ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФИЛИАЛ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»

КАФЕДРА ОБЩЕНАУЧНОЙ ПОДГОТОВКИ

Бородин А.В.

Электромагнитные поля и волны

Методические указания по практическим занятиям
для студентов направления подготовки
11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи.

Ростов-на-Дону
2019 г.

А.В. Бородин. Электромагнитные поля и волны. Методические указания по практическим занятиям. Ростов-на-Дону: Северо-Кавказский филиал МТУСИ. 2019. – 24 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения дисциплины «Электромагнитные поля и волны», примеры решения задач и задания различного уровня сложности. Пособие предназначено для освоения студентами физических основ электродинамики, распространения электромагнитных волн в различных средах, особенностей структуры электромагнитного поля в линиях передачи электромагнитной энергии.

Рецензент: Заведующий кафедрой МТС СКФ МТУСИ,
к.т.н., доцент Юхнов В.И.

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры Общенаучной подготовки
Протокол от 26 июня 2019 г. № 1

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Элементы векторного анализа 4

2. Электростатическое поле 5

3. Электрическое поле в проводящей среде 6

4. Магнитное поле постоянных токов 7

5. Направленные электромагнитные волны 8

6. Расчет толщины скин-слоя 9

7. Примеры решения расчетных задач 10

Задача 1. 10

Задача 2. 16

ЛИТЕРАТУРА 24

1. Элементы векторного анализа

1. Задан потенциал $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Найти градиент этого потенциала. Какую форму будут иметь эквипотенциальные поверхности?
2. Найти градиент потенциала $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. Задан потенциал $\varphi = x^y - z^2$. Найти градиент этого потенциала в точке x = 2,7;

   y = 2; z = 2.
4. Подсчитать поток вектора $\vec{A} = \dfrac{5}{r^2}\vec{l}_r$ сквозь сферическую поверхность радиусом

   r = a. Центр сферы совпадает с точкой *r = 0*.

   Решение.

   Потоком вектора $\vec{A}$ сквозь замкнутую поверхность называют скалярную величину

   $\Phi = \oint\limits_S \vec{A} d\vec{S} = \oint\limits_S A_n dS$,

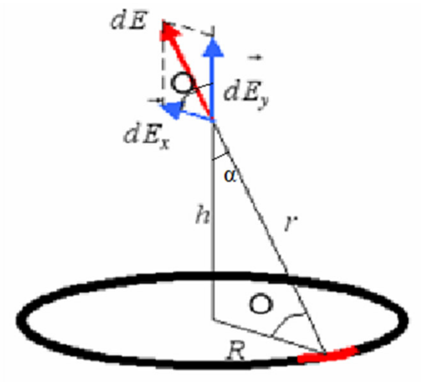
   где A_n - проекция вектора на направление положительной норамали к площадке.

   Так как в задаче поверхность S – сферическая и направление вектора $\vec{A}$ совпадает с направлением радиуса-вектора, то $A_n = A_r = \dfrac{5}{a^2}$ для всех точек поверхности интегрирования.

   Следовательно, поток $\Phi = \oint\limits_S \dfrac{5}{a^2} dS = \oint\limits_S \dfrac{5}{a^2} 4\pi a^2 = 20\pi$
5. Найти дивергенцию радиуса-вектора $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
6. Найти дивергенцию вектора $\vec{A} = \dfrac{x}{R^2}\vec{i} + \dfrac{y}{R^2}\vec{j} + \dfrac{z}{R^2}\vec{k}$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
7. Найти дивергенцию вектора $\vec{M} = \vec{A} \cdot r$, где $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
8. Найти ротор радиуса-вектора $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2. Электростатическое поле.

1. Кольцо радиусом r = 5 см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью τ = 14 нКл/м. Определить напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца, в точке, удаленной на расстояние h = 10 см от центра кольца.



<u>Решение.</u>

$$Q = \int dQ = \tau 2\pi R$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \qquad \sum dE_y = 0$$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{h^2 + R^2})^2}$$

$$dE_y = dE\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r}$$

$$dE_y = \frac{h \cdot dQ}{4\pi\varepsilon_0 (h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad E = \sum dE_y = \int_0^Q \frac{h \cdot dQ}{4\pi\varepsilon_0 (h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi R h\tau}{4\pi\varepsilon_0 (h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ответ: Е = 2,83 кВ/м.

2. Используя теорему Гаусса, найти: а) поле плоскости, заряженной с поверхностной плотностью σ; б) поле плоского конденсатора; в) поле равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити с линейной плотностью τ.

3. Показать, что поле вблизи поверхности металла $\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$, где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности, а σ – поверхностная плотность зарядов.

4. Используя теорему Гаусса, найти поля равномерно заряженных: а) шара радиуса а (плотность ρ); б) бесконечного цилиндра радиуса а (линейная

плотность τ); в) бесконечного плоского слоя толщиной 2а (плотность заряда единичной площади σ).

5. Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного по объему с плотностью ρ, имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1, а центр отстоит от центра шара на расстояние а (а + R_1 < R). Найти электрическое поле $\vec{E}$ в полости.

6. Определить напряженность электрического поля в точке (0, 1, 0), создаваемую тремя точечными зарядами q, -2q, q, расположенными, соответственно, в точках (-1,0,0), (0,0,0). (1,0,0).

