МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ

Методическое пособие

для проведения практических занятий

Часть вторая

В.И. Юхнов
А.В. Бородин

Ростов-на-Дону

2022 год

Общая теория связи. Методическое пособие для проведения практических занятий. Пособие предназначено для проведения занятий со студентами специальностей 11.02.03 (Инфокоммуникационные технологии и системы связи) очной, очно-заочной и заочной формы обучения.

Составители: Заведующий кафедрой ИТСС к.т.н. доцент Юхнов В.И.

Доцент кафедры ОНП к.ф-м.н. доцент Бородин А.В.

Рецензент: доцент кафедры ИТСС доцент Ершов В.В.

Методическое пособие обсуждено и одобрено

на заседании кафедры ИТСС.

Протокол от «19» декабря 2022 г. № 5.

IX ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

9.1 Количественное определение информации. Энтропия

Задача 9.1.1 На измерительной станции имеются два прибора. Первый имеет шкалу, содержащую 100 делений, его показания могут меняться через каждые 0,05 с. Шкала второго прибора имеет 10 делений, и его показания могут меняться каждые 0,01 с. Какова наибольшая средняя информация, поставляемая двумя приборами в 1 с?

Решение

1-й прибор. Энтропия одного значения (отсчета) по формуле $H_1(X) = \log m_1 = \log 100$. Число отсчетов в 1 секунду равно $n_1 = 1/0,05 = 20$.

2-й прибор. Энтропия одного значения $H_2(X) = \log 10$, а число отсчетов в 1 секунду равно $n_2 = 100$.

Энтропия двух приборов в 1с равна

$$H_{\sum}(X) = n_1 H_1(X) + n_2 H_2(X) = 20 \cdot 6,64 + 100 \cdot 3,32 \approx 465.$$

Задача 9.1.2. Источник сообщений вырабатывает ансамбль символов

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0,4 & 0,2 & 0,15 & 0,1 & 0,1 & 0,05 \end{Bmatrix} .$$

Символы в последовательности независимы.

Вычислить энтропию источника и определить избыточность.

Решение

Энтропия источника для случая неравновероятных и независимых сообщений определяется формулой :

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{m} p(x_j) \cdot \log p(x_j) = -[0,4 \cdot log\, 0,4 + 0,2 \cdot log\, 0,2 + 0.15 \cdot log 0,15 + 2 \cdot 0.1 \cdot log 0,l + 0.05 \cdot log 0,05] = 2,2842.$$

Избыточность за счет неоптимальности (неравновероятности) распределения сообщений в источнике определяется формулой $R = 1 - H/H_{max}$, где $H_{max} = log\, m$

Отсюда $R = 1 - 2,2842/\log 6 = 0,1164$.

Задача 9.1.3 Алфавит источника состоит из трех букв: x_1, x_2, x_3.

Определить энтропию на одну букву текста $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ для следующих случаев:

а) буквы алфавита неравновероятны: $p(x_1) = 0{,}5$, $p(x_2) = p(x_3) = 0.25$, а символы в последовательности на выходе источника статистически зависимы. Условные вероятности $p(x_j^{(2)}/x_i^{(1)})$ заданы в таблице 9.1.

Таблица 9.1

i - индекс предыдущей буквы	j - индекс последующей буквы		
	1	2	3
1	0.4	0,2	0,4
2	0	0,6	0,4
3	0,3	0	0,7

б) вероятности букв те же, что и в п. а), но символы независимы;

в) символы в последовательности независимы, вероятности букв одинаковы.

Вычислить избыточность источников для случаев а) и б).

Решение

а) В случае неравновероятных и зависимых сообщений энтропия текста по формуле :

$$H(X^{(1)}X^{(2)}) = H(X^{(1)}) + H(X^{(2)}/X^{(1)}),$$

где: $H(X^{(1)}) = -\sum_{j=1}^{m} p(xJ) \cdot log\, p(xJ) = 1.5,$

а условная энтропия равна:

$$H\left(X^{(1)}/X^{(2)}\right) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_j^{(1)}) \cdot p(x_j^{(2)}/\, x_j^{(1)}) \cdot log\, p\left(x_j^{(2)}/x_j^{(1)}\right)$$

$$= -\Big\{p(x_1^{(1)}) \cdot [p(x_1^{(2)}/\, x_1^{(1)}) \cdot log\, p(x_1^{(2)}/\, x_1^{(1)}) + p(x_2^{(2)}/\, x_1^{(1)}) \cdot log\, p(x_2^{(2)}/\, x_1^{(1)}) + p(x_3^{(2)}/\, x_1^{(1)}) \cdot log\, p(x_3^{(2)}/\, x_1^{(1)})] + p(x_2^{(1)}) \cdot [p(x_1^{(2)}/\, x_2^{(1)}) \cdot log\, p(x_1^{(2)}/\, x_2^{(1)}) + p(x_2^{(2)}/\, x_2^{(1)}) \cdot log\, p(x_2^{(2)}/\, x_2^{(1)}) + p(x_3^{(2)}/\, x_2^{(1)}) \cdot log\, p(x_3^{(2)}/\, x_2^{(1)})] + p(x_3^{(1)}) \cdot [p(x_1^{(2)}/\, x_3^{(1)}) \cdot log\, p(x_1^{(2)}/\, x_3^{(1)}) + p(x_2^{(2)}/\, x_3^{(1)}) \cdot log\, p(x_2^{(2)}/\, x_3^{(1)}) + p(x_3^{(2)}/\, x_3^{(1)}) \cdot log\, p(x_3^{(2)}/\, x_3^{(1)})]\Big\} = -\Big\{ \frac{1}{2}[0{,}4 \cdot log0{,}4 + 0{,}2 \cdot log0{,}2 + 0{,}4 \cdot log0{,}4] + \frac{1}{4}[0 + 0{,}6 \cdot log0{,}6 + 0{,}4 \cdot log0{,}4] + \frac{1}{4}[0{,}3 \cdot log0{,}3 + 0{,}7 \cdot log0{,}7]\Big\} \approx 1{,}224.$$

Энтропия на один символ

$$H(X^{(1)},X^{(2)}) = [\, H(X^{(1)}) + H(X^{(2)}/X^{(1)})]/2 = 1{,}362.$$

б) При неравновероятных, но зависимых сообщениях энтропия вычисляется по формуле :

$$H(X) = -\sum_{i=1} p(x_i)\cdot log\ p(x_i) = -[1/2log1/2+2\cdot 1/4log1/4]=1{,}5.$$

Избыточность, обусловленная статистической зависимостью

$$R_1 = 1 - H_1(X)/H(X) = 1 - 1{,}362/1{,}5 = 0{,}092.$$

в) В случае равновероятных и независимых сообщений энтропия по формуле :

$$H_{max}(X) = \log m = \log 3 = 1{,}585.$$

Избыточность, обусловленная неоптимальностью распределения

$$R_2 = 1- H_1\{X)/H_{max}\{X) = 1 - 1{,}5/1{,}585 = 0{,}054.$$

Полная избыточность (за счет неоптиматьности распределения и наличия статистических взаимосвязей):

$$R = 1 - H_1(X)/H_{max}(X) = 0{,}141.$$

Задача 9.1.4 Символы азбуки Морзе могут появиться в сообщении с вероятностями: для точки — 0,51, для тире — 0,31. для промежутка между буквами — 0,12, между словами — 0,06. Определить среднее количество информации в сообщении из 500 символов данного алфавита, считая, что связь между последовательными символами отсутствует.

Задача 9.1.5 Источник сообщений выдает символы из ансамбля $A = \{a_i\}$ (здесь i = 1, 2, 3, 4) с вероятностями $P(a_1)$ = 0,2; $P(a_2)$ = 0,3; $P(a_3)$ =0,4; $P(a_4)$ = 0,1. Найти количество информации, содержащееся в каждом из символов источника при их независимом выборе (источник без памяти). Вычислить энтропию и избыточность заданного источника.

Задача 9.1.6 Источник сообщений выдает символы из ансамбля $A = \{a_i\}$ (здесь i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) с вероятностями $P(a_1)$ = 0,1; $P(a_2)$ = 0,05; $P(a_3)$ =0,04; $P(a_4)$ = 0,01; $P(a_5)$ = 0,2; $P(a_6)$ = 0,03; $P(a_7)$ =0,07; $P(a_8)$ = 0,5. Найти количество информации, содержащееся в каждом из символов источника при их независимом выборе (источник без памяти). Вычислить энтропию и избыточность заданного источника.

Задача 9.1.7 Стационарный источник за время $T = 10^6$ с выдает 10^7 бит информации двоичными посылками длительностью τ = 10 мс. За какое время и каким количеством двоичных посылок можно передать тот же объем информации, если соответствующей обработкой полностью устранить избыточность источника? Определить избыточность источника.

