МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

В.И. Юхнов
А.В. Бородин

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

Методическое пособие

для практических занятий

Ростов-на-Дону
2022 г.

Общая теория связи. Методическое пособие для проведения практических занятий. Пособие предназначено для проведения занятий со студентами специальностей 11.02.03 (Инфокоммуникационные технологии и системы связи) очной, очно-заочной и заочной формы обучения.

Составители: Заведующий кафедрой ИТСС к.т.н. доцент Юхнов В.И.

Доцент кафедры ОНП к.ф-м.н. доцент Бородин А.В.

Рецензент: доцент кафедры ИТСС доцент Ершов В.В.

Методическое пособие обсуждено и одобрено на заседании кафедры ИТСС.
Протокол от «19» декабря 2022 г. № 5.

АННОТАЦИЯ

Курс «Общая теория связи» изучается студентами специальности 11.02.03 (Инфокоммуникационные технологии и системы связи) всех направлений подготовки. Учебный план предусматривает проведение практических занятий в количестве 36 часов для студентов очной формы обучения и 8 часов для студентов очно-заочной и заочной формы обучения.

Проведение практических занятий ставит своей задачей использование теоретических знаний, полученных в лекционном курсе и при самостоятельной работе, для решения прикладных телекоммуникационных задач. Пособие включает в себя восемь разделов, в каждом разделе приведены задачи с решениями и несколько задач такого же типа для самостоятельного решения. В сборник включены также задачи с индексом "и", которые предлагаются студентам для решения по индивидуальным исходным данным.

I. РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В РЯД ФУРЬЕ И В РЯД КОТЕЛЬНИКОВА.

Задача 1.1. Рассчитать спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой А, длительностью τ и периодом следования $T = 2\tau$. Определить ширину спектра сигнала.

Построить временную и спектральную диаграммы заданного сигнала.

Решение

Временная диаграмма сигнала представлена на рис. 1.1.

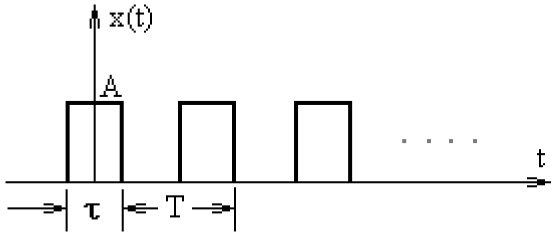

Рис. 1.1. Временная диаграмма сигнала

Для получения спектра сигнала, необходимо разложить его в ряд Фурье.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t\right),$$

Определим коэффициенты разложения в ряд Фурье $a_к$ и $b_к$:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\cos k\omega_1 t dt = \frac{2A}{T}\cdot\frac{\sin k\omega_1 t}{k\omega_1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4A}{k\omega_1 T}\sin\frac{k\omega_1\tau}{2}.$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\sin k\omega_1 t dt = 0$$, так как подынтегральная функция – четная.

Ряд Фурье запишем для заданного сигнала в виде:

$x(t)=0,5\, a_0 + a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + a_3 \cos 3\omega_1 t + a_4 \cos 4\omega_1 t + \ldots\ldots$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ - частота первой гармоники.

В общем случае периодический сигнал содержит независящую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний, или гармоник, с частотами, кратными основной частоте последовательности.

Так как $T = 2\tau$, то коэффициенты a_k равны:

$$a_0 = A, \qquad a_k = 2A\,(\sin k\pi/2)\,/\,k\pi, \text{ при } k > 0.$$

После вычисления коэффициентов ряд Фурье будет иметь вид:

$$x(t)=0,5\,A + 2A/\pi \cos\omega_1 t + 2A/3\pi\ \cos 3\omega_1 t + 2A/5\pi\ \cos 5\omega_1 t + \ldots\ldots$$

(коэффициенты четных гармоник будут равны 0)

Графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала называется спектральной диаграммой. Спектр периодической последовательности импульсов будет иметь вид (рис.1.2).

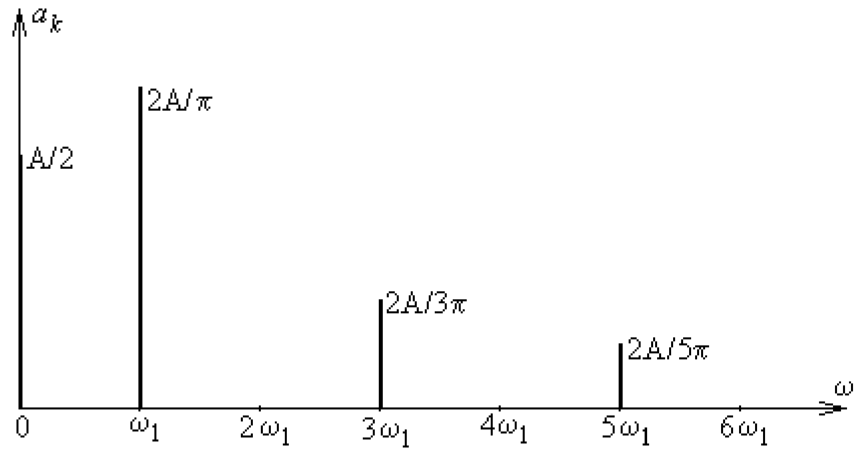

Рис. 1.2. Спектр периодической последовательности импульсов

Ширина спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов определяется по формуле

$$\Pi = 2\pi/\tau.$$

После расчета получим $\Pi = 2\omega_1$.

Задача 1.2. Рассчитать спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой A = 1В, длительностью τ = 1мс и периодом следования T = 4мс. Построить временную диаграмму и спектр периодической последовательности импульсов. Определить ширину спектра сигнала.

ОТВЕТ: a_0 = 0,5 В; $a_k = 2\,(\sin k\pi/4) / k\pi$, при $k > 0$;

$\omega_1 = 0{,}5\,\pi \cdot 10^3$ р/с, $\Pi = 2\pi \cdot 10^3$ р/с.

Задача 1.3. Рассчитать спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой A = 2В, длительностью τ = 2 мкс и периодом следования T = 4 мкс. Построить временную диаграмму и спектр периодической последовательности импульсов. Определить ширину спектра сигнала.

ОТВЕТ: a_0 = 2 В; $a_k = 4\,(\sin k\pi/2) / k\pi$, при $k > 0$;

$\omega_1 = 0{,}5\,\pi \cdot 10^6$ р/с, $\Pi = \pi \cdot 10^6$ р/с.

Задача 1.3и. Рассчитать спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $A = (n + 1)$ вольт, длительностью $\tau = (m + 5)$мкс и периодом следования $T = (m + 5)(n + 2)$мкс. Построить временную диаграмму и спектр периодической последовательности импульсов. Определить ширину спектра сигнала. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 1.4. Определить интервал и частоту дискретизации в соответствии с теоремой Котельникова для непрерывного сигнала, отличного от нуля только для положительных значений t:

$x(t) = exp(-\alpha t)$ при $t > 0$,

если среднеквадратическая погрешность дискретизации (СКП) не должна превышать ε_0.

Решение

Среднеквадратическая погрешность дискретизации определяется энергией спектральных составляющих сигнала, лежащих за пределами частоты, которую мы выбрали в качестве верхней (граничной) частоты.

Определим спектр заданного сигнала, используя интегральное преобразование Фурье:

$$S(j\omega) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega};$$

Найдем квадрат модуля спектра

$$|S(j\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Выбираем верхнюю граничную частоту в спектре сигнала $\omega_в$.

Тогда интервал дискретизации равен $\Delta t = \pi/\omega_в$. Следует учесть, что верхнюю частоту следует выбрать так, чтобы СКП не превышала заданную величину ε_0 . СКП определяется так:

$$\int_{\omega_в}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \le \varepsilon_0; \quad \varepsilon = \int_{\omega_в}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\alpha} arctg \frac{\omega}{\alpha} \Bigg|_{\omega_в}^{\infty} = \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} arctg \frac{\omega_в}{\alpha}.$$

Частота дискретизации должна быть в 2 раза больше, чем верхняя частота, т.е. $\omega_д = 2\omega_в$.

Задача 1.5. Определить интервал и частоту дискретизации в соответствии с теоремой Котельникова для непрерывного сигнала, отличного от нуля только для положительных значений *t*:

$x(t) = exp(-2t)$ при $t > 0$,

если среднеквадратическая погрешность дискретизации не должна превышать 0,1.

ОТВЕТ: $\omega_в \ge 10$ р/с, $\omega_д \ge 20$ р/с, $\Delta t \le 0{,}314$ с .

Задача 1.6. Определить интервал и частоту дискретизации в соответствии с теоремой Котельникова для непрерывного сигнала, отличного от нуля только для положительных значений *t*:

$x(t) = exp(-4t)$ при $t > 0$,

если среднеквадратическая погрешность дискретизации не должна превышать 0,1.

ОТВЕТ: $\omega_в \geq 9{,}6$ р/с, $\omega_д \geq 19{,}2$ р/с, $\Delta t \leq 0{,}327$ с .

Задача 1.6и. Определить интервал и частоту дискретизации в соответствии с теоремой Котельникова для непрерывного сигнала, отличного от нуля только для положительных значений t:

$$x(t)= exp[-(m + n+ 1)t] \text{ при } t > 0,$$

если среднеквадратическая погрешность дискретизации не должна превышать 0,5/ (n + 1). (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 1.7. Сигнал $U(t)$, дискретизированный в соответствии с теоремой Котельникова, имеет три ненулевых отсчета, показанных на рис. 1.3. По этим отсчетам требуется определить:

а) значение $U(t)$ при $t_1 = 1{,}5$ мкс;

б) полную энергию сигнала $U(t)$;

в) построить примерную временную диаграмму сигнала $U(t)$.

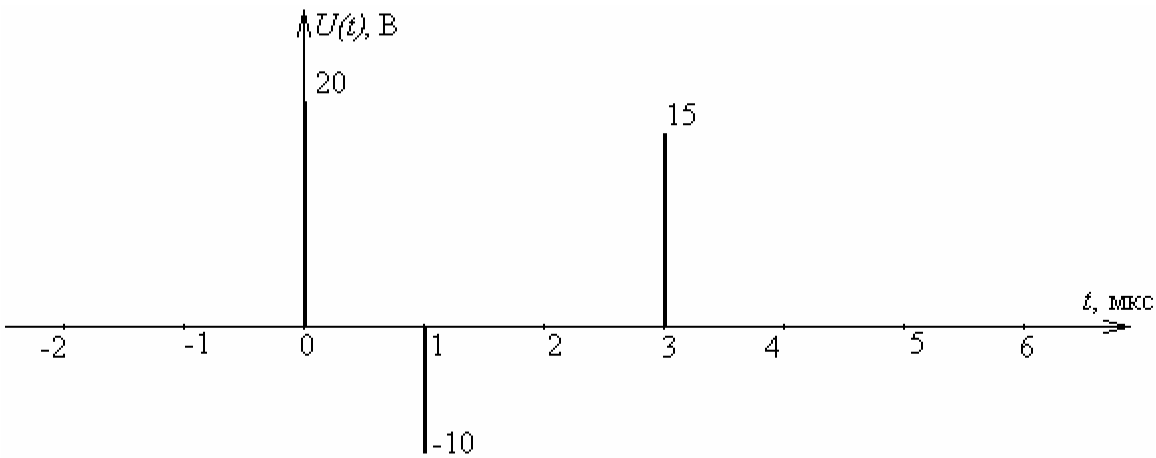

Рис. 1.3. Диаграмма дискретных отсчетов сигнала $U(t)$

Решение

По диаграмме определяем интервал дискретизации данного сигнала

$$\Delta t = 1 \text{ мкс} = 10^{-6} \text{ с};$$

Находим верхнюю граничную частоту $\omega_в = \pi/\Delta t = \pi \cdot 10^6$ рад/с.

Записываем ряд Котельникова для данного сигнала

$$U(t) = 20\frac{\sin \omega_в t}{\omega_в t} - 10\frac{\sin(\omega_в t - \pi)}{\omega_в t - \pi} + 0\frac{\sin(\omega_в t - 2\pi)}{\omega_в t - 2\pi} + 15\frac{\sin(\omega_в t - 3\pi)}{\omega_в t - 3\pi};$$

Находим значение сигнала при $t_1 = 1{,}5$ мкс

$$U(t) = 20\frac{\sin 1{,}5\pi}{1{,}5\pi} - 10\frac{\sin 0{,}5\pi}{0{,}5\pi} + 15\frac{\sin(-1{,}5\pi)}{-1{,}5\pi} = -13{,}8 \text{ В};$$

Определяем полную энергию сигнала

$$E = \Delta t \cdot (U_0^2 + U_1^2 + U_3^2) = 10^{-6} \cdot (20^2 + 10^2 + 15^2) = 0{,}825 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

Построим примерный временной график сигнала $U(t)$ (рис. 1.4).

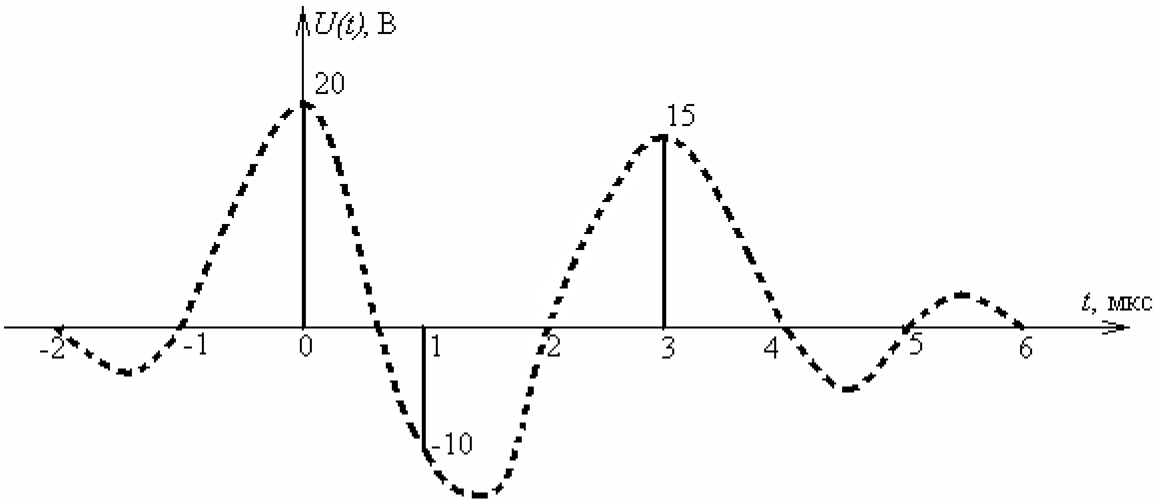

Рис. 1.4. Примерный временной график сигнала $U(t)$

Задача 1.7и. Сигнал $U(t)$, дискретизированный в соответствии с теоремой Котельникова, имеет три ненулевых отсчета, показанных на рис. 1.5. Значения отсчетов $U_0 = m$ В, $U_1 = -n$ В, $U_3 = (m + n)$ В. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

По этим отсчетам требуется определить:

а) значение $U(t)$ при $t_1 = 2{,}5$ мкс;

б) полную энергию сигнала $U(t)$;

в) построить примерную временную диаграмму сигнала $U(t)$.