7. Определить напряженность электрического поля в точке (0, 1, 0), создаваемую тремя точечными зарядами -q, 2q, -q, расположенными, соответственно, в точках (-1,0,0), (0,0,0). (1,0,0). Задачу решить с помощью скалярного потенциала.

8. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси равномерно заряженного кольца радиуса а на высоте h над плоскостью кольца. Заряд кольца равен q.

9. Бесконечно длинный цилиндр радиусом 50 мм равномерно заряжен с поверхностной плотностью 10-5 Кл/м^2. Цилиндр находится в воздухе. Определите напряженность электрического поля, создаваемого цилиндром, на расстоянии 10 м от оси.

3. Электрическое поле в проводящей среде.

1. Вычислите напряженность электрического поля в латунной ленте (σ = 1,4*107 См/м) толщиной 0,12 мм и шириной 10 мм, по которой протекает постоянный ток 150 мА.

Решение.
j = σE (закон ома в дифференциальной форме).
j = I/S – плотность постоянного тока.
E = I/Sσ = I/abσ
Ответ: E = 8,9 мВ/м.

2. Определите напряженность электрического поля в медной шине (σ = 5,7*106 См/м), если плотность тока равна j = 2 А/мм2 .

3. К плоскому конденсатору, расстояние между обкладками которого d = 5 мм, а площадь каждой из них S = 50 см2, подведено напряжение 500 В. Удельная проводимость диэлектрика σ = 1*10-10 См/м. Найти сопротивление изоляции, ток утечки, а также определить мощность тепловых потерь.

4. Напряженность однородного поля в среде с проводимостью σ = 10-2 См/м равна E =100 В/м. Определите плотность тока и мощность тепловых потерь в единице объема.

5. Диэлектрик коаксиального кабеля имеет удельную проводимость σ = 5*10-9 См/м. разность потенциалов между внутренним и внешним проводниками кабеля U = 5 кВ. Радиус внутреннего проводника a1 = 10мм, внутренний радиус трубы a2 = 40 мм.

6. Найдите сопротивление изоляции отрезка кабеля длиной 1 км, ток утечки в том же отрезке, а также мощность тепловых потерь.

4. Магнитное поле постоянных токов.

1. Определить модуль силы Ампера, действующей на проводник с током длиной 25 см в магнитном поле с индукцией 0,04 Тл, если угол между вектором магнитной индукции и направлением тока 30°. Сила тока в проводнике 0,25 А.

2. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи I_1=20 А и I_2=30 А в одном направлении. Расстояние d между проводами равно 10 см. Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние r=10 см.

3. По двум бесконечно длинным прямым проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи I_1=30 А и I_2=40 А. Расстояние d между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке C, одинаково удаленной от обоих проводов на расстояние, равное d.

4. По бесконечно длинному цилиндру радиусом 50 мм протекает постоянный ток с поверхностной плотностью 1000А/м. Цилиндр находится в воздухе.

Определите напряженность магнитного поля, создаваемого цилиндром, на расстоянии 10 м от оси.

5. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка с током оказалась равной 120 А/м. Определить диаметр витка и индукцию магнитного поля в его центре, если сила тока в витке равна 11 А.

5. Направленные электромагнитные волны.

1. Определить, может ли распространяться волна типа E_{14} в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением 2.3×1.0 см^2 при частоте 3,2 ГГЦ. Найти значении е критической длины волны и длины волны в волноводе.
2. Определите, какие типы волн могут распространяться в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением 2.3×1.0 см^2 при частоте 7,5 ГГЦ. Найдите значения критической длины волны и длины волны в волноводе в каждом случае.

   Решение.

   Длина волны в свободном пространстве

   $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{7,5 \cdot 10^9} = 0,04 м$$

   Критическая длина волны определяется по уравнению

   $$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{0,025}\right)^2 + \left(\frac{n}{0,05}\right)^2}}$$

   Длина волны в волноводе

   $$\lambda_{вв} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

Условию $\lambda < \lambda_{кр}$ удовлетворяют типы волн, показанные в таблице.

Возможные типы волн	Характеристические числа		Длина волны	
	m	n	$\lambda_{кр}$, м	$\lambda_{вв}$, м
H_{01}	0	1	0,1	0,0436
H_{02}	0	2	0,05	0,0666
H_{10}	1	0	0,05	0,0666
H_{11}	1	1	0,0447	0,0895

3. Рассчитать резонансные частоты 3 первых типов колебаний в прямоугольном резонаторе с размерами 20×10×40 мм^3.

6. Расчет толщины скин-слоя.

Объёмная плотность тока максимальна у поверхности проводника. При удалении от поверхности она убывает и на глубине Δ становится меньше в е раз. Поэтому практически весь ток сосредоточен в слое толщиной Δ. Она называется толщиной скин-слоя и на основании полученного выше равна

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

Очевидно, что при достаточно большой частоте ω толщина скин-слоя может быть очень малой. В качестве примера приведём зависимость глубины скин-слоя от частоты для медного проводника:

Частота	Δ
60 Гц	8,57 мм
10 кГц	0,66 мм
100 кГц	0,21 мм
1 МГц	66 мкм

10 МГц	21 мкм

Для расчёта толщины скин-слоя в металле (приближённо) можно использовать следующие эмпирические формулы:

$$\Delta = c\sqrt{2\frac{\varepsilon_0}{\omega\mu_m}\rho}.$$

Здесь ε_0 = 8,85419·10^{-12} Ф/м — абсолютная диэлектрическая проницаемость, ρ — удельное сопротивление, *c* — скорость света, μ_m — относительная магнитная проницаемость (близка к единице для пара- и диамагнетиков — меди, серебра, и т. п.), $\omega = 2\pi \cdot f$. Все величины выражены в системе СИ.

$$\Delta = 503\sqrt{\frac{\rho}{\mu_m f}},$$

ρ — удельное сопротивление, μ_m — относительная магнитная проницаемость, f — частота.