Задача 9.1.8 Найти максимальное количество информации, которое содержится в квантованном телевизионном сигнале, соответствующем одному телевизионному кадру при 625 строках разложения, при условии, что сигнал, соответствующий одной строке изображения, представляет собой последовательность 833 (при отношении сторон кадра 4/3) статистически независимых случайных по амплитуде импульсов, каждый из которых с равной вероятностью принимает одно из 16 значений. Найти избыточность телевизионного сигнала, если фактически кадр изображения с 16 градациями уровней содержит $9{,}37 \cdot 10^5$ бит информации.

Задача 9.1.9 Канал связи описан следующей канальной матрицей:

$$p(b/a) = \begin{vmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}75 \\ 0{,}50 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{vmatrix}$$

Вычислить среднее количество информации, которое переносится одним символом сообщения, если вероятности появления символов источника сообщений равны $p\,(a_1) = 0{,}7$; $p\,(a_2) = 0{,}2$; $p\,(a_3) = 0{,}1$.

Чему равны информационные потери при передаче сообщения из 400 символов алфавита a_1, a_2, a_3? Чему равно количество принятой информации?

Решение

Энтропия источника сообщений:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \, log \, p_i = -(0{,}7 \, log \, 0{,}7 + 0{,}2 \, log \, 0{,}2 + 0{,}1 \, log \, 0{,}1) = 0{,}3602 + 0{,}4644 + 0{,}3322 = 1{,}1568 \text{ бит/символ.}$$

Общая условная энтропия:

$H(B/A) = -\sum_{i}^{m} p(a_i) \cdot \sum_{j}^{m} p(b_j/a_i) \log p(b_j/a_i) = -[0{,}7 \cdot (0{,}98 \cdot \log 0{,}98 + 2 \cdot 0{,}01 \log 0{,}01) + 0{,}2(0{,}75 \log_2 0{,}75 + 0{,}1 \log_2 0{,}1 + 0{,}15 \log_2 0{,}15) + 0{,}1\,(0{,}2 \log_2 0{,}2 + 0{,}3 \log_2 0{,}3 + 0{,}5 \log_2 0{,}5)] = 0{,}7\,(0{,}0285 + 2 \cdot 0{,}0664) + 0{,}2\,(0{,}3113 + 0{,}322 + 0{,}4105) + 0{,}1(0{,}4644 + 0{,}5211 + 0{,}5) = 0{,}473$ *бит/символ.*

Потери в канале связи

$\Delta I = k \cdot H(B/A) = 400 \cdot 0{,}473 = 189{,}5$ *бит.*

Энтропия приемника

$H(B) = -\sum_{j=1}^{m} p(bi) log2 \, p(bi);$

$p(b_1) = \sum_i p(a_i) \cdot p(b_1/a_i) = p(a_1) \cdot p(b_1/a_1) + p(a_2) \cdot p(b_1/a_2) + p(a_3) \cdot p(b_1/a_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}726;$

$p(b_2) = \sum_i p(a_i) \cdot p(b_2/a_i) = p(a_1) \cdot p(b_2/a_1) + p(a_2) \cdot p(b_1/a_2) + p(a_3) \cdot p(b_2/a_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}187;$

$p(b_3) = \sum_i p(a_i) \cdot p(b_3/a_i) = p(a_1) \cdot p(b_3/a_1) + p(a_2) \cdot p(b_3/a_2) + p(a_3) \cdot p(b_3/a_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}087;$

$p(b_1) + p(b_2) + p(b_3) = 0{,}726 + 0{,}187 + 0{,}087 = 1.$

$H(B) = -(0{,}726 \cdot \log_2 0{,}726 + 0{,}187 \cdot \log_2 0{,}187 + 0{,}087 \cdot \log_2 0{,}087) = 1.094$ бит /символ

Среднее количество полученной информации:

$I = k[H(B) - H(B/A)] = k \cdot H(B) - \triangle I = 248.1$ бит.

Задача 9.1.10 Определить среднее количество информации, содержащееся в принятом ансамбле сообщений относительно переданного, если сообщения составлены из алфавита А, *B*, *C*. Вероятности появления букв алфавита на выходе источника сообщений $p(A_i) = p(B_i) = 0{,}25$; $p(C_i) = 0{,}5$. Условные вероятности возникновения пар вида bj/a_i следующие:

$p(A/A) = 0.97$; $p(A/B) = 0{,}02$; $p(A/C) = 0.01$;

$p(B/A) = 0{,}015$; $p(B/B) = 0.97$; $p(B/C) = 0{,}01$;

$p(C/A) = 0{,}015$; $p(C/B) = 0{,}01$; $p(C/C) = 0{,}98$.

Решение

1) Вероятность совместных событий

$p(A, A) = p(A_i) \cdot p(A/A) = 0{,}25 \cdot 0{,}97 = 0{,}24250;$

$p(B, A) = p(A_i) \cdot p(B/A) = 0{,}25 \cdot 0{,}015 = 0{,}00375;$

$p(C, A) = p(A_i) \cdot p(C/A) = 0{,}25 \cdot 0{,}015 = 0{,}00375;$

$p(A, B) = p(B_i) \cdot p(A/B) = 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 0{,}005;$

$p(B, B) = p(B_i) \cdot p(B/B) = 0{,}25 \cdot 0{,}97 = 0{,}24250;$

$p(C, B) = p(B_i) \cdot p(C/B) = 0{,}25 \cdot 0{,}01 = 0{,}0025;$

$p(A, C) = p(C_i) \cdot p(A/C) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}005;$

$p(B, C) = p(C_i) \cdot p(B/C) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}005;$

$p(C, C) = p(C_i) \cdot p(C/C)$ = 0,5 · 0,98 = 0,49;

2) Вероятность появления букв А, В и С со стороны приемника

$p(A_j) = p(A_i) \cdot p(A/A) + p(B_i) \cdot p(A/B) + p(C_i) \cdot p(A/C)$ = 0,2425 + 0,005 + 0,005 =0,2525;

$p(B_j) = p(A_i) \cdot p(B/A) + p(B_i) \cdot p(B/B) + p(C_i) \cdot p(B/C)$ = 0,00375 + 0,2425 + 0,005 = 0,25125;

$p(C_j) = p(A_i) \cdot p(C/A) + p(B_i) \cdot p(C/B) + p(C_i) \cdot p(C/C)$ = 0,00375 + 0,0025 + 0,49 = 0,49625;

$p(A_j) + p(B_j) + p(C_j) = 1$.

3) Среднее количество информации в принятом ансамбле сообщений

$I(B, A) = \sum p(a_i) \sum [p(b_i / a_i) \cdot log2\ p(bi / ai)$ —$(bi / ai) \cdot log2\ p\ (bi])1$ = 0,2525 [(0,97 log2 0,97 + 2 ·0,015 log2 0,015) - (0,97 log2 0,2525 + 2 · 0,015 log2 0,2525)] + 0,2512 [(0,02 log2 0,02 + 0,97 log2 0,97 + 0,01 log2 0,01) - (0,02 log2 0,2512 + 0,97 $\log_2$ 0,2512 + 0,01 log2 0,2512)] +0,4962((2 · 0,01 log2 0,01 + 0,98 log2 0,98) — (2 . 0,01 log2 0,4962 + 0,98 log2 0,4962)] = 0,2525 (-0,1325 + 1,9850) +0,2512(-0,221941 + 1,9840) + 0,4962(-0,1613 + 1,1970)≈1,3 бит.

Проверка.

$H\ (A/B)$ = —0,25 (0,97 $\log_2$ 0,97 + 2 . 0,015 $\log_2$ 0,015) — 0,25 (0,97 $\log_2$ 0.97 + 0,02 $\log_2$ 0,02 + 0,01 $\log_2$ 0,01) — 0,5 (2 . 0.01 $\log_2$ 0,01 + 0,98 $\log_2$ 0,98) ≈0,1806 *бит/символ.*

$H(A) = -\sum p_i \cdot \log_2 p_i$ = - (2·0.2525·$\log_2$0.2525+0.2512·$\log_2$0.2512 + 0.49·I$\log_2$0.49)=1.5033 бит /сек

$H(B) = -\sum p_i \log_2 p_i$ = - (2 · 0,25· $\log_2$ 0,25 + 0,5 ·$\log_2$ 0,5) = 1,5 *бит/символ.*

$I\ (A, B) = H(A) - H\ (A/B)$ =1,5033 - 0,1806 = 1,3227 *бит.*

$H(A, B) = H\ (B) + H(A /B)$ = 1,5 +0,1806 =1,6806 *бит/два символа.*

$H\ (A,B) = - \sum\sum P\ (a_i,b_j) \cdot log_2\ P\ (a_i,b_j)$ = -(2· 0,2425·$\log_2$0.2425+ 2·0,00375· $\log_2$ 0,00375 + 3 · 0,005· $\log_2$ 0,005 + 0,0025· $\log_2$ 0,0025 + 0,49· $\log_2$ 0,49) = 2 ·0,4953 + 2 ·0,0298 + 3 ·0,0382 + 0,0216 + 0,5042 = 1,6806 *бит/два символа.*

$I(A,B) = H(A) + H(B) - H(A, B)$ = 1,5033 + 1,5 - 1,6806 = 1,3227 бит.