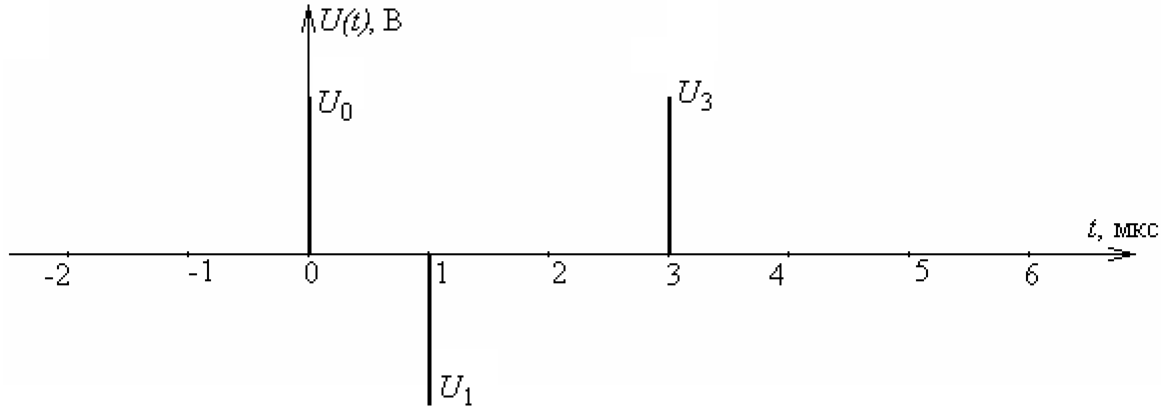

Рис. 1.5. Диаграмма дискретных отсчетов сигнала $U(t)$

II. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

Спектральный анализ отклика нелинейной цепи при детерминированном воздействии.

Задача 2.1. ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована двумя отрезками прямых :

i = 30(u - 0,3) мА, при u > 0,3 В;

i = 0 мА, при u < 0,3 В;

где E_0 = 0,3 В - напряжение отсечки,

S = 30 mA/В - крутизна наклона ВАХ.

К нелинейному элементу приложено напряжение:

$$u(t) = 0{,}4 + 0{,}5\ cos 2\pi \cdot 10^3 \cdot\ t,$$

где E = 0,4 В - напряжение смещения,

U_m = 0,5 В - амплитуда гармонического сигнала.

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать амплитуды гармоник тока I_k (k = 0,1,2,3) , протекающего через нелинейный элемент, определить коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

Решение

Построим ВАХ нелинейного элемента (рис. 2.1)

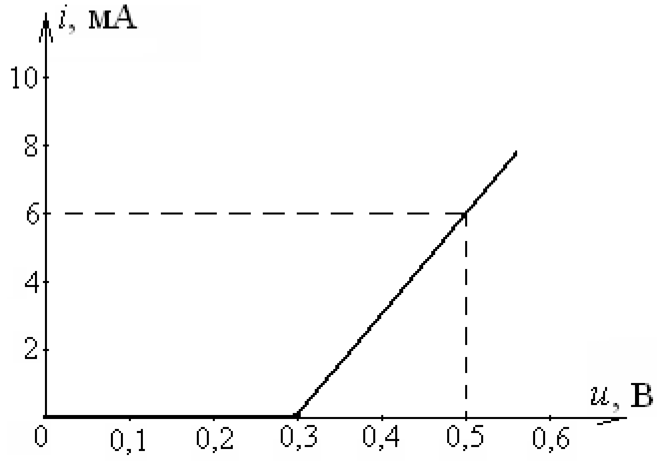

Рис. 2.1. ВАХ нелинейного элемента

Расчет амплитуд гармоник тока I_k выполним методом "угла отсечки". Находим угол отсечки θ:

$$\cos\Theta = \frac{E_0 - E}{U_m} = \frac{0{,}3 - 0{,}4}{0{,}5} = -0{,}2\ ;$$

$$\theta = \ arccos\ (-0{,}2) = 101{,}5^0.$$

Амплитуды гармоник тока находим по формуле:

$$I_k = S \cdot U_m \cdot\ |\gamma_k\ (\theta)|,$$

где $\gamma_k(\theta)$- коэффициенты, значения которых находим по рис.2.2.

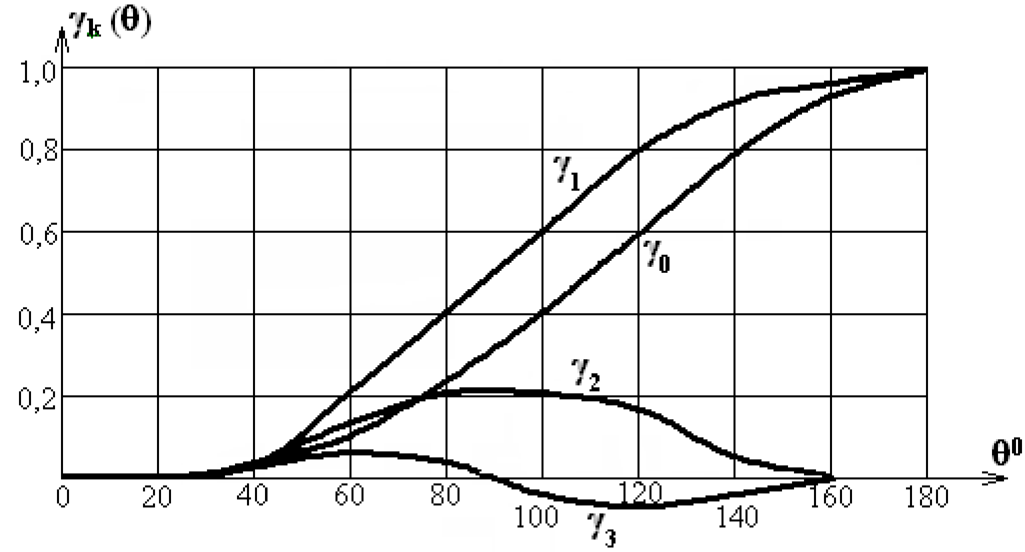

Рис. 2.2. Графики коэффициентов γ_k

Постоянная составляющая имеет частоту $f = 0$, амплитуда:

$I_0 = S \cdot U_m \cdot \gamma_0\ (\theta) = 30 \cdot 0{,}5 \cdot \gamma_0\ (101{,}5) = 6{,}33$ мА;

Первая гармоника имеет частоту $f_0 = 1$ кГц и амплитуду:

$I_1 = SU_m\ \gamma_1\ (\theta) = 30 \cdot 0{,}5 \cdot \gamma_1\ (101{,}5) = 9{,}33$ мА;

Вторая гармоника имеет частоту $2f_0 = 2$ кГц и амплитуду:

$I_2 = SU_m\ \gamma_2\ (\theta) = 30 \cdot 0{,}5 \cdot \gamma_2\ (101{,}5) = 3{,}02$ мА;

Третья гармоника имеет частоту $3f_0 = 3$ кГц и амплитуду:

$I_3 = SU_m\ \gamma_3\ (\theta) = 30 \cdot 0{,}5 \cdot \gamma_3\ (101{,}5) = 0{,}575$ мА.

Коэффициент нелинейных искажений равен:

$$K_{ни} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}{I_1} = 0{,}33$$

Спектр выходного тока имеет вид (рис. 2.3):

Рис. 2,3. Спектр выходного тока

Задача 2.2. ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована двумя отрезками прямых:

$$i = 20(u - 0{,}1) \text{ мА, при } u \geq 0{,}1 \text{ В};$$
$$i = 0 \text{ при } u < 0{,}1 \text{ В}$$

где E_0 = 0,1 В - напряжение отсечки,

S = 20 mA/В - крутизна наклона ВАХ.

К нелинейному элементу приложено напряжение :

$$u(t) = 0{,}2\, cos 2\pi 10^4\, t,$$

где E = 0 - напряжение смещения,

U_m = 0,2В - амплитуда гармонического сигнала.

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать амплитуды гармоник тока I_k (k = 0,1,2,3) , протекающего через нелинейный элемент, определить коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

Ответ: f = 0 Гц, I_0 = 0.44мА,

$f_0 = 10^4$ Гц, I_1 = 0.76 мА,

$2f_0 = 2 \cdot 10^4$ Гц, I_2= 0.54 мА,

$3f_0 = 3 \cdot 10^4$ Гц, I_3= 0.24 мА, $K_{ни}$ = 0.78.

Задача 2.3. ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована двумя отрезками прямых:

$$i = 40(u - 0{,}2) \text{ мА, при } u > 0{,}2 \text{ В}$$
$$i = 0 \text{ при } u < 0{,}2 \text{ В}$$

где E_0 = 0,2 В - напряжение отсечки,

S = 40 mA/В - крутизна наклона ВАХ.

К нелинейному элементу приложено напряжение:

$$u(t) = -\,0{,}8 + 2\, cos 6\pi 10^3\, t,$$

где E = - 0,8 В - напряжение смещения,

U_m = 2В - амплитуда гармонического сигнала.

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать амплитуды гармоник тока I_k (k = 0,1,2,3) , протекающего через нелинейный элемент, определить коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

Ответ: f = 0 Гц, I_0 = 8.8 мА,

$f_0 = 3 \cdot 10^3$ Гц, I_1 = 15.4 мА,

$2f_0 = 6 \cdot 10^3$ Гц, I_2 = 10.8 мА, $K_{ни}$ = 0.7.

Задача 2.3и. ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована двумя отрезками прямых:

$$i = (m + 2)(u - n) \text{ мА, при } u \geq n;$$
$$i = 0 \text{ при } u < n.$$

К нелинейному элементу приложено напряжение:

$$u(t) = m + cos 2\pi 10^4\, t,$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать амплитуды гармоник тока I_k (k = 0,1,2,3) , протекающего через нелинейный элемент, определить коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

Задача 2.4. ВАХ нелинейного элемента задана своими значениями:

i_1 = 3 мА, i_2 = 2мА, i_3 = 1мА,

u_1 = 1В, u_2 = 2В, u_3 = 3В.

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать методом трех ординат амплитуды и частоты гармоник тока и вычислить коэффициент нелинейных искажений, если входной гармонический сигнал имеет частоту f_0 = 1мГц. Построить спектр тока.

Решение

ВАХ нелинейного элемента построим по точкам. ВАХ представлена на рис. 2.4.

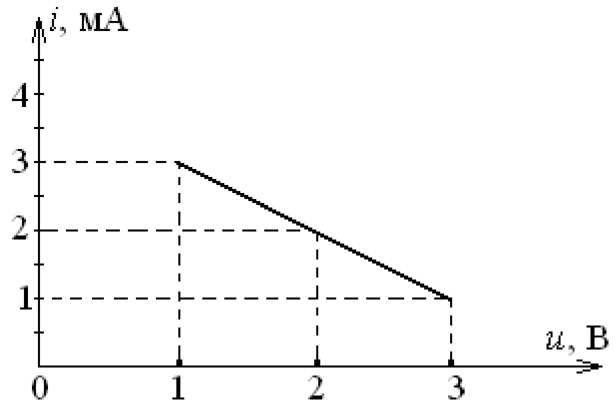

Рис. 2.4. ВАХ нелинейного элемента

Метод трех ординат позволяет вычислить только амплитуды постоянной составляющей и первых двух гармоник:

$I_0 = 0{,}25\,(i_1+2i_2+i_3) = 2$мА, $f = 0$; $I_1 = 0{,}5\,(i_1 - i_3) = 1$мА, $f_1 = 1$мГц;

$I_2 = 0{,}25\,(i_1 - 2i_2 + i_3) = 0$, $f_2 = 2$мГц;

$$K_{ни} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}{I_1} = 0$$

Спектр тока представлен на рис. 2.5.

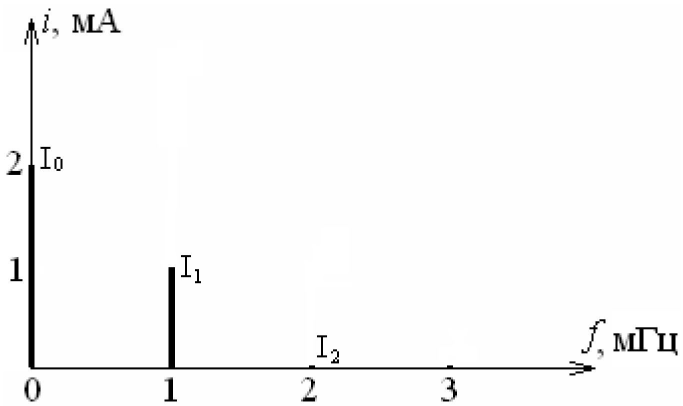

Рис. 2.5. Спектр тока

Задача 2.5. ВАХ нелинейного элемента задана своими значениями:

$$i_1 = 4 \text{ мА},\ i_2 = 1{,}5\text{мА},\ i_3 = 0,$$
$$u_1 = 0\text{В},\quad u_2 = 2\text{В},\quad u_3 = 4\text{В}.$$

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать методом трех ординат амплитуды и частоты гармоник тока и вычислить коэффициент нелинейных искажений, если входной гармонический сигнал имеет частоту $f_0 = 100$ Гц. Построить спектр тока.

Ответ: $f = 0$ Гц, $I_0 = 1.375$ мА;
$f_0 = 100$ Гц, $I_1 = 2$ мА;
$2f_0 = 200$ Гц, $I_2 = 0.25$ мА; $K_{ни} = 0{,}125$.

Задача 2.6. ВАХ нелинейного элемента задана своими значениями:

$$i_1 = 10 \text{ мА},\ i_2 = 4 \text{ мА},\ i_3 = 2 \text{ мА},$$
$$u_1 = 10 \text{ В},\quad u_2 = 20 \text{ В},\quad u_3 = 30 \text{ В}.$$

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать методом трех ординат амплитуды и частоты гармоник тока и вычислить коэффициент нелинейных искажений, если входной гармонический сигнал имеет частоту $f_0 = 200$ Гц. Построить спектр тока.

Ответ: $f = 0$ Гц, $I_0 = 4$ мА;
$f_0 = 200$ Гц, $I_1 = 4$ мА;
$2f_0 = 400$ Гц, $I_2 = 1$ мА; $K_{ни} = 0{,}25$.

Задача 2.6и. ВАХ нелинейного элемента задана своими значениями:

$$i_1 = m \text{ мА},\ i_2 = (m + 5) \text{ мА},\ i_3 = (m + 2) \text{ мА},$$
$$u_1 = n \text{ В},\quad u_2 = (n + 3) \text{ В},\quad u_3 = (n + 1) \text{ В}.$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Построить ВАХ нелинейного элемента, рассчитать методом трех ординат амплитуды и частоты гармоник тока и вычислить коэффициент нелинейных искажений, если входной гармонический сигнал имеет частоту $f_0=(n+8)$ кГц, построить спектр тока.

Задача 2.7. ВАХ нелинейного элемента задана полиномом:

$$i = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3,$$

где $a_0 = 32$ мА, $a_1 = 4$ мА/В, $a_2 = 0{,}125$ мА/В^2, $a_3 = 1$ мА/В^3.

Входное напряжение равно:

$$u(t) = U_m \cos 2\pi f_0 t,\ \text{где } U_m = 5 \text{ В},\ f_0 = 10^3 \text{ Гц}.$$

Рассчитать и построить спектр выходного тока и найти коэффициент нелинейных искажений.

Решение

ВАХ нелинейного элемента в данном случае принимает вид:
$i = 32 + 4u + 0.125u^2 + u^3$, а входное напряжение $u(\text{t}) = 5 \cos 2\pi 10^3\, t$.

Подставляя входное напряжение в полином, и выражая степени косинусов через косинусы кратных аргументов, получаем:

$$i = 32 + 4\cdot 5\cdot cos2\pi 10^3 t + 25\cdot 0.5\cdot 0,125(1 + cos4\pi 10^3 t) +$$
$$+ 125\cdot 0,25\,(3cos2\pi 10^3 t + cos6\pi 10^3 t).$$

Приводя подобные члены, получаем следующие значения амплитуд гармоник тока (рис. 2.6):

$I_0 = a_0 + 0.5a_2 U_m^2 = 33,6$ мА.

$f_0 = 10^3$ Гц, $I_1 = a_1 U_m + 0.75\, a_3 U_m^3 = 113,75$ мА.