7. Примеры решения расчетных задач.

Задача 1.

1.1. Определить комплексные амплитуды всех остальных, не заданных в условии задачи, составляющих векторов полей.

1.2. Определить диапазон частот, в котором рассматриваемое поле – бегающая вдоль оси z волна.

1.3. Записать выражение для мгновенных значений всех составляющих векторов полей.

1.4. Построить графики зависимостей мгновенных значений составляющих полей от координаты z для двух случаев.

1.5. Проверить выполнение граничных условий для составляющих векторов полей на проводниках линии.

1.6. Определить амплитуды токов, протекающих по проводникам линии, а также напряжения между проводниками линии.

1.7. Определить волновое сопротивление коаксиальной линии.

1.8. Определить фазовую скорость распространения энергии волны.

Изобразить силовые линии векторов E и H, а также линии токов на проводниках линии.

В коаксиальной линии, изображенной на рисунке 3.1(МУ), возбуждено монохроматическое электромагнитное поле. Внутренний и внешний проводники линии изготовлены из материала с μ_r =1 и удельной проводимостью $\sigma = \infty$. Линия заполнена однородной изотропной средой с параметрами ε_r, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$. Известны либо комплексная амплитуда электрического поля волны, либо комплексная амплитуда магнитного поля волны, либо, наконец, комплексные амплитуды продольных составляющих электрического и магнитного полей волны.

Известные поля и составляющие векторов полей

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{r}_0 \cdot \frac{I_0 \cdot Z_C}{2\pi r} \exp(-ikz)$$

$$\dot{E}_{rm} = \frac{I_0 \cdot Z_C}{2\pi r} \exp(-ikz)$$

$$\gamma_\perp = 0$$

$\varepsilon_r = 1,2$

I = 5 мА = $5 \cdot 10^{-3}$ А

$2R_1$ = 2,2 мм

$2R_2$ = 8,7 мм

f = 3 МГц = $3 \cdot 10^6$ Гц.

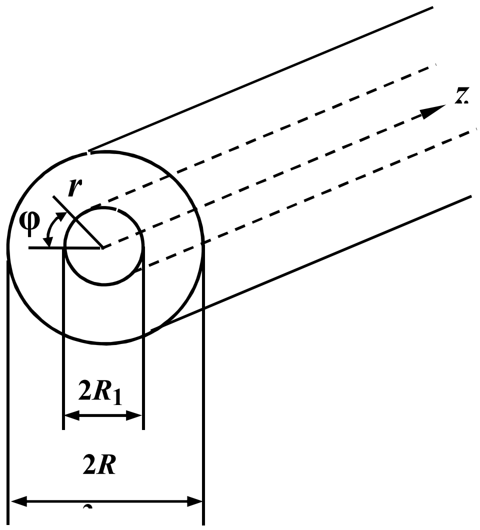


Рис. 1.1. Коаксиальная линия

Требуется:

1) Определить комплексные амплитуды всех остальных, не заданных в условии задачи, составляющих (проекций) векторов полей;

По условию задачи

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{r}_0 \cdot \frac{I_0 \cdot Z_C}{2\pi r} \exp(-i\beta z)$$

$$\dot{E}_{rm} = \frac{I_0 \cdot Z_C}{2\pi r} \exp(-i\beta z) \quad \text{и} \quad \gamma_\perp = 0$$

Поперечное волновое число $\gamma_\perp = 0$ в том случае, если в коаксиальной линии распространяется поперечная волна – ТЕМ, следовательно, $\dot{E}_{zm} = 0$ и $\dot{H}_{zm} = 0$.

Из соотношений, вытекающих из уравнений Максвелла, следует:

$$\dot{H}_{\varphi m} = \frac{\omega\varepsilon}{\beta}\dot{E}_{rm}$$

Если $\gamma_\perp = 0$, то $\beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu \Rightarrow \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Поэтому $\frac{\omega\varepsilon}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z_C}$, где

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi\cdot10^{-7}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1{,}2}} = 0{,}345\cdot10^3\,Ом = 345$$ Ом

$\varepsilon_a = \varepsilon_r\cdot\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1{,}2 = 10{,}62\cdot10^{-12}$ *Ф/м*- абсолютная диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu_a = \mu_r\cdot\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot1\,Гн/м = 1{,}26\cdot10^{-6}\,Гн/м$ -абсолютная магнитная проницаемость среды.

$$\dot{H}_{\varphi m} = \frac{I_0}{2\pi r}e^{-i\beta z}$$

По условию задачи I_0 = 5 мА = 0,005 А

$\dot{E}_{rm} = \frac{0{,}27}{r}\cdot e^{-i\beta z}$, В/м $\qquad \dot{H}_{\varphi m} = \frac{0{,}8\cdot10^{-3}}{r}\cdot e^{-i\beta z}$, А/м

На поверхности внутреннего проводника и на внутренней поверхности внешнего проводника коаксиальной линии (если они идеально проводящие), касательная составляющая электрического поля должна обращаться в нуль.