Задача 9.1.11 Опыт X имеет два исхода x_1 , x_2 с соответственными вероятностями $p(x_1)$ = 0,3. $p(x_2)$ = 0,7. Найти точные и среднее количества информации, несомые исходами x_1 и x_2. Вычислить дисперсию случайной величины $I = -logP(x_i)$ и величину отклонения от своего среднего значения $\bar{I}(X)$.

Решение

Точные количества информации, несомые исходами x_1 ,x_2, равны:

$I(x_1) = -log\ p(x_1) = -log$ 0,3 = 1,737 *бит/символ*:

$I(x_2) = -log\ p(x_2) = -log$0,7 = 0,515 *бит/символ*.

Так как числа $I(x_1)$ = 1,737 и $I(x_2)$ = 0,515 появляются с соответственными вероятностями 0,7 и 0,3, среднее количество информации по К.Шеннону

$$\bar{I}(X) = H(X) = -\sum_{i=1}^{2} P(xi) \cdot \log P(x_i) = 0{,}3 \cdot 1{,}737 + 0{,}7 \cdot 0{,}515 = 0.88.$$

Дисперсию случайной величины $I = -logP(x_i)$ вычислим из выражения

$D(I) = \sum_{i=1}^{2}(\,I(x_i i) - I(X))^2 \cdot P(xi) = (1{,}737 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}3 + (0{,}515 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}7 =$ 0,86.

Таким образом, случайная величина $I(x_i)$ отклоняется от своего значения $\bar{I}(X)$ в среднеквадратичном на величину $\sigma_i = \sqrt{D(I)} = \sqrt{0{,}86} = 0{,}92$.

9.1.12 Студент может сдать зачёт по теории передачи информации с вероятностью α, не проработав весь материал, и с вероятностью β, проработав весь материал курса; или не сдать зачёт с вероятностью γ, не проработав весь материал, и с вероятностью δ, проработав весь материал курса (α + β + γ + δ) = 1.

Определить среднее количество информации, которое может получить преподаватель, о подготовленности студента по результатам сдачи зачёта.

Ответ:

$$I(X,Y) = \beta \log \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} + \alpha \cdot \log \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} + \delta \cdot \log \frac{\delta}{(\delta+\gamma)(\beta+\delta)} + \gamma \cdot \log \frac{\gamma}{(\delta+\gamma)(\alpha+\gamma)}.$$

Задача 9.1.13 По линии связи с помехами передаётся одно из двух сообщений x_1 или x_2 с вероятностями соответственно p и g, причём $p + g = 1$. На приёмном конце канала сигналу x_1 соответствует y_1, а сигналу x_2 соответствует y_2. Заданы условные вероятности правильного приёма $P(y_1 / x_1) = \Delta$ и $P(y_2/x_2) = \delta$.

Определить количество информации $I(Y,X)$, содержащее в у о x.

Ответ:

$$I(Y,X) = p\cdot\Delta\log\frac{\Delta}{p\Delta+g(1-\delta)} + p(1-\Delta)\frac{1-\Delta}{g\delta+p(1-\Delta)} + g(1-\delta\cdot)\log\frac{1-\delta}{p\Delta+g(1-\delta)} + g\delta\ \cdot\log\frac{\delta}{g\delta+p(1-\Delta)}.$$

Задача 9.1.14 По каналу связи передаётся один из двух сигналов x_1 или x_2 с одинаковыми вероятностями. На выходе канала сигналы x_1 и x_2 преобразуются в сигналы y_1 и y_2, причём из-за помех, которым одинаково подвержены сигналы x_1 и x_2, в передачу вносится ошибка, так что в среднем один сигнал из 100 принимается неверно. Определить среднее количество информации на один символ. Сравнить её с количеством информации при отсутствии помех.

Ответ: при отсутствии помех $I(X,Y) = 1$ *бит;* при наличии помех $I(Y,X) = 0{,}919$ бит.

9.2 Пропускная способность дискретного канала

Задача 9.2.1 Несимметричный троичный канал без памяти задан матрицей P условных вероятностей переходов.
Стационарный источник без памяти генерирует символы с частотой $F = 1/T$.
Априорные вероятности символов на входе равны $p(a_1) = p$, $p(a_2) = p(a_3) = q$.

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P_e & P_e \\ 0 & P_e & 1-P_e \end{vmatrix}$$

Нарисовать граф канала. Вычислить скорость создания информации, скорость передачи информации, ненадёжность.

Решение

Канал можно изобразить в виде графа (рисунке 9.1),используя матрицу P в общем виде

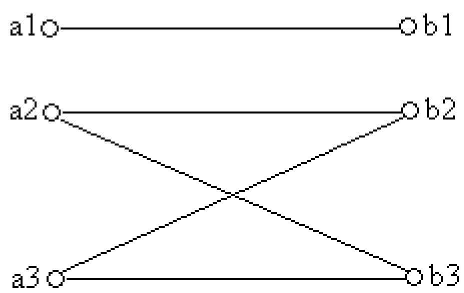

Рисунок 9.1- Граф канала

$$P = \begin{vmatrix} p\left(\frac{b_1}{a_1}\right) & p\left(\frac{b_2}{a_1}\right) & p\left(\frac{b_3}{a_1}\right) \\ p\left(\frac{b_1}{a_2}\right) & p\left(\frac{b_2}{a_2}\right) & p\left(\frac{b_3}{a_2}\right) \\ p\left(\frac{b_1}{a_3}\right) & p\left(\frac{b_2}{a_3}\right) & p\left(\frac{b_3}{a_3}\right) \end{vmatrix}$$

Источник и канал стационарны и не имеют памяти, поэтому скорость создания информации равна $H(A)$, скорость передачи информации равна $I(A;Б)$ и ненадёжность равна $H(A/B)$.

Для нахождения условной энтропии $H(A/Б)$ надо знать вероятности $p(aj/b_k)$. Так как символ a_1 не искажается, то $p(b_1) = p(a_1) = p$. Поскольку символы a_2 и a_3 искажаются симметрично, а $p(a_2) = p(a_3)$, то вероятности $p(b_2) = p(b_3)$, и тогда обратные вероятности $p(a_2/b_2) = p(a_3/b_3) = 1- p_e$, $p\{a_3/b_2) = p(a_2/b_3) = p_e$.

Энтропия сигнала на входе

$$H(A) = \sum_{i=1}^{3} p(a_i) \cdot log\, p(a_i) \;=\; -p\, log\, p - \;2q\; log\; q\; бит/симв.$$

Скорость передачи равна средней взаимной информации

$1(A;B)=-\sum p(b_i)\cdot log\ p(b_i)\ +\{p(a_1)[p(b_l/a_1)log\ p(b_l/a_]) + p(b_2/a_1)log\ p(b_2/a_1) + p(b_3/a_1)log\ p(b\ _3\ /a_1)] + +p(a_2)[p(b_l/a_2)log\ p(b_l/a_2) +p(b_2/a_2)log\ p(b_2/a_2) + p(b_3\ /a_2)log\ p(b_3 / a_2)] +P(a_3)[p(b_l/a_3)log\ p(b_1 / a_3)+ +p(b_2/a_3)log\ p(b_2/a_3) +p(b_3/ a_3)log\ p(b_3/a_3)]\} = -plog\ p-2qlogq + 0 + q[0 + (1 - p_e) \log(l -p_e) +P_elog\ p_e] + q[0 + (l-p_e)log(1-p_e)+ p_e\ log\ p_e] =\{-p \log p - 2q \log q + 2q[(l - p_e) \log(l - p_e) + p_e \log p_e]\}.$

Обозначив $\beta= -(1 -p_e)\log(l -P_e) — p_e \log p_e$,

получим

$$I(A;B) = (-plogp-2qlogq-2q\beta)\quad бит/симв.$$

Ненадёжность равна разности между скоростью создания и скоростью передачи информации

$$H(A\backslash B) = H(A)-I(A:B) = 2q\beta\quad бит/симв.$$

Задача 9.2.2 Вычислить пропускного способность дискретного m—го симметричного канала связи, если условные вероятности переходов в канале:

$$P\left(\frac{b_k}{a_i}\right) = \begin{Bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{Bmatrix}$$

а частота следования символов в канале равна F_k.

Задача 9.2.3 Вычислить пропускную способность двоичного симметрического постоянного канала, заданного матрицей

$$P = \begin{Bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{Bmatrix}$$

где p - вероятность искажения в канале.

Длительность символа сигнала τ. Построить зависимость

$c/c_m = f(p)$, где c_m - пропускная способность каната без шумов.

Задача 9.2.4 Дискретный канат задан матрицей

$$P = \begin{Bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{Bmatrix}$$

Длительность символа сигната 1 мс.