$2f_0 = 2\cdot 10^3$ Гц, $I_2 = 0.5a_2 U_m^2 = 1,56$ мА.

$3f_0 = 3\cdot 10^3$ Гц, $I_3 = 0.25a_3 U_m^3 = 31,25$ мА. $K_{ни} = 0,28$.

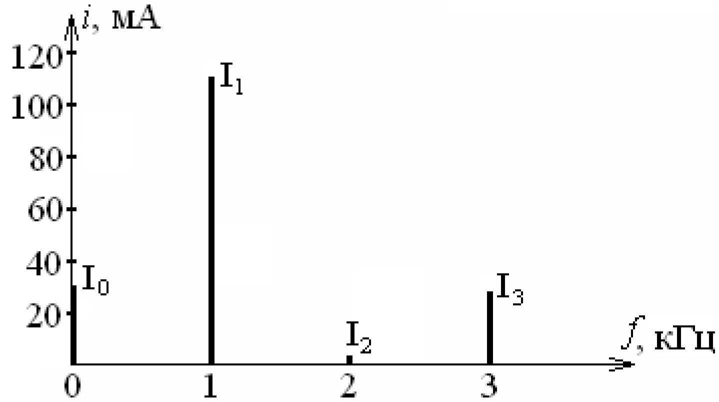

Рис. 2.6. Спектр тока

Задача 2.8. ВАХ нелинейного элемента задана полиномом:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3,$$

где $a_0 = 20$ мА, $a_1 = 4$ мА/В, $a_2 = 0$, $a_3 = -0,1$ мА/В^3.

Входное напряжение равно:

$$u(t) = U_m\, cos2\pi f_0 t,$$

где $U_m = 6$ В, $f_0 = 2\cdot 10^3$ Гц.

Рассчитать спектр выходного тока и найти коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

Ответ: $f = 0$ Гц, $I_0 = 20$ мА, $f_0 = 2\cdot 10^3$ Гц, $I_1 = 7,8$ мА, $2f_0 = 4\cdot 10^3$ Гц, $I_2 = 0$ мА, $3f_0 = 6\cdot 10^3$ Гц, $I_3 = 5,4$ мА, $K_{ни} = 0,69$.

Задача 2.9. ВАХ нелинейного элемента задана полиномом:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3,$$

где $a_0 = 28$ мА, $a_1 = 10$ мА/В, $a_2 = 1$ мА/В^2.

Входное напряжение равно:

$$u(t) = U_m\, cos2\pi f_0 t,$$

где $U_m = 2$ В, $f_0 = 5\cdot 10^4$ Гц.

Рассчитать спектр выходного тока и найти коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

Ответ: $f = 0$ Гц, $I_0 = 30$ мА,

$f_0 = 5\cdot 10^4$ Гц, $I_1 = 20$ мА,

$2f_0 = 10\cdot 10^4$ Гц, $I_2 = 2$ мА, $K_{ни} = 0.1$.

Задача 2.9и. ВАХ нелинейного элемента задана полиномом:

$$i = m + nu + (m + 1)u^2 + (n + 1)u^3,$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Входное напряжение равно:

$$u(t) = U_m \cos 2\pi f_0 t.$$

где $U_m = 2m$ В, $f_0 = (n + 2) \cdot 10^3$ Гц.

Рассчитать спектр выходного тока и найти коэффициент нелинейных искажений, построить спектр тока.

III. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

Задача 3.1. Сигнал АМ записан в следующем виде:

$$u(t) = 10\, cos 2\pi 10^4 t + 5\, cos 2\pi 10^3 t \cdot cos 2\pi 10^4 t,$$

Определить коэффициент глубины амплитудной модуляции (АМ), модулирующую и несущую частоты, ширину спектра АМ, построить спектр АМ.

Решение

Приведем выражение для АМ сигнала к стандартному виду:

$$u(t) = 10\,(1+ 0{,}5\, cos 2\pi 10^3 t) \cdot cos 2\pi 10^4 t.$$

Из этой формулы следует, что несущая частота равна $f_0 = 10^4$ Гц, модулирующая частота равна $F = 10^3$ Гц, коэффициент глубины модуляции равен $M_a = 0{,}5$, ширина спектра сигнала АМ равна удвоенной модулирующей частоте $П = 2F = 2 \cdot 10^3$ Гц.

Спектр АМ сигнала приведен на рис. 3.1 и содержит три частоты: несущую $f_0 = 10^4$ Гц с амплитудой $U_m = 10$ В, нижнюю боковую и верхнюю боковую частоты с амплитудами $0{,}5 M_a \cdot U_m = 2{,}5$ В и частотами 9 кГц и 11 кГц.

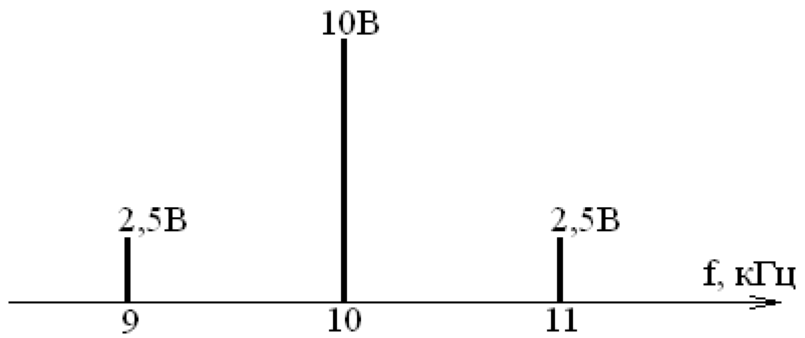

Рис. 3.1. Спектр АМ - сигнала

Задача 3.2. Сигнал АМ записан в следующем виде:

$$u(t) = 8\, cos 2\pi 10^5 t + 2\, cos 2\pi (10^5 + 10^4) t + 2\, cos 2\pi (10^5 - 10^4) t.$$

Определить коэффициент глубины АМ, модулирующую и несущую частоты, ширину спектра АМ, построить спектр АМ.

ОТВЕТ: $M_a = 0{,}5$, $U_m = 8$ В, $f_0 = 10^5$ Гц, $F = 10^4$ Гц, $П = 2F = 2 \cdot 10^4$ Гц.

Задача 3.3. Сигнал АМ записан в следующем виде:

$$u(t) = 16\, cos 2\pi 10^5 t + 2\, cos 2\pi (10^5 + 10^4) t + 2\, cos 2\pi (10^5 - 10^4) t +$$
$$+ cos 2\pi (10^5 + 2 \cdot 10^4) t + cos 2\pi (10^5 - 2 \cdot 10^4) t.$$

Определить коэффициент глубины АМ для каждой из модулирующих частот, модулирующие и несущую частоты, ширину спектра АМ, построить спектр АМ.

ОТВЕТ: Модулирующих частот - две: $F_1 = 10^4$ Гц, $M'_a = 0{,}25$, $F_2 = 2 \cdot 10^4$ Гц, $M''_a = 0{,}125$, амплитуда несущей $U_m = 16$ В, $f_0 = 10^5$ Гц, $П = 2F_2 = 4 \cdot 10^4$ Гц. Спектр содержит несущую частоту, две нижние боковые и две верхние боковые частоты.

Задача 3.3и. Сигнал АМ записан в следующем виде:

$$u(t) = (n + 8)\, cos 2\pi 10^5 t + 2\, cos 2\pi [10^5 + (m + 1)10^3]t\ +$$
$$+2\, cos 2\pi [10^5 - (m + 1)10^3]t.$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить коэффициент глубины АМ, модулирующую и несущую частоты, ширину спектра АМ, построить спектр АМ.

Задача 3.4. Осциллограмма АМ-сигнала имеет максимальный размах колебаний $U_{max} = 6$ В, а минимальный $U_{min} = 2$ В; период высокочастотного заполнения 10^{-4} с, период повторения огибающей 10^{-3} с, определить параметры АМ-сигнала: несущую частоту f_0, модулирующую частоту F, среднюю амплитуду АМ-сигнала U_m, глубину модуляции M_a. Построить спектр сигнала.

Решение

Частота несущей обратно пропорциональна периоду высокочастотного заполнения 10^{-4} с:

$$f_0 = 1/10^{-4} = 10^4 \text{ Гц}.$$

Частота модулирующего сигнала обратно пропорциональна периоду повторения огибающей:

$$F = 1/10^{-3} = 10^3 \text{ Гц}.$$

Средняя амплитуда АМ-сигнала:

$$U_m = (U_{max} + U_{min})/2 = 4 \text{ В}.$$

Глубина модуляции:

$$M_a = (U_{max} - U_{min})/ (U_{max} + U_{min}) = 0{,}5.$$

Спектр АМ-сигнала представлен на рис. 3.2 и содержит три частоты:
несущую частоту $f_0 = 10^4$ Гц с амплитудой $U_m = 4$ В;
нижнюю боковую частоту 9 кГц с амплитудой $0.5 \cdot M_a \cdot U_m = 1$В;
верхнюю боковую частоту 11 кГц с амплитудой $0.5 \cdot M_a \cdot U_m = 1$В.

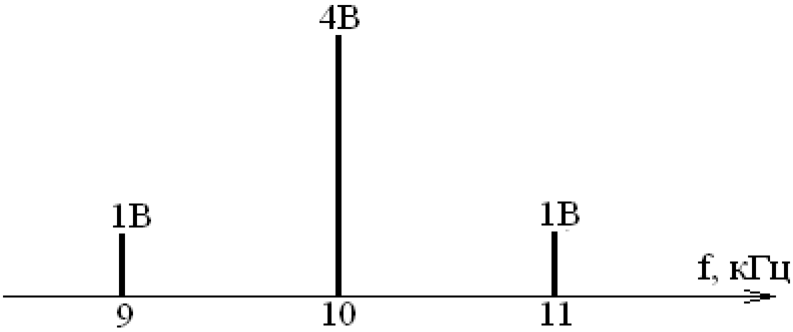

Рис. 3.2. Спектр АМ - сигнала

Задача 3.5. Осциллограмма АМ - сигнала имеет максимальный размах колебаний U_{max} = 10 В, а минимальный U_{min} = 0; период высокочастотного заполнения $5 \cdot 10^{-4}$ с, период повторения огибающей $2 \cdot 10^{-3}$ с, определить параметры АМ-сигнала: несущую частоту f_0, модулирующую частоту F, среднюю амплитуду АМ-сигнала U_m, глубину модуляции M_a. Построить спектр сигнала.

ОТВЕТ: f_0 = 2 кГц; F = 500 Гц; U_m = 5 В; M_a = 1.

Задача 3.6. Осциллограмма АМ-сигнала имеет максимальный размах колебаний U_{max} = 8 В, а минимальный U_{min} = 4 В; период высокочастотного заполнения 10^{-6} с, период повторения огибающей 10^{-4} с, определить параметры АМ-сигнала: несущую частоту f_0, модулирующую частоту F, среднюю амплитуду АМ-сигнала U_m, глубину модуляции M_a. Построить спектр сигнала.

ОТВЕТ: f_0 = 1 МГц; F = 10 кГц; U_m = 6 В; M_a = 0.3.

Задача 3.6и. Осциллограмма АМ-сигнала имеет максимальный размах колебаний U_{max} = (m + 12) В, а минимальный U_{min} = n В; период высокочастотного заполнения $(n + 1)10^{-6}$ с, период повторения огибающей $(m + 1)10^{-4}$ с, определить параметры АМ-сигнала: несущую частоту f_0, модулирующую частоту F, среднюю амплитуду АМ-сигнала U_m, глубину модуляции M_a. Построить спектр сигнала. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 3.7. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = cos\,(1500t + 2{,}5\,sin10t).$$

Определить амплитуду ЧМ сигнала U_m, максимальную ω_{max} и минимальную ω_{min} частоты ЧМ сигнала, несущую частоту ω_0, модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, девиацию частоты $\omega_д$, ширину спектра ЧМ сигнала $П_{чм}$.

Решение

Амплитуда ЧМ сигнала равна U_m = 1 В, частота несущей равна ω_0 = 1500 р/с, модулирующая частота равна Ω = 10 р/с, индекс ЧМ равен $M_ч$ = 2,5, девиация частоты равна произведению индекса на модулирующую частоту $\omega_д = \Omega M_ч$ = 25р/с, максимальная частота равна (1500 + 25) р/с, минимальная частота равна (1500 – 25) р/с, ширина спектра равна

$$П_{чм} = 2\Omega\,(M_ч + 1) = 70 \text{ р/с}.$$

Задача 3.8. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = 2{,}5\,cos\,(3000t + 0{,}1\,sin100t).$$

Определить амплитуду ЧМ сигнала U_m, максимальную ω_{max} и минимальную ω_{min} частоты ЧМ сигнала, несущую частоту ω_0, модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, девиацию частоты $\omega_д$, ширину спектра ЧМ сигнала $П_{чм}$.

ОТВЕТ: U_m = 2,5 В, ω_0 = 3000 р/с, Ω = 100 р/с, $M_ч$ = 0,1, $\omega_д$ = 10 р/с, ω_{max} = 3010 р/с, ω_{min} = 2990 р/с.

Задача 3.9. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = 6\, cos\, (9800t + 10\, sin 200t).$$

Определить амплитуду ЧМ сигнала U_m, максимальную ω_{max} и минимальную ω_{min} частоты ЧМ сигнала, несущую частоту ω_0, модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, девиацию частоты $\omega_д$, ширину спектра ЧМ сигнала $П_{чм}$.

ОТВЕТ: U_m = 6 В, ω_0 = 9800 р/с, Ω = 200 р/с, $M_ч$ = 10, $\omega_д$ = 2000 р/с, ω_{max} = 11800 р/с, ω_{min} = 7800 р/с.

Задача 3.9и. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = (n + 2)\, cos\, [(m + 1)10^5 t + (m + n + 0{,}1)\, sin 1000t].$$

Определить амплитуду ЧМ сигнала U_m, максимальную ω_{max} и минимальную ω_{min} частоты ЧМ сигнала, несущую частоту ω_0, модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, девиацию частоты $\omega_д$, ширину спектра ЧМ сигнала $П_{чм}$. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 3.10. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t)= 10\, cos\, (62800t + 2\, sin 6280t).$$

Определить несущую частоту f_0 , модулирующую частоту F, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, ширину спектра ЧМ сигнала $П_{чм}$, рассчитать амплитуду и частоту несущей и боковых частот в спектре ЧМ сигнала. Построить спектр.

Решение

Индекс ЧМ равен $M_ч$ = 2, модулирующая частота F = 1 кГц, ширина спектра ЧМ сигнала равна $П_{чм}$ = $2F$ ($M_ч$ + 1) = 6 кГц, несущая частота f_0 = 10 кГц.

Так как $M_ч$ + 1 = 3, то необходимо учесть в спектре несущую и по три боковых частоты сверху и снизу.

Разложив ЧМ сигнал в ряд Фурье, получим:

$$U(t) = U_m J_0(2) cos\omega_0 t - U_m J_1(2) cos(\omega_0 - \Omega)t + U_m J_1(2) cos(\omega_0 + \Omega)t +$$
$$+ U_m J_2(2) cos(\omega_0 - 2\Omega)t + U_m J_2(2) cos(\omega_0 + 2\Omega)t - U_m J_3(2) cos(\omega_0 - 3\Omega)t +$$
$$+ U_m J_3(2) cos(\omega_0 + 3\Omega)t + \ldots$$

где $J_к$ ($M_ч$) - функции Бесселя $к$-го порядка (рис.3.3).