$E_\varphi(R_1, \varphi) = E_\varphi(R_2, \varphi) = 0 \;\; \rightarrow E_{\varphi m} = 0$

Следовательно, $H_{rm} = 0$ (на основании уравнений Максвелла).

2) Определить диапазон частот, в котором рассматриваемое поле – бегущая вдоль оси *z* волна.

По условию задачи $\gamma_\perp = 0$

где $\gamma_\perp$ - поперечное волновое число.

Критическая длина волны равна: $\lambda_{кр} = \upsilon_0 / f_{кр} = 2\pi / \gamma_\perp$

где υ_0 - скорость волны в среде с параметрами ε_a и μ_a

Таким образом, равенство нулю $\gamma_\perp$ означает, что $\lambda_{кр} = \infty$ и $f_{кр} = 0$.

Следовательно, рассматриваемое поле является бегущей волной вдоль оси Oz при любой частоте.

3) Записать выражения для мгновенных значений всех составляющих векторов полей.

$$\dot{E}_{rm} = \frac{0,27}{r} \cdot e^{-i\beta z} \qquad \dot{H}_{\varphi m} = \frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{r} \cdot e^{-i\beta z}$$

$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ - постоянная распространения волн TEM.

$$\beta = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \sqrt{10,6 \cdot 10^{-12} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6}} = 0,067 \text{ м}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 18,8 \cdot 10^6 c^{-1}$$

Чтобы получить мгновенные значения составляющих векторов полей, умножаем выражения для комплексных амплитуд на $e^{i\omega t}$ и отделяем вещественную часть, учитывая соотношение: $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$.

$$E_r = \mathrm{Re}\left\{\dot{E}_{rm} e^{i\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{0,66}{r} \cdot e^{-i\beta z} \cdot e^{i\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{0,66}{r} \cdot e^{i(\omega t - \beta z)}\right\}$$

$$E_r = \frac{0,27}{r}\cos(18,8 \cdot 10^6 t - 0,067 z), \quad \text{В/м}$$

$$H_\varphi = \mathrm{Re}\left\{\dot{H}_{rm} e^{i\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{r} \cdot e^{-i\beta z} \cdot e^{i\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{r} \cdot e^{i(\omega t - \beta z)}\right\}$$

$$H_\varphi = \frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{r}\cos(18,8 \cdot 10^6 t - 0,067 z), \quad \text{А/м}$$

4) Построить графики зависимостей мгновенных значений составляющих полей от координаты Z для двух случаев:

$t = 0$, $r = (R_1+R_2)/2$

$0 \le z \le 2\lambda$

$t = T/4$, $r = (R_1+R_2)/2$

$R_1 = 1,1$ мм $=1,1 \cdot 10^{-3}$ м

$R_2 = 4,35$ мм $=4,35 \cdot 10^{-3}$ м

$r = 2,7$ мм $= 2,7 \cdot 10^{-3}$ м

При t = 0

$$\dot{E}_r = \frac{0,27}{2,7\cdot10^{-3}}\cos(0,067z) = 100\cos(0,067z)$$, В/м

$$\lambda = \frac{v_0}{f}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{c}{\varepsilon_r\cdot\mu_r}} = \frac{3\cdot10^8}{\sqrt{1,2}} = 2,74\cdot10^8$$, м/с – скорость распространения волны в данной среде.

$$\lambda = \frac{2,74\cdot10^8}{3\cdot10^6} \approx 91$$, м

$$\dot{H}_\varphi = \frac{0,8\cdot10^{-3}}{2,7\cdot10^{-3}}\cos(0,067z) = 0,3\cos(0,067z)$$, А/м

При t = T/4 = 1/4f

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \beta z) = \sin\beta z$$

$$\dot{E}_{rm} = 100\sin(0,067z)$$, В/м

$$\dot{H}_{\varphi m} = 0,3\sin(0,067z)$$, А/м

Для построения графиков рассчитаем значения составляющих при z = 0…. 91 м.

5) Проверить выполнение граничных условий для составляющих векторов полей на проводниках линии.

На поверхности внутреннего проводника и на внутренней поверхности внешнего проводника коаксиальной линии, которые являются идеально проводящими (σ = ∞), касательная составляющая электрического поля обращается в нуль. [1]

$$E_\varphi(R_1, \varphi) = E_\varphi(R_2, \varphi) = 0$$

6) Определить амплитуды токов, протекающих по проводникам линии, а также напряжения между проводниками линии.

Ток в проводниках имеет только продольную составляющую:

$$\dot{I} = \oint_{\tilde{A}} \dot{H}dl = \int_0^{2\pi} R_1\cdot\dot{H}_\varphi(R_1,\varphi)d\varphi = \frac{2\pi R_1 E_0}{Z_c}e^{-i\beta z}$$

$\dot{I}_0 =$ 5 мА = 0,005 А

Напряжение между проводниками лини:

$$\dot{U} = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_r dr = E_0 R_1 \ln\frac{R_2}{R_1} \cdot e^{-i\beta z}$$,

$$\dot{U}_0 = 0,27 \cdot \ln\frac{4,35}{1,1} = 0,37$$ В.

7) Определить волновое сопротивление линии.

Отношение напряжения $\dot{U}$ к току $\dot{I}$ в режиме бегущей волны называется волновым сопротивлением коаксиальной линии.

$$Z_B = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_0}{I_0}$$

$$Z_B = \frac{0,37}{0,005}$$ = 74 Ом.