Вычислить пропускную способность каната. Сравнить с пропускной способностью при отсутствии шумов.

Задача 9.2.5 Сигнал на входе дискретного каната без помех может принимать одно из следующих значений: 0; 1; 2; 3; 4; 5. Вычислить пропускную способность каната, полагая, что среднее значение входного не превышает единицы.

Задача 9.2.6 Сообщения источника с производительностью 850 *бит/с* поступают на вход двоичного симметричного канала с вероятностью искажения $p = 0{,}05$. Длительность символов сигнала в канале $\tau = 1$мс. Достаточна ли пропускная способность канала для передачи всей информации, поступающей от источника?

Задача 9.2.7 Источник сообщений с производительностью 300 *бит/с* подключён к двум симметричным канатам. Первый канал имеет вероятность искажения $p_1 = 0.01$ и длительность символов сигнала в канале τ_1=10мс, второй - $p_2 = 0.02$ и $\tau_2 = 5$ мс соответственно. Достаточна ли пропускная способность обоих каналов для передачи всей информации, поставляемой источником в 1 с?

Задача 9.2.8 Два двоичных симметричных каната с вероятностью искажения p = 0,05 соединено последовательно. Как изменится пропускная способность нового канала по сравнению с одним каналом?

Задача 9.2.9 Сообщения составлены из пяти качественных признаков *(m_1 =* 5). Длительность элементарной посылки τ = 20 *мсек.* Определить: а) чему равна скорость передачи сигналов; б) чему равна скорость передачи информации.

Решение

Скорость передачи сигналов

$$V = 1/\tau = 1/0.02 = 50 \textit{ символ/сек.}$$

Скорость передачи информации

$$C = \log_2 m/\tau = \log_2 5/0.02 = 116 \text{ бит/сек.}$$

Задача 9.2.10 По двоичному симметричному каналу связи с помехами передаются два сигнала $x1$ и $x2$ с априорными вероятностями $p(x1)=3/4$ и $p(x2)=1/4$.

Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов уменьшается до 7/8. Длительность одного сигнала τ = 0,1с. Требуется определить:

1) производительность и избыточность источника;

2) скорость передачи информации и пропускную способность канала связи.

Решение

Определим единицу измерения количества информации как $N_i(t) = \ln(e)$ или как $B_i(t) = N_i(t) \cdot \ln(2)$ и воспользуемся формулами:

- условные вероятности $p(y_j/x_i)$ приема сообщений y_1, y_2 при условии передачи сообщений x_1, x_2

$$p\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{7}{8}; \quad p\left(\frac{y_1}{x_2}\right) = \frac{1}{8}; \quad p\left(\frac{y_2}{x_1}\right) = \frac{1}{8}; \quad p\left(\frac{y_2}{x_2}\right) = \frac{7}{8};$$

- количество информации на входе канала в расчете на одно сообщение

$$I_x = 0{,}562 \cdot N_i(t) \text{ или } I_x = 0.811 \cdot B_i(t);$$

- среднее количество взаимной информации I_{xy} в расчете на одно сообщение

$$I_{xy} := I_x - HX_y; \; I_{xy} = 0.352 \text{ бит.}$$

Рассчитаем на их основе информационные характеристики источника и канала связи:

1) производительность источника

$$I_x := \frac{I_x}{\tau};$$

$$I_x = 8.113 \text{бит/с}.$$

2) избыточность источника при максимальном количестве его информации

$$I_{max} := \ln(2)$$

$$R := 1 - \frac{I_x}{I_{max}};\ R = 0.189.$$

3) скорость передачи информации

$$V_{xy} := \frac{I_{xy}}{\tau};$$

$$V_{xy} = 3.525 \text{бит/с}.$$

4) при вероятности ошибки $p_0 := P_{yx1,2}$ или $p_0 := P_{yx2,1}$

пропускная способность канала на сигнал

$$C_1 := \ln(2) + p_0 \cdot \ln(p_0) + (1 - p_0) \cdot \ln(1 - p_0)$$

и составляет $C_1 = 0.456$ бит на один сигнал, а пропускная способность в удиницу времени

$$C := \frac{C_1}{\tau};\ C = 4.564 * sec^{-1} * bit.$$

Сравнение C и vI_X показывает, что пропускная способность данного канала не обеспечивает передачи информации со сколь угодно малой вероятностью ошибки путем помехоустойчивого кодирования, поскольку $vI_X > C$ (согласно теореме Шеннона).

Задача 9.2.11 По каналу связи передаются двоичные 8-разрядные сообщения, вероятность появления нулей $P(0) = 0{,}6$. Время передачи одного сообщения $T = 10^{-3}$ с. Определить скорость передачи и пропускную способность канала связи.

Решение

Пропускная способность будет определяться выражением

$$C = \frac{n \log m}{\tau} = \frac{8 \log 2}{10^{-3}} = 8000 \text{ бит/с}.$$

Скорость передачи сообщений с учетом вероятности состояния каждого элемента будет:

$$R_t = \frac{-n \sum_{i=1}^{2} P_i \cdot \log P_i}{\tau} = \frac{-8(0{,}6 \cdot \log 0{,}6 + 0{,}4 \cdot \log 0{,}4}{\tau} = \frac{8 \cdot (0{,}4422 + 0{,}5288)}{\tau} \cong 7768 \text{ бит/с}$$

Задача 9.2.12 Количество сообщений, передаваемых с контролируемого пункта, о состоянии четырех объектов одинаково. Наблюдением установлено, что в среднем объект 1 включен 80%, объект 2 – 40%, объект 3 – 60%, объект 4 – 20%. В остальное время объекты отключены. Определить скорость передачи информации и пропускную способность канала связи, если длительность одного сообщения 10^{-3} с.

Решение

Исходя из одинакового количества сообщений о состоянии объектов, можно записать, что $P(x_1)= P(x_2)= P(x_3)= P(x_4)= \frac{1}{4}$. Из статистики наблюдений можно записать выражения для определения вероятности того, что объекты находятся во включенном состоянии:

$P(x_{1B})=0{,}8P(x_1);\ P(x_{2B})=0{,}4P(x_2);\ P(x_{3B})=0{,}6P(x_3);\ P(x_{4B})=0{,}2P(x_4).$

Результаты расчета вероятностей того, что объекты находятся во включенном или отключенном состоянии, сведем в таблице 9.2.

Таблица 9.2 - Вероятности $P(X_{iB})$ и $P(X_{iO})$

X_i	X_{1B}	X_{1O}	X_{2B}	X_{2O}	X_{3B}	X_{3O}	X_{4B}	X_{4O}
$P(X_i)$	0.2	0.05	0.1	0.15	0.15	0.1	0.05	0.2

Тогда скорость передачи информации будет

$R_t = V\tau \cdot (H(X)) = 10^3 \cdot$ (- 0,2·log 0,2 – 0,05·log0,05 - 0,1·log0,1 - 0,15·log0,15 -0,15·log0,15 - 0,1·log0,1 - 0,05·log0,05 - 0,2·log0,2) = 10^3 ·(0,464 + 0,216 + 0,332 + 0,410 + 0,410 + 0,332 + 0,216 + 0,464) = 2844 бит/с.

Пропускная способность в этом случае будет

C= $V_\tau \cdot \max H(X) = V_\tau \cdot \log M = 10^3 \cdot 3 = 3000$ бит/с,

где M = 8 - общее число состояний системы (четырех объектов).

Задача 9.2.13 По дискретному каналу связи с помехами передается кодовое сообщение 1110011110. Вероятность искажения одиночных сигналов

$$P=P_{10}=P_{01}=10^{-2},$$

а длительность элемента кода 10^{-3} с. Определить скорость передачи и пропускную способность канала связи.

Решение

Пропускную способность канала определим из выражения:

$C = V_\tau \cdot (1 + P\,logP + (1-P)\cdot\log(1-P)) = 10^3 \cdot (1 + 0{,}01\cdot\log 0{,}01 + 0{,}99\cdot\log 0{,}99\,) = 1000\cdot(1 - 0{,}066 - 0{,}014) \cong 1000\cdot 0{,}92 = 920$ бит/с.

Скорость передачи

$$R_t = \\ = V_\tau\,\tau\cdot\left(-\sum_{i=1}^{2} P_i \log P_i + P\log P + (1-P)\cdot\log(1-P)\right) = 10^3\ (-0{,}3\log 0{,}3 - 0{,}7\log 0{,}7 + 0{,}01\log 0{,}01 + 0{,}99\log 0{,}99) = 1000\cdot(0{,}521 + 0{,}360 - 0{,}066 - 0{,}014) = 1000 * 0{,}801 = 801\textit{бит/с},$$

где P(0)= $\frac{\mathrm{n}(0)}{\mathrm{n}} = \frac{3}{10} = 0{,}3,\ \mathrm{P}(1) = \frac{\mathrm{n}(1)}{\mathrm{n}} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$

Задача 9.2.14 Какой запас пропускной способности *C—H'(A)* должен иметь канал, чтобы при использовании оптимального кода с длительностью кодовой комбинации *T*=100 мс вероятность ошибки не превысила величину 10^{-6}?

