_2 \dot{I}_2 = j5 \cdot 4,56 e^{+j59,55^\circ} = 22,8 e^{+j149,55^\circ}; B \\
\dot{U}_{36} &= R_3 \dot{I}_3 = 10 \cdot 4,6 e^{+j19,55^\circ} = 46 e^{+j19,55^\circ}; B \\
\dot{U}_{67} &= \frac{1}{j\omega C_3} \dot{I}_3 = -j20 \cdot 4,6 e^{+j19,55^\circ} = 92 e^{-j70,05^\circ}; B
\end{aligned} \tag{77}$$

Зная все напряжения (77), приступим к построению потенциальной диаграммы. В качестве базисного узла выберем узел 7 (целесообразно выбирать узел, куда сходится наибольшее количество ветвей). В принципе, построение можно производить в любом порядке по рассчитанным значениям напряжений, однако желательно выбирать обход контуров против направления токов в ветвях. Выберем обход первого контура 7-6-3-2-1-7 против часовой стрелки. Он будет противоположен направлению токов \dot{I}_3 и \dot{I}_1 и вследствие этого, векторы напряжений $\dot{U}_{67}, \dot{U}_{36}, \dot{U}_{23}, \dot{U}_{12}$ будут суммироваться, а полученная в результате сумма должна совпасть с вектором \dot{E}_1 . Во втором контуре выберем обход по часовой стрелке и тогда:

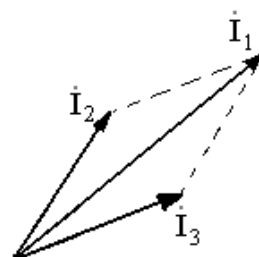
- векторы напряжений \dot{U}_{67} и \dot{U}_{36} , направленные против тока \dot{I}_3 , будут суммироваться,
- векторы напряжений \dot{U}_{43} и \dot{U}_{54} , совпадающие по направлению с током \dot{I}_2 , будут вычитаться.

Вычитание вектора напряжения из потенциала данной точки на потенциальной диаграмме производится следующим образом: из данной точки проводится линия, имеющая направление вычитаемого вектора; затем конец вектора совмещается с данной точкой; тогда потенциал точки, соответствующий началу вектора, будет равен разности потенциала данной точки и вычитаемого напряжения.

Потенциальная диаграмма, соответствующая схеме рис. 17, представлена на рис. 18а:



а)



б)

Рис. 18

На этом же рисунке изображены векторная диаграмма (рис.18б) токов ветвей \dot{I}_1, \dot{I}_2 и \dot{I}_3 , что позволяет контролировать правильность построения векторов напряжения, сравнивая направления векторов напряжений и векторов протекающих по ним токов.

По потенциальной диаграмме можно убедиться в соблюдении второго закона Кирхгофа для контура, образованного векторами напряжения. По диаграмме токов можно проверить справедливость первого закона Кирхгофа в векторной форме для любого из узлов.

3. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. Курсовая работа должна быть аккуратно и разборчиво написана только на одной стороне листа формата А 4 (210x297). Другая сторона листа предназначается для внесения студентом исправлений и дополнений по результатам рецензии, что облегчает работу над ошибками самому студенту и последующую проверку исправлений рецензенту при повторном рецензировании. Листы обязательно сшиваются и нумеруются арабскими цифрами. На каждой странице оставляются поля: справа 2-3 см для замечаний преподавателя, слева 3 см для сшивки. Все листы работы должны быть сшиты в папку. Не допускается вкладывание листов работы в отдельные файлы, что затрудняет рецензирование и исправление ошибок.

2. В качестве первого листа работы используется титульный лист, образец которого приведен в приложении 1. В конце работы должен быть приведен список использованной литературы, подпись студента с указанием даты выполнения работы.

3. Требуемые расчеты приводятся в работе достаточно подробно с кратким словесным пояснением при расчете каждой величины. При этом должны приводиться промежуточные числовые значения. Работы, в которых вычисления приведены крайне сокращенно или отсутствует необходимые словесные пояснения, к защите не допускаются и возвращаются студентам для переработки.

При расчетах целесообразно исследуемое выражение вначале записать в общем виде в буквенных обозначениях, а затем сразу же подставить числовые значения исходных данных и дальнейшие расчеты вести в численном виде. В промежуточных расчетах и формулах наименование единиц измерения величин не указываются, а обязательно используются основные (не кратные и не дольные) единицы измерения. В окончательных числовых результатах обязательно указываются единицы измерения, в которых получен результат. Должны использоваться единицы измерения, принятые международной системой единиц (приложение 2). Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования приведены в приложении 3.