8) Определить фазовую скорость и скорость распространения энергии волны

Фазовая скорость распространения волны ТЕМ в направляющей системе равна:

$$\text{v}_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta} = \text{v}_0 = 2,75 \cdot 10^8$$ м/с,

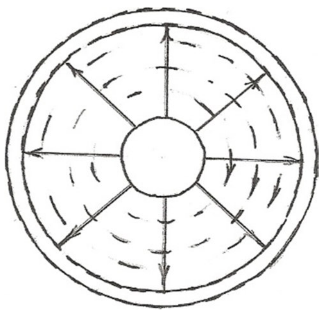
скорость распространения энергии равна:

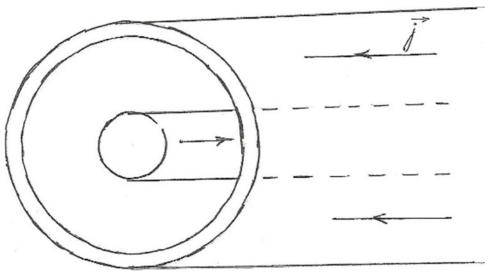
$$\text{v}_{\text{э}} = \frac{\text{v}_0{}^2}{\text{v}_{\text{ф}}} = \text{v}_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}$$.

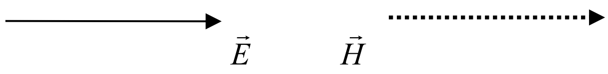
В случае волны ТЕМ ($\lambda_{кр} = \infty$) скорость распространения энергии также равна:

$$\text{v}_{\text{э}} = \text{v}_0 = 2,75 \cdot 10^8$$, м/с.

9) Изобразить силовые линии векторов Е и Н , а также линии токов на проводниках линии.







Ток в проводниках имеет только продольную составляющую $\vec{j}_z$.

Задача 2.

2.1. Определить комплексные амплитуды всех не заданных в условии задачи составляющих векторов поля в средах 1 и 2 при x ≥ 0.

2.2. Используя граничные условия при x=h, получить трансцендентное уравнение, связывающее между собой волновые числа $\gamma_\perp$ и $\alpha_\perp$ в средах 1 и 2.

2.3. Решив данное уравнение, определить все типы волн, которые распространяются по этому световоду.

2.4. Рассчитать параметры волны низшего типа $\gamma_\perp$,$\alpha_\perp$,β, $v_ф$;

2.5. Величины $\alpha_\perp$ и $\gamma_\perp$ определяются непосредственно из графика для точки 1.

2.6. Определив величины A и B, входящие в выражения для составляющих полей, построить зависимости этих составляющих полей для волны низшего типа координаты x. Пределы изменения x: $-\infty\ldots+\infty$.

2.7. Заменив плоский диэлектрический световод круглым световодом, диаметр которого равен толщине плоского световода, определить, обеспечивается ли при заданном диаметре сердечника одномодовый режим работы, если не обеспечивается, то определить, какой должна быть проницаемость оболочки $\varepsilon r2$ для его выполнения.

2.8. Изобразить структуру векторных линий для полей $\bar{E}$ и $\bar{H}$ у основной волны круглого световода в поперечном сечении.

Определить основные характеристики монохроматического электромагнитного поля, существующего в плоском диэлектрическом волноводе (световоде), изображенном на рисунке 4.1 . Известны комплексные амплитуды двух составляющих (проекций) векторов поля в средах 1 и 2 при x $\geq$ 0.

Известны составляющие векторов поля
в среде 1
$\dot{E}_{zm}^{(1)} = A\sin(\gamma_{\perp}x)\cdot e^{-i\beta z}$

в среде 2
$\dot{E}_{zm}^{(2)} = Be^{-\alpha_{\perp}x}\cdot e^{-i\beta z}$

$\dot{H}_{zm}^{(1)} = \dot{H}_{zm}^{(2)} = 0$

$\varepsilon_{r1} = 2{,}31$

$\varepsilon_{r2} = 2{,}15$

$2h = 6мкм \Rightarrow h = 3мкм = 3\cdot 10^{-6}\,м$

$\lambda = 1{,}55мкм = 1{,}55\cdot 10^{-6}\,м$

$P_{cp}^{(2)} = 20$ мВт = 0,02 Вт

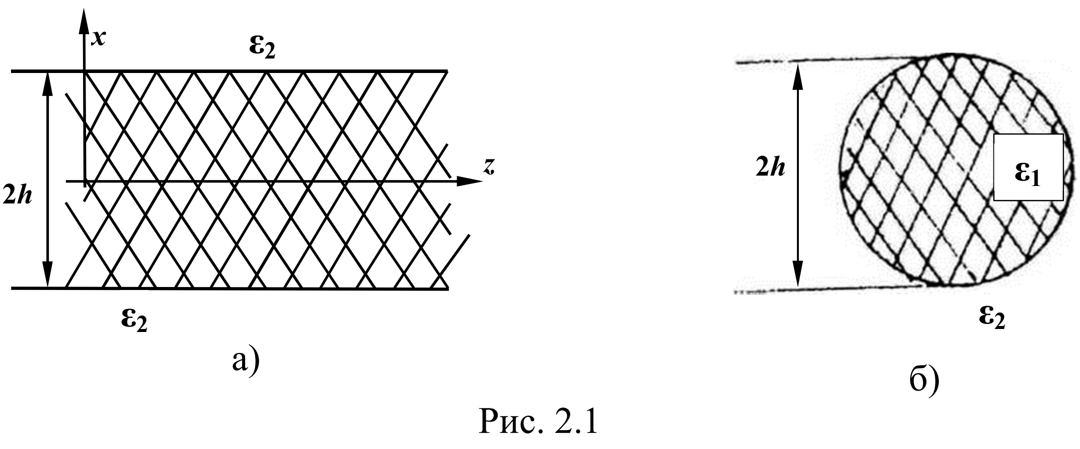


Рис. 2.1

Требуется:

1) определить комплексные амплитуды всех остальных, не заданных в условии задачи, составляющих векторов поля в средах 1 и 2 при x≥0.