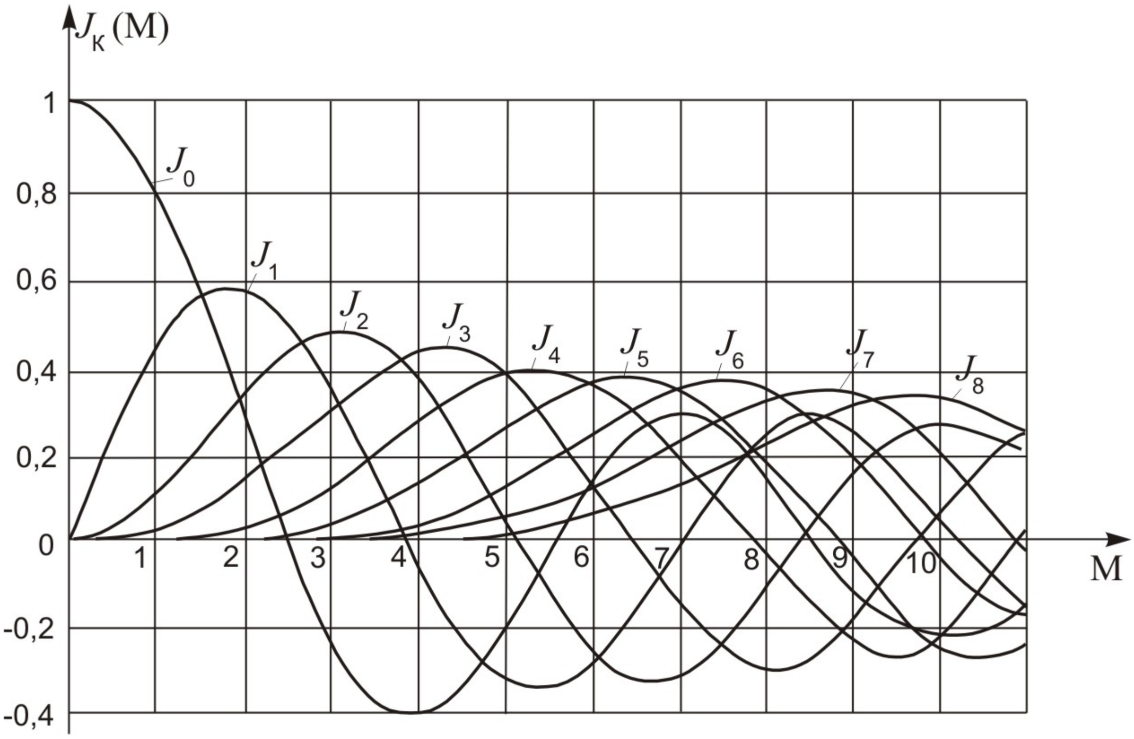

Рис. 3.3. Функции Бесселя

Из формулы следует, что спектр ЧМ сигнала - бесконечный, но, в данном случае, достаточно учесть только несущую и по три боковых сверху и снизу.

После расчетов, получаем:

несущая частота f_0 = 10 кГц имеет амплитуду $U_{m0} = 10J_0(2) = 2{,}9$;

боковые частоты имеют соответственно:

$f_0 - F$ = 9кГц амплитуду $U_{m1} = 10\ J_1(2) = 5{,}8$;

$f_0 + F$ = 11кГц амплитуду $U_{m1} = 10J_1(2) = 5{,}8$;

$f_0 - 2F$ = 8кГц амплитуду $U_{m2} = 10\ J_2(2) = 3{,}5$;

$f_0 + 2F$ = 12кГц амплитуду $U_{m2} = 10\ J_2(2) = 3{,}5$;

$f_0 - 3F$ = 7кГц амплитуду $U_{m3} = 10J_3(2) = 1{,}5$;

$f_0 + 3F$ = 13кГц амплитуду $U_{m3} = 10\ J_3(2) = 1{,}5$;

Спектр ЧМ - сигнала представлен на рис. 3.4.

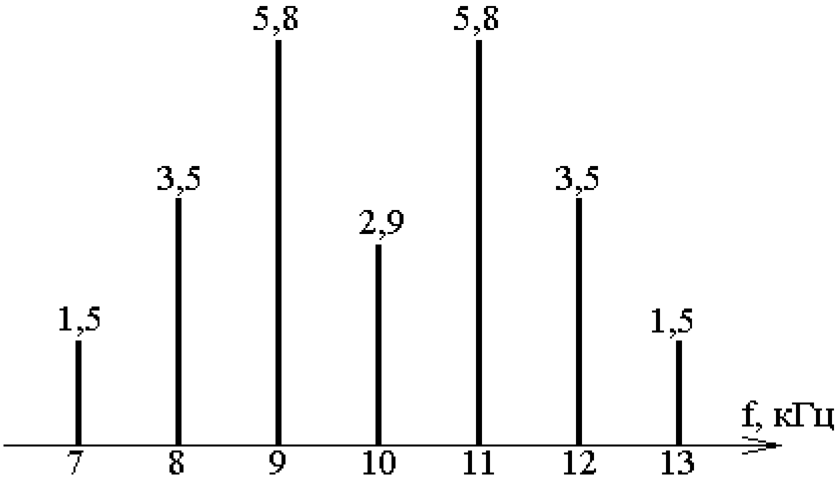

Рис. 3.4. Спектр ЧМ - сигнала

Задача 3.11. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = 5cos(1600t + 4sin100t).$$

Определить несущую частоту ω_0 , модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, ширину спектра ЧМ сигнала $\Pi_{чм}$, рассчитать амплитуду и частоту несущей и боковых частот в спектре ЧМ сигнала.

ОТВЕТ:

ω_0 = 1600р/с; Ω = 100р/с; $M_ч$ = 4; $\Pi_{чм}$ = 1000р/с; U_{m0} = 2;

Боковые частоты	амплитуды
1500р/с	0,4
1700р/с	0,4
1400р/с	2
1800р/с	2
1300р/с	2,25
1900р/с	2,25
1200р/с	1,5
2000р/с	1,5
1100р/с	0,7
2100р/с	0,7

Задача 3.12. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = 3cos(9000t + sin800t).$$

Определить несущую частоту ω_0 , модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, ширину спектра ЧМ сигнала $\Pi_{чм}$, рассчитать амплитуду и частоту несущей и боковых частот в спектре ЧМ сигнала.

ОТВЕТ:

ω_0 = 9000р/с; Ω = 800р/с; $M_ч$ = 1; $\Pi_{чм}$ = 3200р/с; U_{m0} = 2,4

боковые частоты	амплитуды
8200р/с	1,35
9800р/с	1,35
7400р/с	0,3
10600р/с	0,3

Задача 3.12и. Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал записан в виде:

$$u(t) = (m + 1)cos[(n + 2)1000t + m\ sin100t].$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить несущую частоту ω_0 , модулирующую частоту Ω, определить индекс частотной модуляции $M_ч$, ширину спектра ЧМ сигнала $\Pi_ч$, рассчитать амплитуду и частоту несущей и боковых частот в спектре ЧМ сигнала.

IV. ФОРМИРОВАНИЕ И ДЕТЕКТИРОВАНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Задача 4.1. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента амплитудного модулятора аппроксимирована степенным полиномом. На каком участке ВАХ и в каких пределах следует выбрать рабочую точку для получения неискаженной амплитудной модуляции? Рассчитать коэффициент глубины амплитудной модуляции по току.

Решение.

ВАХ нелинейного элемента при степенной аппроксимации имеет вид:

$$i = \varphi(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + ...$$

Подставляя в этот полином напряжение, равное сумме напряжения смещения и напряжения гармонического высокочастотного переносчика (несущей) $u(t) = E + U_m \cdot \cos\omega_0 t$, находим статическую модуляционную характеристику (СМХ) амплитудного модулятора по формуле:

$$I_1 = \psi_{AM}(E) = a_1 \cdot U_m + 2a_2 \cdot E \cdot U_m + 3a_3 \cdot U_m \cdot (E^2 + 0.25 \cdot U_m^2) + ...$$

Данная СМХ является нелинейной функцией от напряжения смещения.

По определению неискаженный режим работы модулятора соответствует линейной СМХ. Это достигается при выборе рабочей точки на квадратичном участке ВАХ, т.е. при условии, что a_1 и a_2 отличны от нуля, а все a_i при $i > 2$ равны нулю. Следовательно, неискаженный режим соответствует такому выбору рабочей точки E_0, чтобы СМХ имела вид:

$$I_1 = \psi_{AM}(E) = a_1 \cdot U_m + 2a_2 \cdot E \cdot U_m.$$

Так как амплитуда первой гармоники I_1 неотрицательна, то пределы изменения напряжения смещения при неискаженной АМ соответствуют следующему неравенству

$$E \geq -\frac{a_1}{2a_2}.$$

При моногармоническом сигнале напряжение смещения изменяется по закону:

$$E(t) = E_0 + U_\Omega \cdot \cos\Omega t,$$

где E_0 - напряжение смещения в рабочей точке, U_Ω , Ω - амплитуда и частота модулирующего сигнала, а амплитуда первой гармоники изменяется по закону

$$I_1(t) = a_1 U_m + 2a_2 U_m E_0 + 2a_2 U_m U_\Omega \cos\Omega t.$$

Определяя максимальное (Ωt = 0) и минимальное (Ωt = π) значения амплитуды первой гармоники, находим коэффициент глубины амплитудной модуляции

$$M_A = \frac{I_{1,\max} - I_{1,\min}}{I_{1,\max} + I_{1,\min}} = \frac{2a_2 U_\Omega}{a_1}(1 + \frac{2a_2 E_0}{a_1})^{-1}, \quad E_0 \geq U_\Omega - \frac{a_1}{2a_2} .$$

Задача 4.2. На вход амплитудного модулятора на биполярном транзисторе с общим эмиттером подводится напряжение «база-эмиттер»: $u_{БЭ}(t) = E + U_m \cos\omega_0 t$. Вольт-амперная характеристика транзистора аппроксимирована степенным полиномом:

$$i = \varphi(u) = 0{,}5 + 2 \cdot u + 0{,}8 \cdot u^2 + 0{,}2 \cdot u^3$$

Получить выражение для статической модуляционной характеристики модулятора используя метод кратных дуг.

ОТВЕТ: $I_1 = U_m(\ 2 + 0{,}15 U_m^2 + 1{,}6E + 0{,}6E^2)$.

Задача 4.3. На вход амплитудного модулятора на полевом транзисторе с общим истоком подводится напряжение «затвор-исток»:

$$u_{ЗИ}(t) = E + U_m \cos\omega_0 t .$$

Вольт-амперная характеристика транзистора аппроксимирована отрезками прямых:

$$i_c = \varphi(u_{ЗИ}) = \begin{cases} S(u_{ЗИ} - E_0), & u_{ЗИ} \geq E_0, \\ 0, & u_{ЗИ} < E_0, \end{cases}$$

где S - крутизна ВАХ, E_0 - напряжение отсечки.

Получить выражение для статической модуляционной характеристики модулятора используя метод угла отсечки.

ОТВЕТ: $I_1 = \dfrac{S \cdot U_m}{\pi}(\theta - \sin\theta \cdot \cos\theta), \quad \theta = \arccos(\dfrac{E_0 - E}{U_m})$, где θ – угол отсечки.

Задача 4.4. Для условий задачи 4.3. найти такие величины напряжения смещения E' и амплитуды первой гармоники в рабочей точке, при которых СМХ амплитудного модулятора имеет максимальную крутизну. Заданы параметры: S = 10 мА/В, U_m = 4 В, E_0 = - 4 В.

ОТВЕТ: E' = - 4 В; I_{10} = 20 мА.

Задача 4.4и. На вход амплитудного модулятора на транзисторе подводится напряжение: $u_{БЭ}(t) = E + U_m \cos\omega_0 t$. Вольт-амперная характеристика транзистора аппроксимирована степенным полиномом:

$$i = \varphi(u) = m + (n+1)\cdot u + (m+2)\cdot u^2 + 0{,}1(m+n+1)\cdot u^3 .$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Получить выражение для статической модуляционной характеристики модулятора используя метод кратных дуг.

Задача 4.5. Частотный модулятор собран по схеме, содержащей индуктивно-емкостной автогенератор, к емкости C_k контура которого параллельно подсоединен варикап с известной вольт-фарадовой характеристикой $C_в(u)$. Найти статическую модуляционную характеристику частотного модулятора.

Решение

Под СМХ частотного модулятора понимают зависимость эквивалентной частоты LC-контура от напряжения смещения на варикапе при нулевой амплитуде исходного сообщения.

Резонансная частота LC-контура (без подключения варикапа) определяется формулой Баркгаузена: $\omega_p = 1/\sqrt{L_k C_k}$. Так как варикап подключен параллельно емкости контура, то эквивалентная емкость LC-контура равна: $C_Э(u) = C_k + C_B(u)$. При этом эквивалентная частота LC-контура определяется соотношением:

$$\omega_Э(u) = 1/\sqrt{L_k C_Э(u)} = 1/\sqrt{L_k[C_k + C_B(u)]} .$$

Вынося за знак суммы величину C_k , и заменяя мгновенное напряжение на варикапе напряжением смещения, т.е. $u = E$, окончательно получаем выражение для СМХ ЧМ на варикапе:

$$\omega_Э(E) = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \frac{c_B(E)}{C_k}}} .$$

Задача 4.6. В частотном модуляторе, содержащем индуктивно-емкостной автогенератор, настроенный на резонансную частоту f_P = 5 МГц, параллельно емкости контура C_k = 10 пФ подсоединен варикап с вольт-фарадовой характеристикой $C_в(u) = 10/(1+u^2)$ пФ. Рассчитать и построить статическую модуляционную характеристику модулятора. Найти напряжение смещения, частоту переносчика и девиацию частоты в рабочей точке, если амплитуда модулирующего напряжения на варикапе равна 1 B.

ОТВЕТ: $f_Э = \psi_{ЧМ}(E) = f_p \cdot \sqrt{\frac{1+u^2}{2+u^2}}$; E_0 = 1 B; f_0 = 4.08 МГц; $f_д$ = 0,515 МГц.

Задача 4.6и. В частотном модуляторе, содержащем индуктивно-емкостной автогенератор, настроенный на резонансную частоту f_P =(n + 2) МГц, параллельно емкости контура C_k = (m + 8) пФ подсоединен варикап с вольт-фарадовой характеристикой $c_в(u) = 10/(1 + u^2)$ пФ.

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Рассчитать и построить статическую модуляционную характеристику модулятора. Найти напряжение смещения, частоту переносчика и девиацию частоты в рабочей точке, если амплитуда модулирующего напряжения на варикапе равна 1 В.

Задача 4.7. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента некогерентного детектора аппроксимирована степенным полиномом. Показать, что при такой ВАХ невозможно неискаженное детектирование сигнала АМ. Вычислить коэффициент нелинейных искажений детектора, если напряжение смещения равно нулю, а на его вход подан АМ сигнал вида:

$$s_{AM}(t) = U_m(1 + M_A \cos\Omega t)\cos\omega_0 t \ .$$

Решение

Подставляя в степенной полином

$$i = \varphi(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + ...$$

высокочастотный гармонический переносчик

$$u(t) = U_m \cdot \cos\omega_0 t$$

находим выражение для тока, протекающего через нелинейный элемент АД,

$$i(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k U_m^k \cos^k \omega_0 t, \quad i_0 = a_0 \ .$$

Выделяя постоянную составляющую тока и учитывая, что эта компонента определяется только четными степенями полинома, находим статическую характеристику детектирования (СХД) амплитудного детектора

$$I_d = \psi_{АД}(U_m) = I_0 - i_0 = \frac{1}{2}a_2 U_m^2 + \frac{3}{8}a_4 U_m^4 + ... = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} a_{2k} U_m^{2k} \ .$$

Из данного соотношения следует, что составляющей СХД, линейно зависящей от амплитуды переносчика U_m нет. Поэтому не может быть и неискаженного детектирования.