Во сколько раз изменится длительность кодовой комбинации оптимального кода, если при неизменной вероятности ошибки запас пропускной способности канала уменьшается в 2 раза?

9.3 Пропускная способность непрерывного канала

Задача 9.3.1 Определить пропускную способность канала связи при условии, что сигнал $C(t) = 5 \sin 1000\pi t$ должен быть восстановлен с погрешностью не большей, чем 1 В.

Решение

Из условия задачи известно, что амплитуда сигнала u_c = 5 В, а полоса частот ΔF_c = 500 Гц. Тогда пропускная способность

$$C=\Delta F_c \cdot \log(1+\frac{P_c}{P_o}) =$$

$$\Delta F_n log(1+\frac{U_c^2}{\delta^2})=500\cdot log(1+\frac{25}{1})=500\cdot log(26)\cong 500\cdot 4{,}7=2350\ бит/с.$$

Задача 9.3.2 Сигнал с амплитудой 1 В передается по каналу связи, в котором отношение сигнал/шум равно 10 дБ. Определить абсолютную погрешность телеизмерений.

Ответ: $\delta = 0.31$ В.

Задача 9.3.3 По непрерывному каналу передается сигнал, спектр которого ограничен полосой частот 30 Гц. Определить пропускную способность канала связи таким образом, чтобы погрешность передаваемого сигнала не превышала 1%.

Ответ: С = 400.

Задача 9.3.4 Отношение сигнал/шум в линии связи равно 10^{-1}, а полоса пропускания канала связи 1 кГц. Определить пропускную способность канала связи.

Ответ: С=140.

Задача 9.3.5 По каналу связи передается сигнал S(t), представляющий собой гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, дисперсией $\delta^2 = 8$ мВт, равномерным энергетическим спектром N_0 в полосе частот канала $F = 3100$ Гц. В канале действует независимая от сигнала флуктуационная помеха типа белый шум с энергетическим спектром $N_0=3{,}22*10^{-7}$ Вт/Гц, гауссовским распределением и нулевым математическим ожиданием. Определить среднее на один отсчет сигнала количество информации, переданное по каналу.

Задача 9.3.6 С какой скоростью передается информация по каналу, если на его вход поступает v_K= 100 независимых отсчетов сигнала в секунду. Сигнал S*(t)* распределен по гауссовскому закону, m_8 = 0 и $\delta^2{}_s$ = *2,8* Вт. В канале действует аддитивный гауссовский шум с m_n = 0 и $\delta^2{}_n$ = 0,4 Вт.

Задача 9.3.7 Найти пропускную способность гауссовского канала непрерывного времени, если F — полоса канала; P_c и $P_ш$ — фиксированные средние мощности сигнала и шума в канале, которые считаются независимыми.

Задача 9.3.8 Найти пропускную способность гауссовского канала, имеющего полосу $F=3{,}1$ кГц, если на вход канала поступает сигнал, мощность которого P_c=1 мВт, а в канале действует белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0=10^{-7}$ Вт/Гц.

X ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

Задача 10.1 Для передачи сообщения используется код Хэмминга n = 7, $k=4$. Определить число разрешенных кодовых комбинаций, общее число n-разрядных кодовых комбинаций, число случаев появления необнаруженных ошибок, число случаев появления обнаруженных ошибок, число исправляемых ошибок и общее число возможных случаев передачи.

Решение

Число разрешенных кодовых комбинации

$$N_1 = 2^к = 2^4 = 16.$$

Общее число кодовых комбинаций, которые могут быть представлены n-разрядным кодом

$$N_2 = 2^n = 2^7 = 128.$$

Число случаев появления необнаруживаемых ошибок

$$N_3 = 2^к \cdot (2^к - 1) = 2^4 \cdot (2^4 - 1) = 16 \cdot 15 = 240.$$

Число случаев обнаруживаемых ошибок

$$N_4 = 2^к \cdot (2^n – 2^k) = 2^4 \cdot (2^7 - 2^4) = 16\cdot(128 - 16) = 1792.$$

Число случаев исправленных ошибок

$$N_5 = (2^n - 2^k) = 2^7 - 2^4 = 128 - 16 = 112.$$

Общее число возможных случаев передачи

$$N_6 = 2^k \cdot 2^n = 2^4 \cdot 2^7 = 16 \cdot 128 = 2048.$$

Задача 10.2 Определить минимальное кодовое расстояние d, если код должен обнаруживать ошибки кратностью $m = 2$ или исправлять ошибки кратностью $S = 1$ обнаруживать и исправлять ошибки, указанной кратности.

Решение

При обнаружении ошибок кратностью $m = 2$:

$$d_{min} = m + 1 = 2 + 1 = 3.$$

При исправлении ошибок кратностью $S=1$.

$$d_{min} = 2S + 1 = 2*1 + 1 = 3.$$

При обнаружении и исправлении ошибок

$$d_{min} = S + m + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Задача 10.3 Определить число контрольных символов, в коде, позволяющем обнаруживать двойные ошибки, если число информационных символов k = 7

Решение

Определим минимальное кодовое расстояние:

$$d_{min}=m + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Тогда число контрольных символов

$$R_{d=3} \geq E\log((\kappa + 1) + E\log(k + 1)) = E\log((7 + 1) + E\log(7 + 1)) = E\log(8 + E\log 8) = E\log(8 + 3) = 4.$$

Задача 10.4 Закодировать в рекуррентном коде последовательность информационных символов *G(X)* = 1110001100. с шагом сложения *b = 2.*

Решение

Кодирование произведем с помощью кодера, структурная схема которого представлена на рис. 7.5 [3], из которой следует, что контрольные символы формируются с задержкой на *b* тактов. Поэтому перед информационной последовательностью, подлежащей кодированию, необходимо приписать *2b* нулей, т.е. четыре. Контрольные символы образуются путем сложения по модулю 2 двух информационных символов расположенных на расстоянии *b* друг от друга. Процесс образования контрольных символов показан на рисунке 10.1.

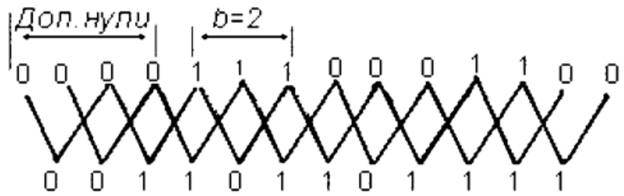

Рисунок 10.1 - Схема построения рекуррентного кода с *b* = 2

В данном коде после каждого информационного символа следует проверочный символ. Таким образом, на выходе получим последовательность символов *F(X)* = 10101101000111100101.

Ответ: Закодированная последовательность *F(X)* = 10101101000111100101.

Задача 10.5 По каналу связи передаются кодовые комбинации:

$$x_1=1001001,\ x_2= 1011011,\ x_3= 0110101.$$

Определить минимальное кодовое расстояние.

Ответ: $d_{min} = 2$.

Задача 10.6 Определить число контрольных символов (*r*) в коде, позволяющем исправлять одинарную ошибку или обнаруживать двукратные искажения, если число информационных символов *k=5*.

Ответ: $r = 4$.

Задача 10.7 Определить число контрольных символов в коде, позволяющем обнаруживать двойные и исправлять единичные ошибки в кодовых комбинациях длиной $n = 9$.

Ответ: $r = 5$.

Задача 10.8 Закодировать сообщения источника, приведенные в таблице 10.1, двоичным кодом Хафмана. Оценить эффективность полученного кода.

Таблица 10.1

u_k	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
$p(u_k)$	0,1	0,2	0,25	0,05	0,25	0,15

Решение

В соответствии с алгоритмом построения кода Хафмана делаем последовательно следующие шаги:

1) располагаем сообщения источника в порядке убывания вероятностей;

2) образуем вспомогательный алфавит, объединяя наиболее маловероятные буквы u_1 и u_4 (m_o=2), тогда вероятность новой буквы равна $p_2 = p(u_1) + p(u_4) = 0,1 + 0,05 = 0,15$. Оставляем эту букву на месте, так *как* $p_1 = p(u_6)$;

3) объединяем первую вспомогательную букву и букву u_6 тогда вероятность второй вспомогательной буквы равна $P_2 = P_1 + P(u_6) = 0,15 + 0,15 = 0,3$; перемешаем ее вверх в соответствии с этой вероятностью;

4) объединение продолжаем до тех пор, пока в ансамбле не останется единственное сообщение с вероятностью единица.

Построение кода Хафмана приведено на рисунке 10.2.

Сообщения источника являются теперь концевыми узлами кодового дерева. Приписав концевым узлам значения символов 1 и 0, записываем кодовые обозначения, пользуясь следующим правилом: чтобы получить кодовое слово, соответствующее сообщению u_4, проследим переход u_4 в группировку с наибольшей вероятностью, кодовые символы записываем справа налево (от младшего разряда к старшему), получим 1100.