4. Графики и чертежи в работе выполняются с соблюдением масштабов, правил черчения и ГОСТов (приложение 4). При построении графиков масштаб указывается численными метками, отложенными вдоль осей. Необходимо также обозначать величины, отложенные вдоль каждой оси, и указывать единицы их измерения в международной системе единиц. Чертежи могут выполняться на миллиметровой бумаге или по тексту на листах работы карандашом или с использованием стандартных компьютерных программ. Все рисунки, чертежи, графики и таблицы должны быть пронумерованы. Нумерация может быть сквозная по всей работе или по главам.

5. Масштаб векторной диаграммы удобнее всего показать в виде горизонтального отрезка длиной 1 см, расположенного в поле диаграммы. Возле отрезка указывается численное значение соответствующей ему величины в соответствующих единицах измерения.

6. В начале работы должна быть приведена схема заданной электрической цепи и исходные данные соответствующего варианта. В начале каждого раздела (пункта) работы должно приводиться условие этого раздела и заданные исходные данные соответствующего варианта.

7. Все величины: сопротивления, э. д. с., напряжения, токи и прочее, буквенные обозначения которых применяются в ходе решения, должны быть показаны хотя бы на одной из схем, сопровождающих решение, и не должны меняться в ходе решения. При введении обозначений для токов, напряжений, эквивалентных сопротивлений следует стремиться к наиболее простым обозначениям. Например, ток, протекающий через некоторое сопротивление R_5 , целесообразно обозначить с тем же индексом I_5 . На электрических схемах эти величины можно обозначать согласно ГОСТу 2.710–81 для конструкторской документации соответственно $R5$ или R_5 , $I5$ или I_5 . Элементы электрических схем, если они не пронумерованы в задании, нумеруются, как правило, слева направо и сверху вниз.

8. Вычисления рекомендуется выполнять с помощью компьютера или калькулятора, ограничивая точность расчетов тремя - четырьмя значащими цифрами после десятичной точки.

9. В конце работы приводится список использованной литературы, которой должен быть составлен с соблюдением ГОСТа 7.1–76 (в качестве примера смотри список литературы в настоящем пособии).

10. Курсовая работа сдается в центр обработки контрольных работ (ЦОКР) за месяц до начала зачетной недели. Отрецензированная курсовая работа возвращается к студенту с оценкой: «допущена к защите» или «не допущена к защите». В первом случае студент должен исправить все отмеченные рецензентом замечания на чистой стороне листа. Во втором случае работу нужно переделать и снова сдать в ЦОКР для повторного рецензирования. Допущенную к защите курсовую работу студент защищает на специальном занятии – «защита КР» и получает оценку, которая заносится в ведомость и зачетную книжку студента. Опрос при защите курсовой работы проводится по вопросам для самоподготовки, приведенным в данном пособии.

Примечание. Просим Вас бережно относиться к сохранности настоящих методических указаний и не делать в тексте никаких надписей и рисунков. Это связано с тем, что предполагается использование этого пособия другими студентами при выполнении ими этой курсовой работы.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте, чему посвящена основная задача ТЭЦ? Что означает рассчитать цепь?
2. Что называется электрическим током, в каких единицах он измеряется?
3. Что называется потенциалом, в каких единицах он измеряется?
4. Что называется электрическим напряжением, в каких единицах измеряется напряжение?
5. Как связаны между собой электрический ток, заряд и время? В каких единицах они измеряются?
6. Какие электрические величины называются мгновенными, а какие постоянными? Приведите примеры таких величин.
7. Какие цепи называют цепями постоянного тока? Приведите примеры таких цепей.
8. Какие цепи называют цепями переменного тока? Приведите примеры таких цепей.
9. Сформулируйте закон Ома для участка цепи.
10. Что такое положительное направление тока? Поясните свой ответ примером.
11. Что называется падением напряжения, в чем оно измеряется? Поясните свой ответ примером.
12. Что называется положительным направлением падения напряжения? Поясните свой ответ примером.
13. Объясните понятия «согласное направление» и «встречное направление». Приведите примеры согласного и встречного направлений.
14. Какие электрические цепи называются линейными, а какие – нелинейными с системной точки зрения?
15. Из каких элементов состоит электрическая цепь? Приведите примеры.
16. Какой источник называется источником ЭДС? Приведите примеры независимых и зависимых источников.
17. Какой источник называется источником тока? Приведите примеры независимых и зависимых источников.
18. Каким образом записывается первый закон Кирхгофа для мгновенных величин? Приведите примеры.
19. Каким образом записывается второй закон Кирхгофа для мгновенных величин? Приведите примеры.
20. Какие элементы называются дуальными? Приведите примеры.
21. Какие цепи называются резистивными? Приведите пример таких цепей.
22. Какое соединение элементов называется параллельным? Каким образом рассчитать общее сопротивление при таком соединении элементов?
23. Как рассчитать токи в двух параллельных ветвях?