Подставляя в СХД закон изменения амплитуды сигнала АМ

$$U_m(t) = U_m(1 + m_{AM} \cos\Omega t) \ ,$$

находим закон изменения тока детектирования

$$I_d(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} a_{2k} U_m^{2k} (1 + m_{AM} \cos\Omega t)^{2k} \quad .$$

Для расчета коэффициента нелинейных искажений детектирования учтем только первый член этой суммы, который вносит в неё наибольший вес:

$$I_d(t) \approx \frac{a_2 U_m^2}{2}(1 + m_{AM} \cos\Omega t)^2 = I_0 + I_{1\Omega} \cos\Omega t + I_{2\Omega} \cos 2\Omega t \quad ,$$

где $I_0 = \dfrac{a_2 U_m^2}{2}(1 + \dfrac{m_{AM}^2}{2}), \quad I_{1\Omega} = a_2 U_m^2 m_{AM}, \quad I_{2\Omega} = \dfrac{a_2 (U_m m_{AM})^2}{4}$.

Отсюда искомый коэффициент нелинейных искажений АД определяется так

$$k_{НИ} > \frac{I_{2\Omega}}{I_{1\Omega}} = \frac{M_A}{4} \quad .$$

Задача 4.8. Показать, что статическая характеристика детектирования (СХД) некогерентного детектора, нелинейный элемент которого имеет вольт-амперную характеристику: $i = \varphi(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$, описывается выражением: $I_ð = \psi(U_m) = 0{,}5 a_2 U_m{}^2$, где U_m – амплитуда высокочастотного переносчика.

Задача 4.9. На вход некогерентного детектора воздействует сумма постоянного напряжения и АМ сигнал вида:

$$u(t) = -4 + 2(1 + 0{,}5 \sin 2\pi 10^3 t) \sin 2\pi 10^4 t \, .$$

Рассчитать спектр тока детектирования, если вольт-амперная характеристика нелинейного элемента детектора описывается выражением: $i = \varphi(u) = 16 + 10u + 1{,}5u^2$ при u > - 4 и i = 0 при u < - 4. Оценить коэффициент нелинейных искажений детектирования.

ОТВЕТ: $I_{ð0}$ = 27/8, $I_{ð1}$ = 3, $I_{ð2}$ = 3/8; $k_{НИ}$ = 1/8.

Задача 4.9и. На вход некогерентного детектора воздействует сумма постоянного напряжения и АМ сигнал вида: $u(t) = -m + 2(1 + 0{,}5 \sin 2\pi 10^3 t) \sin 2\pi 10^4 t$. Рассчитать спектр тока детектирования, если вольт-амперная характеристика нелинейного элемента детектора описывается выражением: $i = \varphi(u) = n + (m+1)u + (n+1)u^2$. Оценить коэффициент нелинейных искажений детектирования. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 4.10. Структурная схема когерентного детектора (КД) состоит из перемножителя двух сигналов и фильтра нижних частот (ФНЧ). Найти отклик детектора при условии, что на его первый (основной) вход подается сигнал $s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, на второй (синхронизирующий) вход подводится сигнал $u_C(t) = U_C \cos(\omega_C t + \varphi_C)$, а амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) ФНЧ равна: $K_p(\omega) = K_0 / \sqrt{1 + (\omega / \omega_{ГР})^{2p}}$. Здесь K_0 – постоянная, p – порядок ФНЧ, $\omega_{ГР}$ - его граничная частота.

Решение

Вначале находим сигнал на выходе перемножителя

$$u_П(t) = s(t) \cdot u_C(t) = U_m U_C \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \cos(\omega_C t + \varphi_C).$$

Используя формулу разложения произведения косинусов, приведем этот сигнал к виду

$$u_П(t) = 0{,}5 U_m U_C \{\cos[(\omega_0 - \omega_C)t + (\varphi_0 - \varphi_C)] + \cos[(\omega_0 + \omega_C)t + (\varphi_0 + \varphi_C)]\}$$

Данный сигнал содержит две составляющие: низкочастотную $u_{НЧ}(t,\Omega)$ на разностной частоте $\Omega = \omega_0 - \omega_C$ и высокочастотную $u_{ВЧ}(t,\omega)$ на суммарной частоте $\omega = \omega_0 + \omega_C$.

Если граничную частоту ФНЧ выбрать из условия: $\Omega << \omega_{ГР} << \omega_0$, то высокочастотная компонента сигнала $u_П(t)$ будет подавлена фильтром, а на его выходе будет наблюдаться сигнал пропорциональный низкочастотной компоненте. Поэтому отклик КД определяется следующим соотношением

$$u_{КД}(t) \approx K_p(\Omega) \cdot u_{НЧ}(t,\Omega) = \frac{K_0 U_m U_C \cos[\Omega t + (\varphi_0 - \varphi_C)]}{2\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_{ГР}}\right)^{2з}}}, \quad \Omega = \omega_0 - \omega_C.$$

Задача 4.11. В схеме когерентного детектора: $K_0 = 1$, $U_С = 2$, $\omega_0 = \omega_С$, $\varphi_0 = \varphi_С$. Получить выражение для напряжения на выходе детектора при подаче на его вход сигнала АМ.

ОТВЕТ: $u_{КД}(t) = U_m[1 + M_A \cdot \alpha(t)]$, где $\alpha(t) = a(t)/a_{max}$ – нормированное сообщение.

Задача 4.12. В схеме когерентного детектора: $K_0 = 1$, $U_C = 2$, $U_m = 1$, $\varphi_0 = \varphi_С$, $f_{ГР} = 2$ кГц, $f_0 = 100$ кГц. Рассчитать и построить амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) детектора, если порядок ФНЧ равен 2.

ОТВЕТ: $K_{КД}(f_C) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (0.5 \cdot f_C - 50)^4}}$, где f_C в кГц.

Задача 4.12и. В схеме когерентного детектора: $K_0 = 1$, $U_С = (n + 4)$, $\omega_0 = \omega_С$, $\varphi_0 = \varphi_С$. Получить выражение для напряжения на выходе детектора при подаче на его вход сигнала АМ. (n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 4.13. Показать, что статическая характеристика детектирования некогерентного детектора, нелинейный элемент которого имеет вольт-амперную характеристику: $i = \varphi(u) = \begin{cases} S(u - E_0), & u \ge E_0, \\ 0, & u < E_0. \end{cases}$ - описывается выражением: $I_{\partial} = \psi(U_m) = SU_m(\sin\theta - \theta\cos\theta)/\pi$, где U_m – амплитуда высокочастотного переносчика, θ - угол отсечки.

Задача 4.14. Для условий задачи 4.13 рассчитать и построить спектр тока детектирования, если входное напряжение детектора равно: $u(t) = E_0 + (1 + 0{,}8\cos 2\pi 10^3 t)\sin 2\pi 10^4 t$, а $S = \pi$. Чему равен коэффициент нелинейных искажений детектирования?

ОТВЕТ: $I_{\partial 0} = 1$, $I_{\partial 1} = 0.8$; $k_{НИ} = 0$.

Задача 4.15. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:

- напряжение отсечки $U_н$ = 0,6 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 12 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,6 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,4 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,1 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Решение

Определяем величину смещения на базе транзистора в линейном режиме:

$$U_{0\max} = U_0 + U_{mn} = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7 \text{ В};$$
$$U_{0\min} = U_0 - U_{m\Omega} = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5 \text{ В}.$$

Находим значения углов отсечки при этих данных:

$$\Theta_{\max} = \arccos\frac{U_н - U_{0\max}}{U_{mn}} = \arccos\left(-\frac{U_{m\Omega}}{U_{mn}}\right) = \arccos(-0{,}25) = 105^o;$$

$$\Theta_{\min} = \arccos\frac{U_н - U_{0\min}}{U_{mn}} = \arccos\frac{U_{m\Omega}}{U_{mn}} = \arccos(0{,}25) = 75^o.$$

По найденным углам отсечки находим значения коэффициентов Берга (по таблице 4.1):

$$\gamma_1(\theta_{\max}) = 0{,}662; \qquad \gamma_1(\theta_{\min}) = 0{,}337.$$

Находим значения тока коллектора $I_{к1}$ по формуле:

$$I_{к1} = S \cdot U_{mn} \cdot \gamma_1(\theta).$$

Подставляя значения, получаем:

$$I_{к1\max} = S \cdot U_{mn} \cdot \gamma_1(\theta_{\max}) = 12 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}662 = 3{,}18 \text{ мА};$$

$$I_{к1\min} = S \cdot U_{mn} \cdot \gamma_1(\theta_{\min}) = 12 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}337 = 1{,}62 \text{ мА}.$$

Таблица 4.1. Коэффициенты Берга

Θ	**γ_0**	**γ_1**	**γ_2**	**$10\gamma_3$**	**$10\gamma_4$**
5	0.0001	0.0001	0.0001	0.0014	0.0014
10	0.0006	0.0011	0.0011	0.0109	0.0107
15	0.0019	0.0037	0.0037	0.0355	0.0388
20	0.0045	0.0088	0.0085	0.0798	0.0730
25	0.0086	0.0170	0.0160	0.1452	0.1259
30	0.0148	0.0288	0.0265	0.2297	0.1857
35	0.0233	0.0655	0.0400	0.3280	0.2423
40	0.0344	0.0449	0.0563	0.4317	0.2841
45	0.0483	0.0908	0.0750	0.5305	0.3001
50	0.0653	0.1210	0.0954	0.6132	0.2822
55	0.0855	0.1560	0.1166	0.6690	0.2272
60	0.1040	0.1955	0.1378	0.6892	0.1378
65	0.1358	0.2392	0.1580	0.6676	0.0226
70	0.1661	0.2865	0.1761	0.6022	-0.1050
75	0.1996	0.3371	0.1912	0.4950	-0.2288
80	0.2363	0.3900	0.2027	0.3519	-0.3320
85	0.2759	0.4446	0.2098	0.1828	-0.4005
90	0.3183	0.5000	0.2122	0.0000	-0.4244
95	0.3631	0.5554	0.2098	-0.1828	-0.4005
100	0.4099	0.6099	0.2027	-0.3519	-0.3320
105	0.4584	0.6620	0.1912	-0.4950	-0.2288
110	0.5081	0.7134	0.1761	-0.6022	-0.1050
115	0.5585	0.7508	0.1580	-0.6876	0.0226
120	0.6089	0.8045	0.1378	-0.6892	0.1378
125	0.6591	0.8440	0.1166	-0.6690	0.2272
130	0.7082	0.8789	0.0954	-0.6132	0.2822
135	0.7554	0.9091	0.0750	-0.5305	0.3001
140	0.8004	0.9345	0.0563	-0.4317	0.2841
145	0.8425	0.9551	0.0400	-0.3280	0.2423
150	0.8808	0.9712	0.0265	-0.2297	0.1857
155	0.9149	0.9830	0.0160	-0.1452	0.1258
160	0.9441	0.9912	0.0085	-0.0793	0.0730
165	0.9678	0.9962	0.0037	-0.0355	0.0338
170	0.9854	0.9989	0.0011	-0.0109	0.0107
175	0.9963	0.9999	0.0001	-0.0014	0.0014
180	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Строим линейный участок СМХ (рис. 4.1):

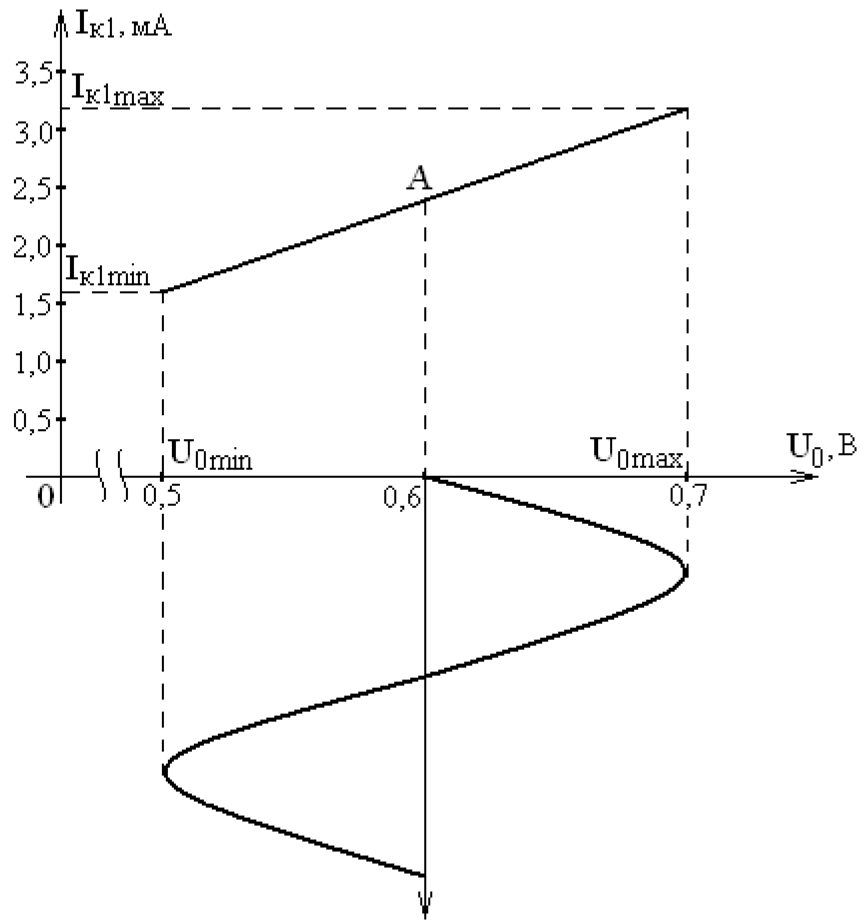

Рис. 4.1. Линейный участок СМХ транзистора

Выбираем рабочую точку (А) – на середине линейного участка.

Величину коэффициента амплитудной модуляции определим по формуле:

$$M_A = \frac{I_{\kappa 1\max} - I_{\kappa 1\min}}{I_{\kappa 1\max} + I_{\kappa 1\min}} = \frac{1{,}56}{4{,}8} = 0{,}32.$$

Суммарную среднюю мощность модулированного сигнала определим по формуле:

$$P_{cp} = P_н \cdot \left(1 + \frac{M_A^2}{2}\right) = \frac{U_{mn}^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{M_A^2}{2}\right) = \frac{0{,}4^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{0{,}32^2}{2}\right) = 0{,}084 \text{ Вт.}$$

Задача 4.16. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:

- напряжение отсечки $U_н$ = 0,9 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 15 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,9 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,3 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,1 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Задача 4.17. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:
- напряжение отсечки $U_н$ = 0,8 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 15 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,8 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,4 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,1 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Задача 4.18. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:
- напряжение отсечки $U_н$ = 0,5 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 14 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,5 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,4 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,2 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Задача 4.19. Амплитудный модулятор собран на транзисторе КТ301, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:
- напряжение отсечки $U_н$ = 0,6 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 12 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,6 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,4 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,1 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A).

Задача 4.20. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:

- напряжение отсечки $U_н$ = 0,4 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 14 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,4 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,3 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,1 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Задача 4.21. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:

- напряжение отсечки $U_н$ = 0,7 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 12 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,7 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,4 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,1 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Задача 4.22. Амплитудный модулятор собран на транзисторе, работающем в режиме с отсечкой тока. Рассчитайте и постройте статическую модуляционную характеристику (СМХ) при следующих исходных данных:

- напряжение отсечки $U_н$ = 0,8 В;
- крутизна ВАХ транзистора S = 10 мА/В;
- начальное смещение на базу транзистора U_0 = 0,8 В;
- амплитуда несущего ВЧ – колебания U_{mn} = 0,6 В;
- амплитуда модулирующего НЧ – колебания $U_{m\Omega}$ = 0,2 В.

По данным расчета СМХ определить величину коэффициента амплитудной модуляции (M_A) и суммарную среднюю мощность ($P_{ср}$) модулированного сигнала.