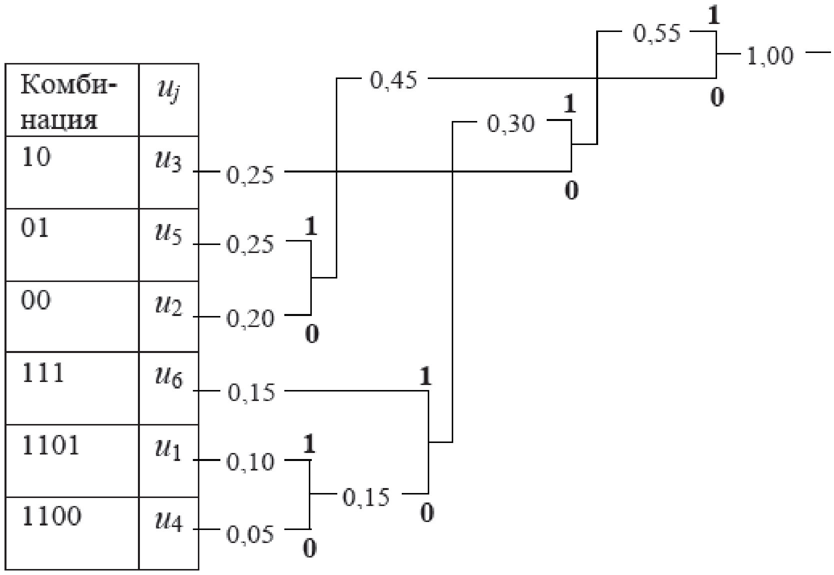

Рисунок 10.2 - Алгоритм построения кода Хафмана

Для сообщения u_1 - 1101 и т.д. (см. рисунок 10.2).

Оценим эффективность полученного кода.

Энтропия источника сообщений:

$I(U)=\sum p(u_k)log\ p(u_k)$=2ŋ(0.25) + ŋ(0.2) + ŋ(0.15) + ŋ(0.1) + ŋ(0.05) = 2.4232 на одну букву на выходе источника.

Средняя длина кодового слова (формула (4.2.3))

$L = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{lk} \cdot \mathrm{p(uk)} = 2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0.05 = 2{,}45.$

Для оценки эффективности кода используем коэффициент эффективности $\gamma = I\ (U)/(L\ log\ m)$.

Для оптимального двоичного кода $H(U) = L$ и $\gamma = 1$.

Полученный нами код имеет γ = 2.4232/2.45 = 0.9891, избыточность R=0,0109, т.е. код близок к оптимальному.

Задача 10.9 Сообщение источника *X* составляется из статистически независимых букв, извлекаемых из алфавита А, В. С с вероятностями 0.7; 0,2; 0,1. Произвести двоичное кодирование по методу Шеннона-Фано отдельных букв и двухбуквенных блоков. Сравнить коды по их эффективности.

Решение

Производим побуквенное кодирование методом Шеннона-Фано.

1) Располагаем буквы алфавита источника в порядке убывания вероятностей.

2) Делим алфавит источника на две (m = 2) примерно равновероятные группы. Всем сообщениям верхней группы (буква А) приписываем в качестве первого

кодового символа 1, всем сообщениям нижней группы приписываем символ 0.

3) Производим второе разбиение на две группы (буквы В и С) и снова букве в верхней группе (В) приписываем символ 1, а в нижней (С) в качестве второго символа кодового слова приписываем 0. Так как в каждой группе оказалось по одной букве, кодирование заканчиваем. Результат приведен в таблице 10.2.

Таблица 10.2

x_j	$P(x_j)$	Разбиения	Кодовое слово
A	0.7		1
B	0.2		01
C	0.1	—	00

Оценим эффективность полученного кода. Энтропия источника

I(O)= $-\sum_{k=1}^{s} p(x_k)\log_2 p(x_k) = \eta(0,7) + \eta(0,2) + \eta(0,1) = 1,1568.$

Средняя длина кодового слова

L = $\sum_{k=1}^{s} l_k\, p(x_k) = 0,7 * 1 + 0,2 * 2 + 0,1 * 2 = 1,3.$

Видим, что L > H(X),и коэффициент эффективности γ_1 = 1,1568/1,3 = 0,8898, а избыточность R_1 = 0,1102.

Покажем, что кодирование блоками по 2 буквы (k = 2) увеличивает эффективность кода. Строим вспомогательный алфавит из N = 3^2 блоков. Вероятности блоков находим как произведения вероятностей букв, считая буквы исходного алфавита независимыми. Располагаем блоки в порядке убывания вероятностей и осуществляем кодирование методом Шеннона-Фано. Все полученные двухбуквенные блоки, вероятности их и соответствующие кодовые обозначения сведены в таблице 10.3.

При блоковом кодировании средняя длина кодового слова на одну букву

$L_2 = L/2$ = 0.5(1·0.49 + 3·2·0.14 + 4·2·0.07 + 4·0.04 +5·0.02 + 6·0.02 + 6·0.01) = 1.165.

При этом коэффициент эффективности

γ_2 =*Í(Ŏ)*/L_2 =1.1568/1.165 = 0.9955.

Избыточность при двухбуквенном кодировании R_2=0,0045. Получили $\gamma_2 > \gamma_1$, $R_2 \ll R_1$ что и требовалось показать.

Таблица 10.3

Двухбуквенные блоки	Вероятности	Разбиения	Кодовые слова
AA	0,49		1
AB	0,14		011
BA	0,14		010
AC	0,07		0011
CA	0,07		0010
BB	0,04		0001
BC	0,02		00001
CB	0,02		000001
CC	0,01		000000

Задача 10.10 Определите среднюю длину кодового слова и ее нижнюю границу, а также вероятность появления нулей P(0) и единиц P(1), при передаче сообщений длиной μ_i и вероятностями появления сообщений $P(x_i)$, указанными в таблице 10.4.

Таблица 10.4

Сообщение	$P(x_i)$	Код	μ_i
x_1	0.4	11	2
x_2	0.3	10	2
x_3	0.2	010	3
x_4	0.1	0001	4

Решение

Среднюю длину кодового слова определим из выражения

$$L=\sum_{i=1}^{4} \mu_i P(\,x_i).$$

Подставив значения μ_i и $P(x_i)$ из таблицы, получим:

$L = 2 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 0,8 + 0,6 + 0,6 + 0,4 = 2.4.$

Среднее число нулей

$L(0) = \sum_{i=1}^{4} \mu_{i0} P(x_i) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 0,3 + 0,4 + 0,3 = 1.$

Вероятность появления нулей $P(0) = L(0)/L = 1/2,4 = 0,417$.

Среднее число единиц

$L\,(1) = \sum_{i=1}^{4} \mu_{i1} P(x_i) = 2 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 0,8 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1,4$

.

Вероятность появления единиц P(1) = L(1)/L = 1,4/2,4 = 0,583.

Определим нижнюю границу средней длины кодового слова из выражения:

$$L \geq \frac{H(X)}{\log m} = \frac{-(0.4\log 0.4 + 0.3\log 0.3 + 0.2\log 0.2 + 0.1\log 0.1)}{\log 2} =$$

$$= \frac{0{,}529 + 0{,}521 + 0{,}464 + 0{,}332}{1} = 1{,}846.$$

Задача 10.11 Для передачи по каналу связи без шумов используется код. состоящий из двух букв a_1 и a_2 появляющиеся с вероятностями $P(a_1) = 0{,}9$ и $P(a_2) = 0{,}1$ соответственно. Применить метод Шеннона-Фано к кодированию всевозможных однобуквенных. двухбуквенных и трехбуквенных сообщений. Определить среднюю длину в каждом случае и результаты сравнить между собой.

Решение

Определим энтропию сообщений

$H(A) = -0{,}9 \cdot \log 0{,}9 - 0{,}1 \cdot \log 0{,}1 = 0{,}469.$

Применяя метод Шеннона-Фано к двухбуквенному алфавиту получаем простейший код (таблица 10.5).

Код Шеннона-Фано для однобуквенных сообщений:

Таблица 10.5

Буква	Вероятность	Код
a_1	0,9	1
a_2	0,1	0

Этот код требуется для передачи каждой буквы одного двоичного символа (L=1), что на 53% больше минимально возможного значения H(A)=0,469.

Применим метод Шеннона-Фано к кодированию всевозможных двухбуквенных комбинаций (таблица 10.6).

Таблица 10.6

Сообщение	Вероятность	Код
a_1a_1	0,81	1
a_1a_2	0,09	01
a_2a_1	0,09	001
a_2a_2	0,01	000

Средняя длина кодового слова равна L= 1·0,81+2·0,09+3·0,09+3·0,01=1,29 бит.