Воспользуемся соотношениями (1) – (6) (см. задачу №1 МУ) и тем, что $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} = i\omega\varepsilon \dot{E}_{zm}$ $\qquad$ $\frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial x} = i\omega\varepsilon \dot{E}_{zm}$

$\dot{H}_{ym} = i\omega\varepsilon \int \dot{E}_{zm}dx$

$$\dot{H}_{ym}{}^{(1)} = i\omega\varepsilon_1 \int A\sin(\gamma_\perp x)\cdot e^{-i\beta z}dx = -\frac{i\omega\varepsilon_1 A}{\gamma_\perp}\cos(\gamma_\perp x)\cdot e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_{ym}{}^{(2)} = i\omega\varepsilon_2 \int Be^{-\alpha_\perp x}\cdot e^{-i\beta z}dx = -\frac{i\omega\varepsilon_2}{\alpha_\perp}\cdot Be^{-\alpha_\perp x}e^{-i\beta z}$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} + i\beta \dot{H}_{ym} = i\omega\varepsilon \dot{E}_{xm}$$

$$\dot{E}_{xm} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}\dot{H}_{ym}$$

$$\dot{E}_{xm}{}^{(1)} = \frac{i\beta A}{\gamma_\perp}\cos(\gamma_\perp x)\cdot e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_{xm}{}^{(2)} = -\frac{i\beta}{\alpha_\perp}\cdot Be^{-\alpha_\perp x}e^{-i\beta z}$$

2) используя граничные условия при x = h , получить трансцендентное уравнение, связывающее между собой волновые числа $\gamma_\perp$ и $\alpha_\perp$ в средах 1 и 2

Для выполнения пункта 2 задания надо записать граничные условия для касательных составляющих векторов поля:

$$\begin{cases} \dot{H}_{ym}^{(1)} = \dot{H}_{ym}^{(2)} \\ \dot{E}_{zm}^{(1)} = \dot{E}_{zm}^{(2)} \end{cases} \qquad \text{при} \qquad x = h$$

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1 A}{\gamma_\perp}\cos(\gamma_\perp h) = \dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_\perp}\cdot Be^{-\alpha_\perp h} \\ A\sin(\gamma_\perp h) = Be^{-\alpha_\perp h} \end{cases}$$

В результате получаются два алгебраических уравнения, в которые входят величины

$\alpha_\perp$ и $\gamma_\perp$. Исключив из этих уравнений величины A и B получаем одно уравнение:

$$\frac{\gamma_\perp}{\varepsilon_1}\mathrm{tg}(\gamma_\perp h) = \frac{\alpha_\perp}{\varepsilon_2}$$

Далее его надо преобразовать так, чтобы в левой его части находилась неизвестная величина $\alpha_\perp h$, а правая часть представляла собой функцию, которая зависит от неизвестной величины $\gamma_\perp h$.

$\alpha_{\perp} h = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \gamma_{\perp} h \cdot tg(\gamma_{\perp} h)$ - трансцендентное уравнение.

Решение этого уравнения в графической форме представлено на рисунке 4.2. в виде двух сплошных кривых. Нужно провести окружность, которая соответствует уравнению вида:

$(\gamma_{\perp} h)^2 + (\alpha_{\perp} h)^2 = (hk)^2 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})$, где

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{6,28}{1,55} \cdot 10^6 = 4,05 \cdot 10^6 \dfrac{1}{м} = 4,05 мкм^{-1}$ - волновое число в вакууме.

$h = 3 мкм = 3 \cdot 10^{-6} м$

$\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2} = 2,31 - 2,15 = 0,16$

Радиус окружности численно равен:

$R = \sqrt{(kh)^2 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})} = 4,9$

$(\gamma_{\perp} h)^2 + (\alpha_{\perp} h)^2 = (4,9)^2$ - уравнение окружности.

Графическое решение трансцендентного уравнения $\alpha_{\perp} h = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \gamma_{\perp} h \cdot tg(\gamma_{\perp} h)$.

Таблица.

$\gamma_{\perp} h$	$\alpha_{\perp} h$
0	0
0.25	0.060
0.5	0.254
0.75	0.650
1.0	1.448
1.25	3.499
1.3	4.354
3.14	0
3.5	1.219
3.75	2.429
4.0	4.307
4.25	7.930

3) решив данное уравнение, определить все типы волн, которые распространяются по этому световоду;

Наличие двух точек пересечения свидетельствует о том, что в световоде распространяется два типа волн.

По условию $\dot{E}_{zm} \neq 0$ и $\dot{H}_{zm} = 0$, следовательно, это будут волны E_0 (соответствует точке 1) и E_2 (соответствует точке 2).