Задача 4.23. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:

- коэффициент детектирования $K_д$ = 0,87;
- коэффициент амплитудной модуляции M_A =0,63;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала U_{mn} = 20 В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода S = 10 мА/В.

Решение

Определяем пределы изменения амплитуды входного напряжения детектора:

$$(U_{m\text{вх}})_{max} = U_{mn}\cdot(1 + M_A) = 20\cdot(1 + 0{,}63) = 32{,}6 \text{ В};$$
$$(U_{m\text{вх}})_{min} = U_{mn}\cdot(1 - M_A) = 20\cdot(1 - 0{,}63) = 7{,}4 \text{ В};$$

По найденным значениям входного напряжения определим пределы изменения выходного напряжения

$$U^{I}_{\text{вых}} = K_\partial\cdot(U_{m\text{вх}})_{max} = 0{,}87\cdot 32{,}6 = 28{,}36 \text{ В};$$
$$U^{II}_{\text{вых}} = K_\partial\cdot(U_{m\text{вх}})_{min} = 0{,}87\cdot 7{,}4 = 6{,}44 \text{ В};$$

Строим характеристику детектирования (линейный участок):

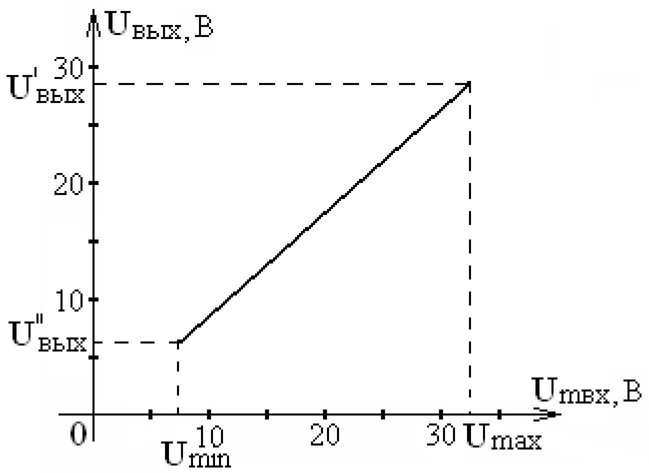

Рис. 4.2 Характеристика детектирования диода

Находим величину угла отсечки по формуле

$$\Theta = arccos\, K_\partial = arccos\; 0{,}87 = 29^{o}.$$

Определяем величину сопротивления нагрузки детектора по формуле:

$$tg\Theta - \Theta = \frac{\pi}{S\cdot R_н},$$

отсюда находим

$$R_н = \frac{\pi}{S\cdot(tg\Theta - \Theta)} = \frac{3{,}14}{10\cdot(tg0{,}5 - 0{,}5)} = 6{,}7 \text{ кОм}$$

(угол Θ в радианах).

Задача 4.24. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:

- коэффициент детектирования $K_\partial = 0{,}8$;
- коэффициент амплитудной модуляции $M_A = 0{,}72$;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала $U_{mn} = 10$ В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода $S = 12$ мА/В.

Задача 4.25. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:

- коэффициент детектирования $K_\partial = 0{,}9$;

- коэффициент амплитудной модуляции M_A =0,72;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала U_{mn} = 20 В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода S = 15 мА/В.

Задача 4.26. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:
- коэффициент детектирования $K_д$ = 0,93;
- коэффициент амплитудной модуляции M_A =0,8;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала U_{mn} = 15 В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода S = 19 мА/В.

Задача 4.27. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:
- коэффициент детектирования $K_д$ = 0,93;
- коэффициент амплитудной модуляции M_A =0,63;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала U_{mn} = 15 В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода S = 14 мА/В.

Задача 4.28. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:
- коэффициент детектирования $K_д$ = 0,96;
- коэффициент амплитудной модуляции M_A =0,72;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала U_{mn} = 18 В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода S = 18 мА/В.

Задача 4.29. Рассчитайте и постройте характеристику диодного детектора АМ – сигнала при следующих исходных данных:
- коэффициент детектирования $K_д$ = 0,93;
- коэффициент амплитудной модуляции M_A =0,67;
- амплитуда несущего ВЧ – сигнала U_{mn} = 20 В.

По исходным данным определите величину сопротивления нагрузки $R_н$ детектора при заданном значении крутизны ВАХ диода S = 14 мА/В.

V. ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ (ФПВ), ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ (ФРВ), ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Задача 5.1 Случайный процесс характеризуется ФПВ вида:

$$W(x) = Ax \text{ при } 0 < x < B.$$

Найти взаимосвязь между числами A и B, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса.

Решение

Запишем условия нормировки ФПВ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1; \qquad \int_{0}^{B} Ax\, dx = \frac{Ax^2}{2}\Big|_0^B = \frac{AB^2}{2} = 1.$$

Это соотношение связывает A и B.

Начальные моменты распределения случайного процесса равны:

$$m_n = \int_0^B x^n W(x)dx = \int_0^B x^n Axdx = \frac{AB^{n+2}}{n+2}$$

Отсюда получаем, что момент первого порядка, т.е. среднее значение равняется $m_1 = 2B/3$, момент второго порядка $m_2 = B^2/2$.

Дисперсия случайного процесса равна:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = B^2/2 - 4B^2/9 = B^2/18.$$

Задача 5.2. Случайный процесс характеризуется ФПВ вида:

$$W(x) = 2x \text{ при } 0 < x < B.$$

Определить B, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса.

ОТВЕТ: $B = 1$; $m_1 = 2/3$; $m_2 = 1/2$; $\sigma^2 = 1/18$.

Задача 5.3. Случайный процесс характеризуется ФПВ вида:

$$W(x) = h \text{ при } 0 < x < 2.$$

Определить h, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса.

ОТВЕТ: $h = 0.5$; $m_1 = 1$; $m_2 = 4/3$; $\sigma^2 = 1/3$.

Задача 5.3и. Случайный процесс характеризуется ФПВ вида:

$$W(x) = (nx + m + 1) \text{ при } 0 < x < B.$$

Определить *B*, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса, рассчитать ФРВ процесса. (*m* – предпоследняя цифра, *n* – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 5.4. В системе связи передается двоичный сигнал: 1 или 0.

На вход приемника поступает сигнал, пораженный нормальным шумом. Нормальный шум имеет среднее значение равное 0 при передаче 0 и среднее значение равное 1В при передаче 1.

Приемник принимает решение, что передавался 0, если процесс на входе приемника меньше 0,5В; приемник принимает решение, что передавалась 1, если процесс на входе приемника больше 0,5В,

Определить среднюю вероятность ошибки, если вероятность передачи 1 равна $p(1)$=0,6; а дисперсия шума равна σ^2 =0,25 В^2.

Решение

Пусть передавался 0, тогда ФПВ процесса $z(t)$ на входе приемника есть нормальное, гауссовское распределение с нулевым средним и заданной дисперсией:

$$W(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{0{,}5}}$$

$$p(1/0) = \int_{0{,}5}^{\infty} \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{0{,}5}} \quad dz = 1 - F(\frac{0{,}5}{\sigma}) = 1 - F(1)$$

Вероятность приема 1 при передаче 0 есть вероятность того, что z > 0,5:

где $F(z)$ - табулированная функция, интеграл вероятности.

Значение функции $F(z)$ находится с использованием таблицы 5.1 по формуле $F(z) = \Phi(z) + 0{,}5$.

Пусть передавали 1, тогда процесс z на входе приемника имеет нормальное распределение со средним значением равным 1В:

$$W(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-1)^2}{0{,}5}}$$

Вероятность приема 0 при передаче 1 есть вероятность того, что z для рассматриваемого случая меньше 0,5:

$$p(0/1) = \int_{-\infty}^{0{,}5} \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-1)^2}{0{,}5}} dz = F\left(\frac{0{,}5-1}{\sigma}\right) = F(-1) = 1 - F(1).$$

где $F(-1) = 1 - F(1) = 1 - 0,84 = 0,16$.

Средняя вероятность ошибки равна:

$$p = p(0) \cdot p(1/0) + p(1) \cdot p(0/1) = p(0) \cdot [1- F(1)] + p(1) \cdot [1- F(1)] =$$
$$= 0,4 \cdot 0,16 + 0,6 \cdot 0,16 = 0,16.$$

Таблица 5.1. Значения интегральной функции Лапласа

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,0	0,00000	1,4	0,41924	2,8	0,49744
0,1	0,03983	1,5	0,43319	2,9	0,49813
0,2	0,7926	1,6	0,44520	3,0	0,49865
0,3	0,11791	1,7	0,45543	3,1	0,49903
0,4	0,15542	1,8	0,46407	3,2	0,49931
0,5	0,19146	1,9	0,47128	3,3	0,49952
0,6	0,22575	2,0	0,47725	3,4	0,49966
0,7	0,25804	2,1	0,48214	3,5	0,49977
0,8	0,28814	2,2	0,48610	3,6	0,49984
0,9	0,31594	2,3	0,48928	3,7	0,49989
1,0	0,34134	2,4	0,49180	3,8	0,49993
1,1	0,36433	2,5	0,49379	3,9	0,49995
1,2	0,38493	2,6	0,49534	4,0	0,499968
1,3	0,40320	2,7	0,49653	4,5	0,499999

Задача 5.5. В системе связи передается двоичный сигнал: 1 или 0.

На вход приемника поступает сигнал, пораженный нормальным шумом. Нормальный шум имеет среднее значение равное 0 при передаче 0 и среднее значение равное 0,5В при передаче 1.

Приемник принимает решение, что передавался 0, если процесс на входе приемника меньше 0,25В; приемник принимает решение, что передавалась 1, если процесс на входе приемника больше 0,25 В,

Определить среднюю вероятность ошибки, если вероятность передачи 1 равна $p(1) = 0,5$; а дисперсия шума равна $\sigma^2 = 0,0625$ В^2.

ОТВЕТ: $p = 0,16$.

Задача 5.5и. В системе связи передается двоичный сигнал: 1 или 0.

На вход приемника поступает сигнал, пораженный нормальным шумом. Нормальный шум имеет среднее значение равное 0 при передаче 0 и среднее значение равное $(n + 1)$ при передаче 1.

Приемник принимает решение, что передавался 0, если процесс на входе приемника меньше $(n + 1)/2$; приемник принимает решение, что передавалась 1, если процесс на входе приемника больше $(n + 1)/2$. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить среднюю вероятность ошибки, если вероятность передачи 1 равна $p(1) = 0,5$; а дисперсия шума равна $\sigma^2 = 4$.

Задача 5.6. Эргодический случайный процесс принимает значение a с вероятностью $p(a) = 0{,}6$ и значение b с вероятностью $p(b) = 0{,}4$.

Определите и постройте ФПВ и ФРВ этого процесса, нарисуйте одну из возможных реализаций этого процесса.

Решение

Заданный случайный процесс принимает только два значения a и b.

Математически ФПВ такого процесса можно выразить с помощью дельта-функций:

$W(x) = 0{,}6\ \delta(x - a)$, $W(x) = 0{,}4\ \delta\ (x - b)$, $W(x) = 0$, при $x \neq a, x \neq b$.

На рис.5.1. показана ФПВ заданного процесса.

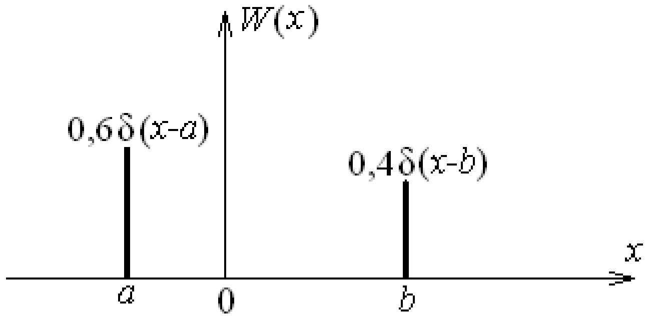

Рис. 5.1. График функции плотности вероятности

ФРВ есть интеграл от ФПВ в пределах от $-\infty$ до x. Если x меньше a, то, в соответствии с рисунком, ФПВ равна 0 и ФРВ тоже равна 0.

В точке $x = a$ ФПВ содержит дельта-функцию, т.е. $0{,}6\delta(x - a)$.

Выносим 0,6 за знак интеграла, а интеграл от дельта - функции равен 1. Т.о. интеграл от $0{,}6\delta\ (x - a)$ дает нам 0,6, т.е. в точке $x = a$ ФРВ скачком изменяется от 0 до 0,6 и сохраняет это значение до $x = b$.

В точке $x = b$ ФРВ скачком возрастает от 0,6 до 1 (см. рис.5.2).

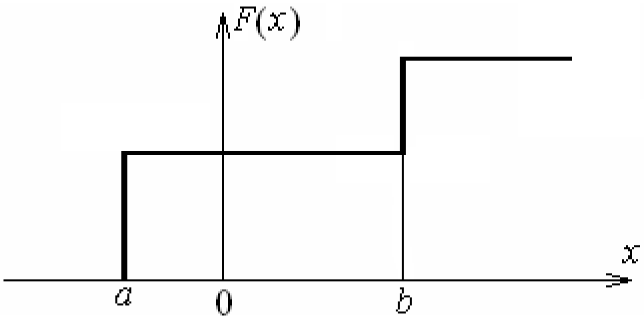

Рис. 5.2. График функции распределения вероятности

Одна из возможных реализаций заданного процесса показана на рис.5.3:

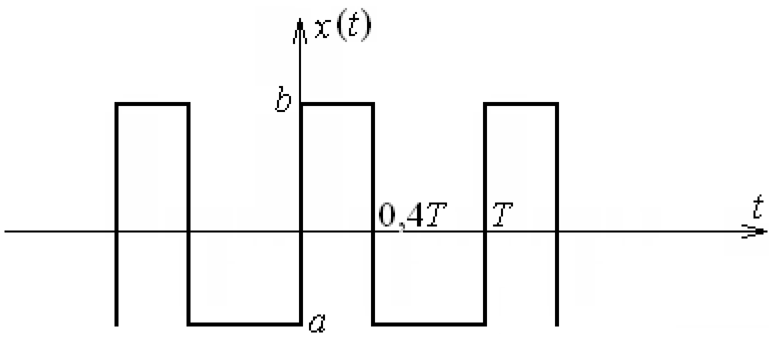

Рис. 5.3. Вариант реализации случайного процесса $x(t)$

Задача 5.7. Эргодический случайный процесс принимает два значения: a = -2В с вероятностью $p(a)$ = 0,2 и значение b = 4В с вероятностью $p(b)$ = 0,8.

Определите и постройте ФПВ и ФРВ этого процесса, нарисуйте одну из возможных реализаций этого процесса.

ОТВЕТ: $W(x) = 0{,}2\delta(x + 2)$; $W(x) = 0{,}8\delta(x - 4)$; $W(x) = 0$, при $x \neq -2$, $x \neq 4$.

Задача 5.8. Эргодический случайный процесс принимает три значения: a = -1 с вероятностью $p(a)$ = 0,2, значение c = 0 с вероятностью $p(c)$ = 0,3 и значение b = 2 с вероятностью $p(b)$ = 0,5.

Определите и постройте ФПВ и ФРВ этого процесса, нарисуйте одну из возможных реализаций этого процесса.

ОТВЕТ: $W(x) = 0{,}2\delta(x + 1)$; $W(x) = 0{,}3\delta(x)$;
$W(x) = 0{,}5\delta(x - 2)$; $W(x) = 0$, при $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Задача 5.8и. Эргодический случайный процесс принимает три значения: a = **(**n - 1**)** с вероятностью $p(a)$ = 0,2, значение c = (n + 1) с вероятностью $p(c)$\=\0,1 и значение b = n. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определите и постройте ФПВ и ФРВ этого процесса, нарисуйте одну из возможных реализаций этого процесса.

Задача 5.9. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - $W(x)$;

б) Среднее значение и дисперсию;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал [0,25, 0,75].