Таким образом, на одну приходится 1,29/2 = 0,645 бит, что лишь на 76% больше значения 0,469.

Произведем кодирование всевозможных трехбуквенных комбинаций (таблица 10.7).

Таблица 10.7

Сообщение	Вероятность	Код	Сообщение	Вероятность	Код
$a_1a_1a_1$	0,729	1	$a_1a_2a_2$	0,009	00011
$a_1a_1a_2$	0,081	011	$a_2a_1a_2$	0,009	00010
$a_1a_2a_1$	0,081	010	$a_2a_2a_1$	0,009	00001
$a_2a_1a_1$	0,081	001	$a_2a_2a_2$	0,001	00000

Средняя длина кодового слова здесь равна
L = 0,729 + 3 ·0,081 + 3 · 0,081 + 3 · 0,081 + 5 · 0,009 + 5 · 0,009 + 5 · 0,009 + 5 · 0,001 = 1,598.

Таким образом, на одну букву текста приходится в среднем 1,598/3 = 0,532 бит, что только на 6,3% больше значения $H(A)$ = 0,469.

Ответ: кодирование блоками более выгодно, чем кодировать отдельные буквы.

XI ПРИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

Задача 11.1 Принимаемый сигнал можно представить в виде $s(k, t) = ku(t, \theta)$, где k – коэффициент передачи сигнала, θ – фазовый сдвиг.

Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала, полагая, что сигнал $u(t, \theta)$ точно известен в месте приема, а в канале действует гауссовский белый шум со спектральной плотностью мощности N_0. Найти распределение ошибки измерения, её математическое ожидание и дисперсию.

Решение

При гауссовском белом шуме функционал отношения правдоподобия определяется соотношением

$$l(z|k) = exp\left[\frac{2k}{N_0}\int_0^T z(t)u(t,\Theta)dt - \frac{k^2E}{N_0}\right],$$

где $E = \int_0^T u^2\,(t,\Theta)dt$ – энергия сигнала. Уравнение правдоподобия (7.5) в этом случае выглядит так:

$$\frac{d[\ln l(z|k)]}{dk} = \frac{2}{N_0}\int_0^T z(t)u(t,\Theta)dt - \frac{2k^2E}{N_0} = 0.$$

Решением уравнения будет величина

$$\hat{k} = \frac{1}{E}\int_0^T z(t)u(t,\Theta)dt,$$

которая представляет собой максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала при точно известном сигнале.

Оптимальный измеритель реализуется согласованным фильтром или коррелятором.

Так как $z(t) = ku(t,\Theta) + n(t)$. Имеем

$$\hat{k} = k + \frac{1}{E}\int_0^T n(t)u(t,\Theta)dt.$$

Следовательно, ошибка измерения

$$\varepsilon = \hat{k} - k = \frac{1}{E}\int_0^T n(t)u(t,\Theta)dt.$$

При гауссовском шуме с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности N_0 ошибка распределена нормально, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $D\lfloor E\rfloor = \frac{N_0}{2E}$.

Следовательно, полученная оценка является несмещенной (M[E] = 0), состоятельной ($D\lfloor E\rfloor = \frac{N_0}{2E} \to 0$ $при$ $T \to \infty, E \to \infty$). Поскольку при $E \to \infty$ $(D\lfloor E\rfloor \to 0$ оценка передачи канала является асимптотически эффективной, так как значение дисперсии ошибки, равное нулю, является минимально возможным.

Задача 11.2 На вход канала поступает сигнал u(t). Процесс на выходе канала на интервале анализа T можно представить в виде z(t) = ku(t) + n(t), где k – коэффициент передачи канала, n(t) – реализация гауссовского шума. Спектральная плотность мощности в полосе F равна N_0. Полагая, что параметры сигнала в месте приема известны точно, а z(t) анализируется в дискретные моменты t_i, кратные величине Δt = 1/(2f), найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала.

Решение

Используя (3.13), можно записать

$$w(z|k) = w(n) = \ k_1 exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [z(t) - ku(t)]^2 dt.\right\}$$

Учитывая, что анализ осуществляется в дискретные моменты t_i, находим

$$\ln w(z|k) = \ \frac{1}{2N_0F}\sum_{i=1}^{m} z^2(t_i) + \frac{1}{N_0F}\sum_{i=1}^{m} z(t_i)ku(t_i) - \frac{1}{2N_0F}\sum_{i=1}^{m} k^2u^2(t_i).$$

Составим уравнение правдоподобия:

$$\frac{\delta \ln w(z|k)}{dk} = \frac{1}{N_0F}\sum_{i=1}^{m} z(t_i)u(t_i) - \frac{k}{N_0F}\sum_{i=1}^{m} u^2(t_i).$$

Отсюда

$$\hat{k} = \sum_{i=1}^{m} z(t_i)u(t_i) / \sum_{i=1}^{m} u^2(t_i).$$

Задача 11.3 Энергетические спектры сигнала и аддитивного шума определены на положительных частотах соотношениями

$$G_s(f) = \begin{cases} \frac{Af}{F} \textit{при}\ 0 \le f \le F, \\ 0\ \textit{при}\ f > F, \end{cases}$$

$$G_n(f) = \begin{cases} A - \frac{Af}{f} \textit{при}\ 0 \le f \le F, \\ 0 \qquad \textit{при}\ f > F, \end{cases}$$

Определить коэффициент передачи (модуль) оптимального фильтра Колмогорова – Винера и найти энергетические спектры ошибки, полезного сигнала и шума на выходе фильтра, средние мощности этих компонент, а также параметр $\rho_{вых}$(отношение сигнал-шум).

Решение

Коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K_0(\omega) = \begin{cases} \frac{f}{F} \textit{при}\ 0 < f \ll F \\ 0 \quad \textit{при}\ f > F. \end{cases}$$

Согласно [12] энергетические спектры в полосе (0, F) равны: для сигнала ошибки $G_\varepsilon(f) = A\left(\frac{f}{F} - \frac{f^2}{F^2}\right)$, для полезного сигнала $G_{ys}(f) = A\frac{f^3}{F^3}$, для шума $G_{yn}(f) = A\left(\frac{f^2}{F^2} - \frac{f^3}{F^3}\right)$.

Средняя мощность сигнала ошибки

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^F G_\varepsilon(f)df = \frac{AF}{6}$$

Средняя мощность полезного сигнала

$$\overline{y_s^2} = \int_0^F G_{ys}(f)df = \frac{AF}{4}$$

Средняя мощность шума

$$\overline{y_n^2} = \int_0^F G_{yn}(f)df = \frac{AF}{12}, \rho_{вых} = 3$$

Задача 11.4. Найти опорные сигналы (базисные функции) на приеме $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, позволяющие осуществить разделение группового сигнала $\hat{\mathrm{s}}(\mathrm{t}) =$

$k[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)]$ двухканальной системы связи, в которой использованы канальные сигналы $s_1(t) = a_1\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $s_2(t) = a_2\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$, имеющие длительность $T \gg 2\pi/\omega_0$.

Решение

Найдем опорные сигналы $\{\eta_k(t)\}$. При этом должны выполняться следующие условия:

$$\frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\eta_1(t)dt \neq 0;\ \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\eta_1(t)dt = 0;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\eta_2(t)dt = 0;\ \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\eta_2(t)dt = 0;$$

т.е. опорный сигнал $\eta_1(t)$ ортогонален сигналу $s_2(t)$, а опорный сигнал $\eta_2(t)$ ортогонален сигналу $s_1(t)$. Так как ортогональность можно обеспечить сдвигом сигналов $\eta_i(t)$ и $s_k(t)(i \neq k)$ на угол $\pi/2$, получим

$$\eta_1(t) = \frac{A_1}{sin\Delta\varphi}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\eta_2(t) = \frac{A_2}{sin\Delta\varphi}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

где A_1 и A_2 – постоянные коэффициенты.

При $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\eta_1(t) = \frac{A_1}{sin\Delta\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \eta_2(t) = \frac{A_2}{sin\Delta\varphi}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. В этом случае опорные сигналы совпадают по фазе с сигналами индивидуальных каналов.

Задача 11.5 В отдельных каналах асинхронно-адресной системы с сигналами, заданными в предыдущей задаче, передаются речевые сообщения (полоса 0,3…3,4 кГц). Первичная модуляция осуществляется по системе ФИМ, причем девиация фронта импульса $\Delta t_{max} = 128\tau_u$, определить максимально возможную длительность посылки τ_u и полосу канального сигнала, имея в виду, что вторичная модуляция – АМ.

Решение

Каждый импульс, несущий информацию об отчете, передается в асинхронно-адресной системе посредством l -разрядной кодовой комбинации. Для многоканальной системы с ФИМ должно выполняться условие

$N[\Delta t_{max} + (l-1)\tau_u] = T_k = 1/(2F_{\max})$.