Низшим типом является волна E_0.

4) рассчитать параметры волны низшего типа $\gamma_\perp$, $\alpha_\perp$, β ,$v_ф$;

Величины $\gamma_\perp$ и $\alpha_\perp$ определяются непосредственно из графика для точки 1.

$$\gamma_\perp h = 1,3$$

$$\gamma_\perp = \frac{1,3}{h} = \frac{1,3}{3мкм} = 0,43 \cdot 10^6 м^{-1}$$

$$\alpha_\perp h = 4,7$$

$$\alpha_\perp = \frac{4,7}{h} = \frac{4,7}{3 \cdot 10^{-6}} = 1,57 \cdot 10^6 м^{-1}$$

Величину β найдем из выражения $\gamma_\perp{}^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \beta^2$, где

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda} = k \cdot c = 4,05 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^8 = 12,15 \cdot 10^{14} c^{-1}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r_1} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,31 = 20,4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$\mu_1 = \mu_0 \cdot 1 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \gamma_\perp{}^2}$$

$$\beta = \sqrt{12,15^2 \cdot 10^{28} \cdot 20,4 \cdot 10^{-12} \cdot 12,6 \cdot 10^{-7} - (0,43)^2 \cdot 10^{12}} = 6,14 \cdot 10^6 м^{-1}$$

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{12,15 \cdot 10^{14}}{6,14 \cdot 10^6} = 1,98 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$ – фазовая скорость.

5) определив величины А и В , входящие в выражения для составляющих полей, построить зависимости этих составляющих полей для волны низшего типа от координаты x. Пределы измерения x : -∞ ,+∞ ;

$$P_{ср}^{(2)} = 2\int_0^h \Pi_{срz} dx \cdot = 2\int_0^h \Pi_{срz} dx$$

$$\Pi_{cpz} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{E}_{xm} \cdot \hat{H}_{ym})$$

Известно, что $P_{cp}^{(2)} = 20$ мВт = 0,02 Вт

$\hat{H}_{ym}$ - комплексно сопряженная величина по отношению к $\dot{H}_{ym}$.

Для перехода к сопряженной величине достаточно изменить знак у всех мнимых единиц.

$$\dot{H}_{ym}^{(2)} = -\frac{i\omega\varepsilon_2 B}{\alpha_\perp} \cdot e^{-\alpha_\perp x} \cdot \cdot e^{-i\beta z}$$

$$\hat{H}_{ym}^{(2)} = \frac{i\omega\varepsilon_2 B}{\alpha_\perp} \cdot e^{-\alpha_\perp x} \cdot e^{i\beta z}$$

$$\dot{E}_{xm}^{(2)} = -\frac{i\beta}{\alpha_\perp} \cdot Be^{-\alpha_\perp x} \cdot e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_{xm}^{(2)}\hat{H}_{ym}^{(2)} = \frac{\omega\varepsilon_2\beta}{\alpha_\perp^{\ 2}} B^2 \cdot e^{2\alpha_\perp h}$$

$$B^2 = \frac{2\alpha_\perp^{\ 3} P_{cp}^{(2)}}{\omega\varepsilon_2\beta} \cdot e^{2\alpha_\perp h}$$

$$B^2 = \frac{2 \cdot 1,57^3 \cdot 10^{18} \cdot 0,02}{12,15 \cdot 10^{14} \cdot 6,14 \cdot 10^6 \cdot 2,15 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot e^{9,4}$$

$$B^2 = 1,09 \cdot 10^6 \cdot 12088$$

$$B = 115 \cdot 10^3 = 1,15 \cdot 10^5$$

Величину A найдем из граничных условий:

$\dot{E}_{zm}^{(1)} = \dot{E}_{zm}^{(2)}$ при $x=h$

$$A\sin(\gamma_\perp h) = Be^{-\alpha_\perp h}$$

$$A = \frac{Be^{-\alpha_\perp h}}{\sin(\gamma_\perp h)} = \frac{115 \cdot 10^3 \cdot e^{-4,7}}{\sin(1,3)} = 1090$$

Таким образом,

$$\dot{E}_{zm}^{(1)} = 1090\sin(0,43 \cdot 10^6 x)e^{-i6,14\cdot10^6 z}$$

$$\dot{E}_{zm}^{(2)} = 1,15 \cdot 10^5 \cdot e^{-1,57\cdot10^6 x} \cdot e^{-i6,14\cdot10^6 z}$$

тогда при z = 0 :

$\dot{E}_{zm}^{(1)} = 1090\sin(0,43\cdot 10^6 x)$, В/м

$\dot{E}_{zm}^{(2)} = 1,15\cdot 10^5 \cdot e^{-1,57\cdot 10^6 x}$, В/м

$$\dot{E}_{xm}{}^{(1)} = -\frac{i\beta A}{\gamma_\perp}\cos(\gamma_\perp x)$$

$$\dot{E}_{xm}{}^{(2)} = -\frac{i\beta}{\alpha_\perp}\cdot Be^{-\alpha_\perp x}$$

$\beta = 6,14\cdot 10^6$

$$\dot{E}_{xm}{}^{(1)} = -i\frac{6,14\cdot 10^6\cdot 1090}{0,43\cdot 10^6}\cos(0,43\cdot 10^6 x)$$