Решение

Находим функцию плотности вероятности:

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Строим графики найденных функций $F(x)$ и $W(x)$ (Рис. 5.4):

Для найденной функции $W(x)$ проверяем условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = \int_0^1 2xdx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1.$$

Находим среднее значение (математическое ожидание):

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3};$$

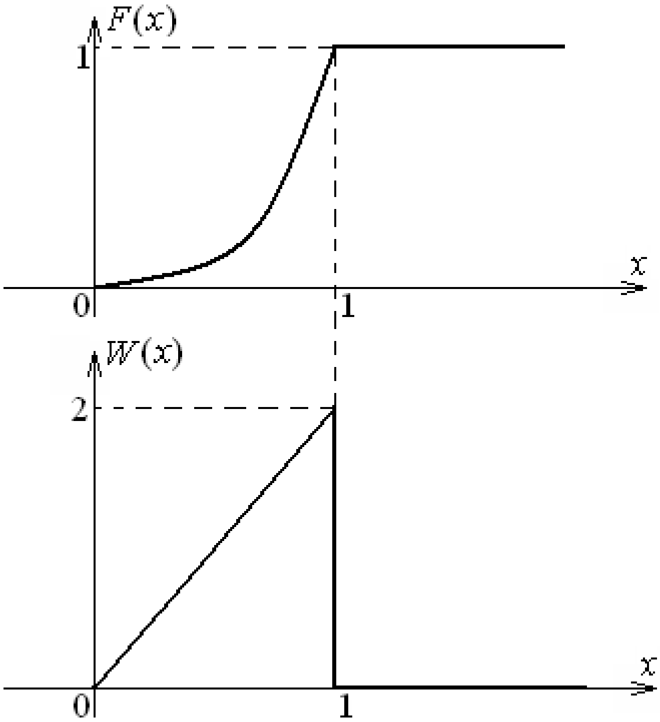

Рис. 5.4. Графики функции распределения вероятности и функции плотности вероятности случайной величины *x*

Далее находим момент второго порядка:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = 2\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2};$$

По найденным значениям m_1 и m_2 находим дисперсию:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18};$$

Определяем вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$p\left[\frac{1}{4}\langle x \langle \frac{3}{4}\right] = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Задача 5.10. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - $W(x)$;

б) Среднее значение и дисперсию данной случайной величины;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал [0, 1/3].

Задача 5.11. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2, \\ \frac{1}{4}x, & 2 < x \leqslant 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - $W(x)$;

б) Среднее значение и дисперсию данной случайной величины;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал [3, 4].

Задача 5.12. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - $W(x)$;

б) Среднее значение и дисперсию данной случайной величины;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал [3/2, 2].

Задача 5.13. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x < \frac{1}{3}, \\ 1, & x \geqslant \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - $W(x)$;

б) Среднее значение и дисперсию данной случайной величины;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал [1/6, 1/3].

VI. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Задача 6.1. Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = U_m cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

Решение

В данном случае удобно определить функцию корреляции путем усреднения по времени одной реализации

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U_m^2 \;\cos(\omega_0 t + \varphi)\cos[\omega_0(t+\tau)+\varphi]d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} U_m^2 \int_0^T [\cos\omega_0\tau + \cos\omega_0(2t+\tau+2\varphi)]\,d\tau == 0{,}5\cdot U_m^2\cos\omega_0\tau$$

Второй интеграл равен 0, т.к. интеграл от косинуса дает синус, (т.е. функцию по модулю не больше 1). Деление такой функции на T, при T стремящемся к бесконечности, дает ноль.

Энергетический спектр процесса может быть найден путем преобразования Винера-Хинчина:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 0{,}5U_m^2\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\,d\tau =$$

$$= 0{,}5U_m^2\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\,d\tau == 0{,}5U_m^2\;\delta(\omega-\omega_0)$$

Интеграл от произведения косинусов есть дельта-функция. Следовательно, энергетический спектр в данном случае равен 0 для всех частот за исключением частоты ω_0. Т.о. спектр содержит только одну частоту ω_0.

Задача 6.2. Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = 0{,}6\cdot cos(2000t + \varphi),$$

где φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

ОТВЕТ: $B(\tau) = 0{,}18 cos 2000\tau$, $G(\omega) = 0{,}18\delta(\omega - 2000)$.

Задача 6.3. Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = 1{,}2\cdot cos(2\pi 10^6 t + \varphi),$$

где φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

ОТВЕТ: $B(\tau) = 0{,}72 cos 2\pi 10^6\tau$, $G(\omega) = 0{,}72\delta(\omega - 2\pi 10^6)$.

Задача 6.3и. Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = (m + 4)\cdot\cos(n\cdot 10^6 t + \varphi),$$

где φ \- случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

Задача 6.4. Реализации АМ сигнала, модулированного случайным процессом, имеют вид:

$$u(t) = x(t) cos\,\omega_0 t,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с заданной корреляционной функцией $b(\tau)$, равной:

$$b(\tau) = 8\cdot exp(-2\tau).$$

Определить функцию корреляции процесса $u(t)$, его энергетический спектр и ширину энергетического спектра.

Решение

В соответствии с определением функции корреляции выполним усреднение по множеству реализаций процесса $u(t)$ для определения функции корреляции процесса $u(t)$:

$$B(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) = b(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) =$$

$$= 8\exp(-2\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) = 4\exp(-2\tau)[\cos\omega_0\tau + \cos\omega_0(2t+\tau]$$

Черта сверху означает усреднение по множеству реализаций процесса $x(t)$. Мы видим, что функция корреляции зависит от времени, поэтому необходимо усреднить выражение для функции корреляции $B(\tau,t)$ по времени. После усреднения по времени останется только первое слагаемое в сумме, т.к. среднее значение второго слагаемого равно 0:

$$B(\tau) = 4exp(-2\tau)\, cos\,\omega_0\tau.$$

Энергетический спектр заданного процесса находим, используя преобразование Винера-Хинчина:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 4exp(-2\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^\infty exp(-2\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{2}{\pi[4+(\omega_0-\omega)^2]};$$

$$\textit{примечание}: \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

Ширину спектра процесса найдем в соответствии с выражением:

$$П_э = \frac{\int_0^\infty G(\omega)d\omega}{G(\omega_0)} = 2\pi \textit{ рад/с.}$$

Задача 6.5. Реализации АМ сигнала, модулированного случайным процессом имеют вид:

$$u(t) = x(t)\cdot cos\omega_0 t,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с заданной корреляционной функцией $b(\tau)$, равной:

$$b(\tau) = 4exp(-4\tau).$$

Определить функцию корреляции процесса $u(t)$, его энергетический спектр и ширину энергетического спектра.

ОТВЕТ: $B(\tau) = 2exp(-4\tau)cos\omega_0\tau$, $G(\omega) = 1/\pi[16 - (\omega - \omega_0)^2]$, $П_э = 4\pi$ рад/с.

Задача 6.5и. Реализации АМ сигнала, модулированные случайным процессом имеют вид:

$$u(t) = x(t)cos\omega_0 t,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с заданной корреляционной функцией $b(\tau)$, равной:

$$b(\tau) = (m + 5)exp(-n\tau).$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить функцию корреляции процесса $u(t)$, его энергетический спектр и ширину энергетического спектра.

VII. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Задача 7.1. На входе линейного полосового фильтра с амплитудно-частотной характеристикой $K(\omega)$ равной:

$$K(\omega) = K_0 \text{ при } \omega_0 - \Pi < \omega < \omega_0 + \Pi$$

$$K(\omega) = 0 \text{ при } \omega_0 - \Pi > \omega; \quad \omega > \omega_0 + \Pi;$$

действует нормальный (гауссов) белый шум со спектральной плотностью G_0 = 2В^2/Гц. Определить функцию корреляции выходного процесса z, записать выражение для ФПВ выходного процесса, если $\Pi = 3{,}14 \cdot 10^3$ рад/с , $\omega_0 = 10^6$ рад/с, $K_0 = 0{,}1$.

Решение

Энергетический спектр процесса на выходе фильтра равен произведению энергетического спектра процесса на входе фильтра (в данном случае это спектр белого шума) на квадрат АЧХ полосового фильтра:

$G_{вых}(\omega) = G_{вх}(\omega)\, K^2(\omega) = G_0\, K_0^2$ при $\omega_0 - \Pi < \omega < \omega_0 + \Pi$;

$G_{вых}(\omega) = 0$ при $\omega_0 - \Pi > \omega$ при $\omega > \omega_0 + \Pi$;

В соответствии с преобразованием Винера-Хинчина найдем функцию корреляции процесса на выходе фильтра:

$$B(\tau)_{вых} = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Pi}^{\omega_0+\Pi} G(\omega)_{вых}\cos\omega\tau d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Pi}^{\omega_0+\Pi} G_0 K_0{}^2 \cos\omega\tau d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau} G_0 K_0{}^2\, 2\sin\Pi\tau\ \cos\omega_0\tau == \frac{K_0{}^2\, 2\Pi G_0}{2\pi}\frac{\sin\Pi\tau}{\Pi\tau}\cos\omega_0\tau;$$

$$B(\tau)_{вых} = 20\frac{\sin 3.14 \cdot 10^3\tau}{3.14 \cdot 10^3\tau}\quad \cos 10^6\tau.$$

Так как, фильтр - линейная цепь, а белый шум на входе фильтра - нормальный, то процесс y на выходе фильтра - так же нормальный. Таким образом, ФПВ выходного процесса имеет вид:

$$W(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{40\pi}}e^{-\frac{z^2}{40}}$$

Задача 7.2. На вход полосового фильтра приемника поступают нормальный белый шум со спектральной плотностью 2,5 $В^2$/Гц и шум от входного усилителя, также являющегося белым нормальным шумом со спектральной плотностью 1,5 $В^2$/Гц.

Определить функцию корреляции процесса *y* на выходе фильтра, записать выражение для ФПВ выходного процесса, если коэффициент передачи полосового фильтра K_0 = 0,05 в полосе частот от 98 кГц до 102 кГц.

ОТВЕТ:

$$B_{вых}(\tau) = 40\frac{\sin 12{,}56\cdot 10^3\tau}{12{,}56\cdot 10^3\tau}\cos 6{,}28\cdot 10^5\tau;$$

$$W(y) = \frac{1}{\sqrt{80\pi}}e^{-\frac{y^2}{80}}; \qquad \sigma^2 = B_{вых}(0) = 40B^2.$$

Задача 7.3. На вход идеального фильтра нижних частот, коэффициент передачи которого равен 0,3 в полосе частот от 0 до 3 кГц поступает нормальный белый шум со спектральной плотностью 0,5 $В^2$/Гц.

Определить функцию корреляции выходного процесса *y*, записать выражение для ФПВ выходного процесса.

ОТВЕТ:

$$B(\tau)_{вых} = 135\frac{\sin 6\pi\cdot 10^3\tau}{6\pi\cdot 10^3\tau}; \; W(y) = \frac{1}{\sqrt{270\pi}}e^{-\frac{y^2}{270}}; \; \sigma^2 = B_{вых}(0) = 135B^2.$$

Задача 7.3и. На вход идеального фильтра нижних частот, коэффициент передачи которого равен (*n* + 0,3) в полосе частот от 0 до (*m* + 2) кГц поступает нормальный белый шум со спектральной плотностью (*m* + *n* + 1) $В^2$/Гц. (*m* – предпоследняя цифра, *n* – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить функцию корреляции выходного процесса *y*, записать выражение для ФПВ выходного процесса.

Задача 7.4. На линейную цепь с импульсной реакцией:

$$g\{t\} = A\cdot exp(-bt) \quad \text{при} \quad t > 0,$$

поступает процесс

$$u(t) = x(t) + E,$$

где: $x(t)$ - белый шум с нулевым средним и спектральной плотностью энергии 0,01 $В^2$/Гц,

E = 6 В.

Определить среднее значение отклика $y(t)$ при t = 100 с, найти функцию корреляции отклика в стационарном режиме, если $A = 10^{-3}$, $b = 10^{-2}$.

Решение

Напряжение на выходе линейной цепи равно:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Среднее значение этого отклика равно:

$$\overline{y}(t) = \int_0^t \overline{u}(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t [\overline{x}(\tau) + E]\, g(t-\tau)\, d\tau = E\int_0^t A\exp(-bt + b\tau)\, d\tau =$$

$$= AE\, e^{-bt} \int_0^t \exp(b\tau)\, d\tau = \tfrac{AE}{b}\,(1 - e^{-bt}) = 0{,}6\,(1 - e^{-10^{-2} t}).$$

Учтено, что среднее значение $u(t)$ равно E, так как среднее значение белого шума $x(t)$ равно 0.

В момент времени $t = 100$с получаем, что среднее значение отклика $y(t)$ равно $0{,}6(1 - e^{-1}) = 0{,}378$ В.

В стационарном режиме, то есть при $t \to \infty$ среднее значение отклика равно 0,6 В.

Функция корреляции отклика цепи в стационарном режиме равна:

$$B(t_1 - t_2) = \overline{\int_0^\infty g(v) \int_0^\infty g(z) x(t_2 - v) x(t_1 - z) dv dz},$$

где черта над формулой означает усреднение интеграла по множеству, т.е. необходимо усреднить произведение $x(t_2 - v)\cdot x(t_1 - z)$.

Среднее значение этого произведения есть функция корреляции белого шума равная $G_0\, \delta(t_2 - v - t_1 + z)$.

Т.о. получим:

$$B(t_1 - t_2) = \int_0^\infty g(v) \int_0^\infty g(z)\, G_0\, \delta(t_2 - v - t_1 + z) dv dz = G_0 \int_0^\infty g(z) g(t_2 - t_1 + z) dv =$$

$$= G_0 \int_0^\infty A^2 \exp(-bz - bt_2 + bt_1 - bz) dz = G_0 A^2\, e^{-b(t_2 - t_1)} \int_0^\infty \exp(-2bz) dz = \frac{G_0 A^2\, e^{-b(t_2 - t_1)}}{2b}.$$

Обозначим $(t_2 - t_1) = \tau$.

Так как функция корреляции стационарного процесса - четная, то окончательно получаем, что функция корреляции процесса на выходе линейной цепи равна:

$$B(\tau) = 5\cdot 10^{-7}\cdot exp(-10^{-2}|\tau|).$$

Задача 7.5. На линейную цепь с импульсной реакцией:

$$g\{t\} = A\cdot exp(-At) \quad \text{при} \quad t > 0$$

поступает процесс

$$u(t) = x(t) + E,$$

где: $x(t)$ - белый шум с нулевым средним и спектральной плотностью энергии 10 В^2/Гц,

$E = 2$ В.

Определить среднее значение отклика $y(t)$ при $t = 1000$ с, найти функцию корреляции отклика в стационарном режиме, если $A = 10^{-3}$.

ОТВЕТ:

$$\overline{y(t)} = 1{,}264\ B,$$

$$B(\tau) = 5 \cdot 10^{-3}\ \exp(-10^{-3}\ |\ \tau\ |).$$

Задача 7.6. На линейную цепь с импульсной реакцией:

$$g\{t\} = A \cdot [exp(-At)] \cdot cos\ \omega_0 t \text{ при } t > 0$$

поступает процесс $x(t)$ - белый шум с нулевым средним и спектральной плотностью энергии 5 В^2/Гц.

Определить среднее значение отклика $y(t)$, найти функцию корреляции отклика в стационарном режиме, если $A = 10^{-1}$, $\omega_0 = 100$рад/с.