24. Какое соединение элементов называется последовательным? Каким образом рассчитать общее сопротивление при таком соединении элементов?
25. В чем сущность принципа деления напряжения?
26. Как рассчитать напряжение на последовательно соединенных резисторах?
27. Какие цепи называются параллельно-последовательными? Приведите примеры.
28. Каким образом записывается обобщенный закон Ома? Приведите примеры.
29. Как производят расчет токов в цепях методом уравнений Кирхгофа?
30. Каков принцип матричной формы записи уравнений Кирхгофа?
31. Как производят расчет токов в цепях методом контурных токов?
32. Как производят расчет токов в цепях методом узловых потенциалов?
33. Как производят расчет токов в цепях методом эквивалентного источника ЭДС?
34. Как производят расчет токов в цепях методом эквивалентного источника тока?
35. В каких цепях можно рассчитывать токи методом наложения? Каков план анализа?
36. Как составляется баланс мощностей?
37. Что означает режим постоянного тока в электрических цепях? Приведите пример.
38. Что называется операционным усилителем, каковы его основные свойства?
39. Какова эквивалентная схема цепей с операционными усилителями?
40. К каким типам можно свести ВАХ нелинейных двухполюсников?
41. Что называют рабочей точкой? Приведите пример.
42. Как связаны между собой статические и дифференциальные параметры?
43. Что понимается под понятием «отрицательное сопротивление»?
44. Какой вид имеют ВАХ линейных и нелинейных элементов?
45. Как рассчитать токи в параллельно соединенных нелинейных элементах?
46. Как рассчитать падение напряжения на последовательно включенных нелинейных элементах?
47. Как рассчитать результирующую ВАХ двух нелинейных элементов, соединенных параллельно?
48. Как рассчитать результирующую ВАХ двух нелинейных элементов, соединенных последовательно?
49. Что понимается под нелинейными искажениями?
50. Как можно рассчитать коэффициент гармонических искажений?
51. Какие колебания называют гармоническими?
52. Что называется переменным током? Приведите пример.
53. Что называется амплитудой, фазой, начальной фазой, угловой частотой синусоидального тока? Нарисуйте кривые гармонических сигналов.
54. Как связаны частота f , угловая частота ω и период T гармонического сигнала?

55. Каким образом экспериментально с помощью осциллографа определить размах переменного напряжения?
56. Что называется среднеквадратическим (действующим) значением тока, напряжения? Приведите примеры.
57. Как связаны между собой амплитуда и действующее значение гармонического тока, ЭДС и напряжения?
58. Что называется сдвигом фаз?
59. В чем состоит отличие мгновенной мощности от средней?
60. Докажите, что при гармоническом воздействии с частотой ω индуктивное сопротивление равно $X_L = \omega L$, а емкостное - $X_C = 1/(\omega C)$.
61. Покажите, каким образом складывают, вычитают, умножают, делят комплексные числа. Какие числа называют комплексно-сопряженными? Приведите примеры.
62. Покажите алгебраическую, показательную и тригонометрическую формы комплексного числа. Приведите примеры.
63. Сформулируйте законы Кирхгофа в комплексной форме.
64. Разъясните понятие баланса активных, реактивных и комплексных мощностей.
65. Определите условие передачи максимальной средней мощности в нагрузку генератором гармонических колебаний.
66. Какая нагрузка генератора гармонических колебаний называется согласованной?

5. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей: Учебник для вузов/под ред. В.П. Бакалова. – 4-е изд. – М.: Горячая линия - Телеком, 2013. – 596с.: ил.
2. Новгородцев А.Б. Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей: Учебное пособие. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 576с.: ил.
3. Бакалов В.П., Журавлева О.Б., Крук Б.И. Основы анализа цепей: Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007, – 591с.: ил.
4. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей, - М.: Высшая школа, 1990, – 544с.: ил.
5. Теоретические основы электротехники. Справочник по теории электрических цепей. Под ред. Ю.А. Бычкова, В.М. Золотницкого, Э.П. Чернышева. – СПб.: Питер, 2008. – 349с.: ил.