$\dot{E}_{xm}{}^{(1)} = -i15564\cos(0,43\cdot 10^6 x)$, В/м

$$\dot{E}_{xm}{}^{(2)} = -i\frac{6,14\cdot 10^6\cdot 1,15\cdot 10^5}{1,57\cdot 10^6}e^{-1,57\cdot 10^6 x}$$

$\dot{E}_{xm}{}^{(2)} = -i4,5\cdot 10^5 e^{-1,57\cdot 10^6 x}$, В/м

$$\dot{H}_{ym}{}^{(1)} = -\frac{i\omega\varepsilon_1 A}{\gamma_\perp}\cos(\gamma_\perp x)$$

$\dot{H}_{ym}{}^{(2)} = \dfrac{i\omega\varepsilon_2 B}{\alpha_\perp}\cdot e^{-\alpha_\perp x}$ при $z = 0$

$$\dot{H}_{ym}{}^{(1)} = -i\frac{12,15\cdot 10^{14}\cdot 20,4\cdot 10^{-12}\cdot 1090}{0,43\cdot 10^6 x}\cos(0,43\cdot 10^6 x)$$

$$\dot{H}_{ym}{}^{(1)} = -i\cdot 62,8\cdot\cos(0,43\cdot 10^6 x)$$

$$\dot{H}_{ym}{}^{(2)} = \frac{i\cdot 12,15\cdot 10^{14}\cdot 19\cdot 10^{-12} 1,15\cdot 10^5}{1,57\cdot 10^6}e^{-1,57\cdot 10^6 x}$$

$$\dot{H}_{ym}{}^{(2)} = i\cdot 1690\cdot e^{-1,57\cdot 10^6 x}$$

Для построения графиков рассчитаем значения составляющих при z = 0.

Таблица

x, мкм	0	1	2	3		3.5	4	5
E_z В/м	0	454	826	1047	1036	472	215	45
E_x $*10^3$ В/м	-15.6	-14.1	-10.2	-4.3	-4.1	-1.8	-0.8	-0.2
H_y А/м	62.8	57.1	41	17.4	15.2	6.9	3.2	0.7

6) заменив плоский диэлектрический световод круглым световодом (рис. 4.1,б), диаметр которого равен толщине плоского световода, определить, обеспечивается ли при заданном диаметре сердечника одномодовый режим работы; если не обеспечивается, то определить, какой должна быть проницаемость оболочки для его выполнения;

Одномодовый режим работы в круглом световоде имеет место, когда

$$R = k \cdot a\sqrt{\varepsilon_{r_1} - \varepsilon_{r_2}} < 2,405 \ ,$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, a – радиус круглого световода, равный h.

$$R = 4,05 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^{-6}\sqrt{2,31 - 2,15} = 4,9$$

Условие одномодового режима не выполняется.

Найдем ε_{r_2} , при котором будет обеспечиваться одномодовый режим:

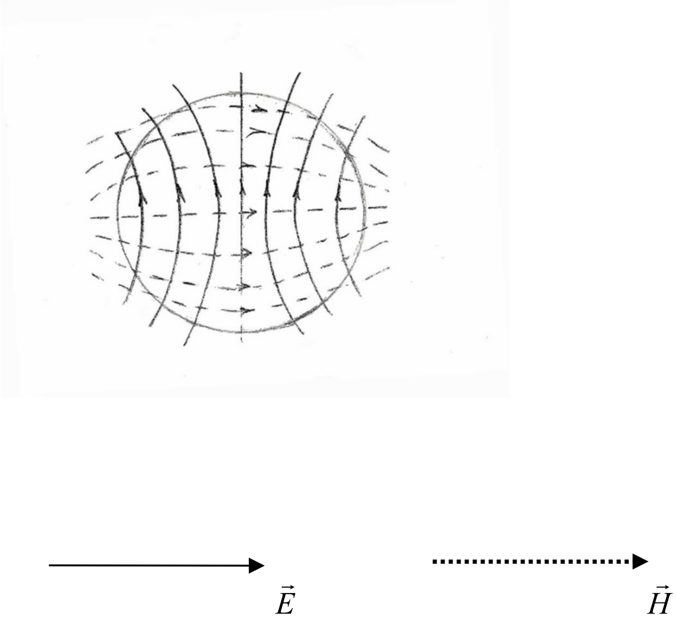
$$\varepsilon_{r_1} - \varepsilon'_{r_1} = \left(\frac{2,405}{ka}\right)^2$$

$$\varepsilon'_{r_2} = \varepsilon_{r_1} - \left(\frac{2,405}{ka}\right)^2 = 2,31 - \left(\frac{2,405}{4,05 \cdot 3}\right)^2 = 2,271$$

Одномодовый режим выполняется при

$\varepsilon'_{r_2} \geq 2,271$.

7) изобразить структуру векторных линий для полей E и H у основной волны круглого световода в поперечном сечении.



Волна типа HE_{11} имеет наименьшую критическую частоту, равную нулю, и является основной волной диэлектрической круглой линии передачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сомов А.М., Старостин В.В., Бенеславский С.Д. Электродинамика: учебное пособие М.: Горячая линия - Телеком, 2011.

2. Виноградов А.Ю., Кабетов Р.В., Сомов А.М Устройства СВЧ и малогабаритные антенны: учебное пособие М.: Горячая линия - Телеком, 2012.

3. Боков Л.А., Замотринский В.А., Мандель А.Е. Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие. Томский гос. университет систем управления и радиоэлектроники, 2012.