ОТВЕТ:

$$\overline{y(t)} = 1{,}264\ B; \quad B(\tau) = 5 \cdot 10^{-3}\ \exp(-10^{-3}\ |\ \tau\ |);$$

$$\overline{y(t)} = 0, \qquad B(\tau) = 0{,}125\ e^{-0{,}1|\tau|}\ \cos 100\tau.$$

Задача 7.6и. На линейную цепь с импульсной реакцией:

$$g\{t\} = A \cdot [exp(-At)] \cdot cos\ \omega_0 t \text{ при } t > 0$$

поступает процесс $x(t)$ - белый шум с нулевым средним и спектральной плотностью энергии $(m + 5)$ В^2/Гц.

Определить среднее значение отклика $y(t)$, найти функцию корреляции отклика в стационарном режиме, если $A = (n + 2)10^{-1}$, $\omega_0 = 100$ рад/с. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 7.7. На нелинейную цепь с характеристикой $y = \alpha x$ при $x < 0$, $y = \beta x$ при $x \geq 0$ $(\alpha,\beta > 0)$ воздействует случайный процесс, мгновенные значения которого равномерно распределены в интервале от a до b $(a < 0,\ b > 0)$. Определить ФПВ выходного процесса.

Решение

ФПВ входного процесса равна:

$$W(x) = (a - b)^{-1} \text{ при } a < x < b;$$

$$W(x) = 0 \text{ при } x < a, x > b.$$

Для $x < 0$, $y = \alpha x$, следовательно:

$$W(y) = W(x)\,\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(b-a)\alpha} \quad \text{при } a\alpha < y < 0.$$

Для $x > 0$, $y = \beta x$, следовательно:

$$W(y) = W(x)\,\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(b-a)\beta} \quad при\ 0 < y < b\beta.$$

Задача 7.8. На нелинейную цепь с характеристикой $y = \alpha x$ при $x < 0$, $y = \beta x$ при $x \geq 0$ ($\alpha,\beta > 0$) воздействует нормальный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией σ^2. Определить ФПВ выходного процесса.

ОТВЕТ:

$$W(y) = \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2\sigma^2}} \quad при \quad y < 0,$$

$$W(y) = \frac{1}{\beta\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\beta^2\sigma^2}} \quad при \quad y > 0.$$

Задача 7.9. На нелинейную цепь с характеристикой $y = |x|$ воздействует нормальный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией σ^2. Определить ФПВ выходного процесса.

ОТВЕТ:

$$W(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad при \quad y \geq 0$$

Задача 7.9и. На нелинейную цепь с характеристикой $y = mx$ при $x < 0$, $y = (n + 2)x$ при $x \geq 0$ воздействует нормальный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией σ^2. Определить ФПВ выходного процесса. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 7.10. Эргодический случайный процесс $x(t)$ с ФПВ $w(x) = exp(-2|x|)$ поступает на пороговое устройство, формирующее выходной процесс y в виде положительных прямоугольных импульсов, длительность которых равна времени превышения процессом $x(t)$ порога v = -0,5В. Определить мощность переменной составляющей импульсной последовательности, если высота импульсов 4 В.

Решение

Пороговое устройство - это нелинейный преобразователь непрерывного процесса в дискретный. Процесс на выходе ограничителя принимает два значения $y_0 = 0$, если $x(t) < -0,5$ и $y_1 = 4$, если $x(t) > -0,5$. Вероятность первого события p, вероятность второго события $(1 - p)$. Найдем вероятность p:

$$p = \int_{-\infty}^{v} W(x)dx = \int_{-\infty}^{-0,5} \exp(-|2x|)dx = 0,5\exp(-1) \approx 0,184$$

Среднее значение импульсной последовательности:

$$m = 0 \cdot p + 4 \cdot (1 - p) = 4 \cdot 0,816 = 3,264 \text{ В}.$$

Мощность переменной составляющей (дисперсия) импульсной последовательности равна:

$$\sigma^2 = (y_0 - m)^2 p + (y_1 - m)^2 (1 - p) = (0 - 3,264)^2 \cdot 0,184 + (4 - 3,264)^2 \cdot 0,816 \approx$$
$$\approx 2,4 \text{ В}^2.$$

Задача 7.11. Нормальный случайный процесс $x(t)$ с нулевым средним и дисперсией D поступает на пороговое устройство, формирующее выходной процесс y в виде положительных прямоугольных импульсов, длительность которых равна времени превышения процессом $x(t)$ порога $v = 0$ В. Определить мощность переменной составляющей импульсной последовательности, если высота импульсов А.

ОТВЕТ: $\sigma^2 = A^2$.

Задача 7.12. Случайный процесс $x(t)$, значения которого равномерно распределены от -1,5 В до 1,5 В поступает на вход нелинейного преобразователя с характеристикой $y(x)$:

$y(x) = 1$, если $x > 0,5$,

$y(x) = 0$, если $-0,5 < x < 0,5$,

$y(x) = -1$, если $x < -0,5$.

Определить дисперсию процесса y.

ОТВЕТ: $\sigma^2 = 0,666$ В.

Задача 7.12и. Нормальный случайный процесс $x(t)$ со средним значением, равным m, и дисперсией $(n + 4)$, поступает на пороговое устройство, формирующее выходной процесс y в виде положительных прямоугольных импульсов, длительность которых равна времени превышения процессом $x(t)$ порога $v = 0$В. Определить мощность переменной составляющей импульсной последовательности, если высота импульсов A. (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

VIII. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ И ФИЛЬТРОВ

Задача 8.1 Задан дискретный сигнал x_i:

$$x_i = 0, \quad \text{при } i \le 0,$$
$$x_i = 1{,}5, \quad \text{при } i = 1, 2, 3,$$
$$x_i = 0, \quad \text{при } i > 3.$$

Определить его z - преобразование.

Решение

Используем формулу прямого z - преобразования:

$$X(z) = x_0 z^0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \ldots\ldots$$

Так как, по условию $x_0 = 0$, имеем

$$X(z) = 1{,}5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) =$$

$$= 1{,}5\frac{z^2 + z + 1}{z^3}.$$

Задача 8.2. Задан дискретный сигнал x_i:

$$x_i = 0, \quad i < 0;$$
$$x_i = 1, \quad i \ge 0.$$

Определить его z - преобразование. (При решении использовать формулу суммы убывающей геометрической прогрессии)

ОТВЕТ:

$$X(z) = \frac{z}{z - 1}$$

Задача 8.3. Задан дискретный сигнал x_i:

$$x_i = 0, \quad i < 0;$$
$$x_i = a^i, \quad i \ge 0$$

Определить его z - преобразование. . (При решении использовать формулу суммы убывающей геометрической прогрессии).

ОТВЕТ:

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

Задача 8.3и. Задан дискретный сигнал x_i:

$$x_i = 0, \quad i < 0;$$
$$x_i = (n + 1)^{i\,m}, \quad i \ge 0.$$

Определить его z - преобразование. (При решении использовать формулу суммы убывающей геометрической прогрессии). (m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Задача 8.4. Разностное уравнение цифрового фильтра (ЦФ)

$$y_i = 4x_i - 2{,}5x_{i-1} + 0{,}8x_{i-2}$$

Определить его импульсную реакцию g_i , переходную h_i характеристику, передаточную функцию $K(z)$ и частотную характеристику $K(j\omega)$.

Решение

Определение g_i. В этом случае $x_i = 1$ при $i = 0$; $x_i = 0$ при $i \neq 0$.

Так как задан нерекурсивный ЦФ, то число отсчетов g_i обязательно конечное. Определим их:

при $i = 0$; $y_0 = g_0 = 4x_0 - 2{,}5x_{-1} + 0{,}8x_{-2} = 4$

(из условия физической реализуемости $x_{-1} = x_{-2} = 0$),

при $i = 1$; $y_1 = g_1 = 4x_1 - 2{,}5x_0 + 0{,}8x_{-1} = -2.5$

($x_1 = 0$ по условию задачи),

при $i = 2$; $y_2 = g_2 = 4x_2 - 2{,}5x_1 + 0{,}8x_0 = 0.8$.

$$g_i = 4; -2{,}5; 0{,}8.$$

Определение переходной функции h_i. Импульсная реакция g_i и переходная функция h_i связаны соотношением:

$i = 0$, $h_0 = q_0 = 4$,

$i = 1$, $h_1 = q_0 + q_1 = 4 - 2.5 = 1.5$,

$i = 2$, $h_2 = q_0 + q_1 + q_2 = 4 - 2.5 + 0.8 = 2.3$,

$i = 3$, $h_3 = q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 2{,}3$ и т.д.

Переходная характеристика нерекурсивного ЦФ всегда стремится к некоторой постоянной величине.

Опредение передаточной функции $K(z)$

Передаточная функция дискретной системы есть z - преобразование импульсной характеристики и имеет вид:

$$K(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2} = \frac{4z^2 - 2{,}5z + 0{,}8}{z^2}.$$

Для определения частотной характеристики $K(j\omega)$ произведем замену переменной $z = e^{j\omega T}$.

$$K(z) = K(j\omega) = 4 - 2{,}5\, e^{-j\omega T} + 0{,}8\, e^{-j2\omega T},$$

учитывая, что $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$.

$$K(j\omega) = 4 - 2{,}5 \cos \omega T + 0{,}8 \cos 2\omega T - j\,(2{,}5 \sin \omega T - 0{,}8 \sin 2\omega T).$$

Задача 8.5 Определить импульсную реакцию, переходную и передаточную функци рекурсивного ЦФ, разностное уравнение которого имеет вид:

$$y_i = x_i + y_{i-1} - 0{,}5y_{i-2}.$$

ОТВЕТ:

$$K(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2} = \frac{z^2}{z^2 - z + 0{,}5}$$

Задача 8.6. Определить передаточную функцию рекурсивного ЦФ, разностное уравнение которого имеет вид:

$$y_i = y_{i-1} - 0{,}4y_{i-2} + 1{,}2\,x_i + 0{,}9\,x_{i-1} + 3x_{i-2}$$

ОТВЕТ:

$$K(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2} = \frac{1{,}2z^2 + 0{,}9z + 3}{z^2 - z + 0{,}4}$$

Задача 8.6и. Разностное уравнение цифрового фильтра (ЦФ)

$$y_i = nx_i - (m+2)x_{i-1} + (m+n)x_{i-2}.$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить его импульсную реакцию g_i , переходную h_i характеристику, передаточную функцию $K(z)$ и частотную характеристику $K(j\omega)$.

Задача 8.7. Определить, устойчив ли фильтр, передаточная функция которого имеет вид:

$$K(z) == \frac{1}{z^2 - 0{,}8z + 0{,}9}$$

Решение

Для определения устойчивости фильтра необходимо вычислить полюсы передаточной функции, т.е. определить корни знаменателя

$$z^2 - 0{,}8z + 0{,}9 = 0,$$

$$z_{p1} = 0{,}4 + j\,0{,}86,$$

$$z_{p2} = 0{,}4 - j\,0{,}86.$$

ЦФ устойчив, т.к модули корней меньше 1.

Задача 8.8. Определить, устойчив ли фильтр, передаточная функция которого имеет вид:

$$K(z) == \frac{z^2}{z^2 - z + 0{,}5}$$

ОТВЕТ: устойчив.

Задача 8.9. Определить, устойчив ли фильтр, передаточная функция которого имеет вид:

$$K(z) == \frac{z}{z-2}$$

0ТВЕТ: Неустойчив.

Задача 8.9и. Определить, устойчив ли фильтр, передаточная функция которого имеет вид:

$$K(z) == \frac{z}{z^2 - (n+1)z - (m+2)}$$

Задача 8.10. Задано входное воздействие, которое не равно 0 только для следующих моментов времени:

x_i = 1, если i = 0 и i = 1;

Импульсная характеристика g_i дискретной системы отлична от 0 для трех моментов времени:

g_i = 2 , если i = 0,1, 2.

Определить отклик y_i дискретной системы.

Решение

Воспользуемся алгоритмом дискретной свертки

$$y_i = \sum_{K=0}^{i} x_K g_{i-K}$$

$y_0 = x_0 g_0 = 1 \cdot 2 = 2$,
$y_1 = x_0 g_1 + x_1 g_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4$,
$y_2 = x_0 g_2 + x_1 g_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4$,
$y_3 = x_1 g_2 = 1 \cdot 2 = 2$.
ОТВЕТ: y_i = (2, 4, 4, 2).

Задача 8.11. Задано входное воздействие x_i = (0.5, 1, 1.5, 1) для последовательных значений i = 0, 1, 2, 3, и импульсная характеристика ЦФ g_i = (1, 1, 1, 1) для последовательных значений i = 0, 1, 2, 3. Определить отклик y_i дискретной системы.

ОТВЕТ: y_i = (0,5; 1,5; 3; 4; 3,5; 2,5; 1).

Задача 8.11и. Задано входное воздействие $x_i = [n, (n+1), (n+2), n]$ для последовательных значений i = 0, 1, 2, 3, и импульсная характеристика ЦФ g_i = (1, 1, 1, 1) для последовательных значений i = 0, 1, 2, 3. Определить отклик y_i дискретной системы.

Задача 8.12. Синтезировать нерекурсивный цифровой фильтр, подобный аналоговой цепи с импульсной характеристикой

$$g(t) = 0, \quad t < 0;$$
$$g(t) = exp(-t/\tau), \quad t > 0.$$

Решение

Аппроксимируем $g(t)$ отсчетами. Интервал между отсчетами T выбираем, исходя из теоремы Котельникова:

$$T < 1/2F_в,$$

где $F_в$ - верхняя частота в частотной характеристике аналоговой цепи с заданной импульсной характеристикой (эта частота выбирается из соображений допустимой среднеквадратической погрешности аппроксимации).

Получим импульсную характеристику дискретной цепи для моментов времени 0, T, $2T$, $3T$, $4T$,…. nT, т.е. для значений $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$:

$$g_i = 1,\ exp(-T/\tau),\ exp(-2T/\tau),\ exp(-3T/\tau), \ldots,\ exp(-nT/\tau).$$

ЦФ с такой импульсной характеристикой описывается разностным уравнением:

$$y_i = x_i + exp(-T/\tau)x_{i-1} + exp(-2T/\tau)x_{i-2} + \ldots + exp(-nT/\tau)x_{i-n}.$$

Обозначим: $b_0 = 1$, $b_1 = exp(-T/\tau)$, $b_2 = exp(-2T/\tau)$, …. $b_n = exp(-nT/\tau)$.

Таким образом, полученные коэффициенты полностью определяют схему цифрового фильтра.

Задача 8.13. Синтезировать нерекурсивный цифровой фильтр, подобный аналоговой цепи с импульсной характеристикой

$$g(t) = 0, \quad t < 0;$$
$$g(t) = exp(-t/\tau)^2, \quad t > 0.$$

ОТВЕТ: $b_к = exp(-кT/\tau)^2$, при $к = 0, 1, 2, 3, \ldots n$.

Задача 8.14и. Синтезировать нерекурсивный цифровой фильтр, подобный аналоговой цепи с импульсной характеристикой

$$g(t) = 0, \quad t < 0;$$
$$g(t) = sin[(n + 2)t/\tau], \quad t > 0.$$

Литература

1. Теория электрической связи: Учебник для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Ю. Н. Прохоров.— М.: Радио и связь, 1998.

2. Кловский Д. Д., Шилкин В. А., Теория электрической связи. Сборник задач и упражнений: Учебное пособие для вузов.— 2-е издание, переработанное и дополненное. — М.: Сов. радио, 1990.

3. Ю.П. Акулиничев, Теория электрической связи, практикум. Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2008.

4. Т.П. Алексеева и др., Теория электрической связи (часть 1). Сборник задач. -М.: МТУСИ, 2000.

5. А. А. Макаров, И. И. Резван, Л. А. Чиненков, Методические указания к практическим занятиям по курсу «Теория электрической связи» - Новосибирск: СибГАТИ, 1997.

6. Д.В. Астрецов, Е.В. Вострецова, Теория электрической связи в примерах и задачах. Учебно-методическое пособие – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006.

7. С.И. Баскаков, Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М: Высшая школа, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