Полагая N=13400 , $F_{\max}$ = 3400 кГц , Δt_{max}= $128\tau_u$, $l = 17$, получаем

$$\tau_u = 0{,}5/(F_{max}N[l - 1 + 128] = 7.6 * 10^{-11}c$$

Полоса сигнала $F \approx \frac{2}{\tau_и} = 2.7 * 10^{10}\ Гц$

Задача 11.6 Определить наибольшее значение энергетической эффективности $\beta_{макс}$ при передаче сообщений в канале с аддитивным гауссовским белым шумом.

Решение

$$\beta_{макс} = \lim_{\gamma \to 0} \beta = \lim_{\gamma \to 0} \left(\frac{\gamma}{(2^{\gamma} - 1)} \right) = \frac{1}{ln2} = 1.443\ (1{,}59\ дБ)$$

Задача 11.7 Найти эквивалентную вероятность ошибки для 10-позиционной системы ЧМ и ФМ в случае оптимального когерентного приема $h^2 = 12.8$.

Решение

Известно, что для m-позиционной системы
$\rho_э = 1 - \left(1 - \rho_{ош,m}\right)^{1/log_2 m}$
При
$\rho_{ош,m} \ll 1 \rho_э \approx \rho_{ош,m}/1/log_2 m$
Теперь можем записать
$$\rho_{э,10\ ФМ} = \frac{9}{log_2 10} 0{,}5 \left[1 - \Phi\left(\sqrt{12{,}5}\right)\right] = 8{,}15 * 10^{-5}$$
$$\rho_{э,10\ ЧМ} = \frac{9}{log_2 10} 0{,}5 \left[1 - \Phi\left(\sqrt{12{,}5}\right)\right] = 6{,}32 * 10^{-3}$$
Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от системы ЧМ к системе ФМ в данном случае $\delta_{ФМ/ФМ} = 77{,}5$.

Задача 11.8 В полосе стандартного телефонного канала шириной F = 3100 Гц необходимо передавать информацию от независимых источников без избыточности с производительностью $H' = \frac{1}{T_{\Sigma}} = 50\ бит/с$.

Решение

В системе с согласованными фильтрами при использовании ортогональных в усиленном смысле реализаций отельных сигналов (для возможности приема в условиях неопределенной фазы сигнала) можно выбрать минимальный разнос между частотами $\Delta f = \frac{1}{T} = 50\ Гц$. Поэтому в полосе $F_{\Sigma} = 3100\ Гц$ можно разместить до 3100/50=62 реализаций, или до 31 двоичного канала.

Задача 11.9 По каналу передается сигнал $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t+\varphi_0)$. В канале действует гауссовский шум с равномерным энергетическим спектром N_0 в полосе F=l,l кГц. В результате наблюдения получено 11 независимых значений смеси сигнала и шума $z(t)$: z_1 = - $2,203*10^{-2}$ В; z_2 = $-1,104*10^{-1}$В; z_3 = $2,133*10^{-2}$В; z_4 = $1,746*10^{-1}$В; z_5 = $6,180*10^{-2}$В; z_6= $1,129*10^{-1}$ В; z_7= $1,770*10^{-1}$ В; z_8= -$1,285*10^{-1}$ В; z_9 = $7,215$-10^{-2} В; z_{10} = $-3,115*10^{-2}$ В; z_{11} = = $-6,702*10^{-2}$ В.

Найти максимально правдоподобную оценку амплитуды сигнала на выходе канала, если f_0= *47,1 кГц*, φ_0= 0, U_m = *0,1* В, а первое значение *z(t)* найдено при *t= 0*.

Задача 11.10 На вход канала со случайно изменяющимся фазовым сдвигом поступает сигнал $u(t) = U_m\cos(\omega t+ \varphi_0)$. В канале действует гауссовский шум со спектральной плотностью N_0 в полосе *F= 1,7* кГц. В результате наблюдения получено 10 независимых значений реализации смеси сигнала и шума *z(t):*

$Z_1(t) = 1,05*10^{-2}$ $z_2(t) = -9,01*10^{-3}$ $z_3(t) =8,15*10^{-3}$

$z_4(t) = 1,15*10^{-2}$ $z_5(t) = 1,19*10^{-3}$ $z_6(t) =-6,51*10^{-3}$

$z_7(t)=7,18*10^{-2}$ $z_8(t)=3,16*10^{-2}$ $z_9(t)=-2,10*10^{-3}$

$z_{10}(t) = 1,16*10^{-2}$

отсчитанных в моменты *t*, кратные величине $\Delta t= 1/(2F)$. Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала *k*, если *f = 47,1* кГц, $\varphi_0 = 45°$, а первое значение *z(t)* найдено при *t= 0*, $N_0 = 10^{-4}$ Вт/Гц.

XII ПРИЕМ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Задача 12.1 По дискретному двоичному каналу связи с шумами передаются сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в виде импульсов тока с априорными вероятностями $P(S_1)$ и $P(S_2)$. Потери, обусловленные искажениями сигнала $S_1(t)$, составляют Π_{21} единиц, а искажениями сигнала $S_2(t)$ – Π_{12} единиц.

Определить:

1. Среднюю вероятность ошибки, используя критерий идеального наблюдателя.
2. Среднюю вероятность ошибки, используя критерий максимального правдоподобия.
3. Величину среднего риска, вызванного искажениями сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

Ответить также на вопрос о том, каким образом можно практически уменьшить величину среднего риска. Ответ должен сопровождаться рисунками: временными диаграммами, графиками плотностей вероятности сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с учетом наличия гауссовских шумов.

Исходные данные к задаче приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1 – Варианты исходных данных к задаче 12.1

№ вар.	σ^2, Вт	A_1, В	A_2, В	x_1, В	x_2, В	$P(S_1)$
1	0,1	0,9	0,001	0,0001	200	10
2	0,05	0,95	0,002	0,0001	150	5
3	0,15	0,85	0,003	0,0002	120	3
4	0,2	0,8	0,001	0,0002	250	5
5	0,9	0,1	0,0002	0,002	5	200
6	0,1	0,9	0,002	0,0001	250	4
7	0,05	0,95	0,001	0,0003	120	3
8	0,15	0,85	0,004	0,0002	200	2
9	0,2	0,8	0,001	0,0001	150	6
10	0,9	0,1	0,0003	0,001	4	150

Задача 12.2 На вход решающего устройства приемника поступает телеграфный сигнал и гауссовская помеха с дисперсией σ. Сигнал $S_1(t)$ представляет собой импульс прямоугольной формы длительностью T с амплитудой A_1, сигнал $S(t)$ представляет собой также импульс прямоугольной формы длительностью T и амплитудой A_2.

За время длительности сигнала T произведено два замера в моменты времени t_1 и t_2, причем $\Delta t = t_2 - t_1$ больше интервала корреляции помехи. Измеренные значения $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x(t_2)$ известны.

Найти отношение правдоподобия и принять решение о том, какой из сигналов выдает решающее устройство по критерию идеального наблюдателя для двух случаев:

$P(S_1) = P(S_2) = 0{,}5$ и $P(S_1) \neq P(S_2) \neq 0{,}5$.

Ответ должен сопровождаться подробными пояснениями и рисунками: временными диаграммами, графиками плотности вероятности сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с учетом наличия гауссовских шумов.

На этих рисунках показать значения x_1 и x_2.

Исходные данные к задаче приведены в таблице 12.2.

Таблица 12.2 – Варианты исходных данных к задаче 12.2

№ вар.	σ^2, Вт	A_1, В	A_2, В	x_1, В	x_2, В	$P(S_1)$
1	0,36	–0,6	0,6	–0,1	0,2	0,7
2	0,07	0	0,5	0,2	0,4	0,3
3	0,7	–0,7	0,7	–0,3	0,1	0,3
4	0,07	0	0,6	0,4	0,3	0,6
5	0,32	–0,8	0,8	0,2	–0,1	0,7
6	0,09	0	0,8	0,4	0,3	0,2
7	0,8	–0,5	0,5	–0,3	–0,1	0,3
8	0,06	0	0,5	0,1	0,3	0,15
9	0,32	–0,8	0,8	–0,2	0,4	0,8
10	0,09	0	0,6	0,4	0,1	0,3

Задача 12.3 На вход приемного устройства, оптимального по критерию идеального наблюдателя, поступает сигнал с ДАМ, ДЧМ, ДФМ или ДОФМ с амплитудой A_m и стационарный белый шум со спектральной плотностью N_0. Вероятности сигналов $P(S_1) = P(S_2) = 0{,}5$.

Скорость передачи в канале связи V Бод.

Вычислить и изобразить графически зависимости средней вероятности ошибки от амплитуды входного сигнала A_m.

Исходные данные к задаче приведены в таблице 12.3. При решении задачи рекомендуется задаться вероятностями ошибки 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}.

Таблица 12.3 - Варианты исходных данных к задаче 12.3

№ варианта	Способ модуляции	$N_0 \cdot 10^6$, Вт/Гц	V,Бод
1	ДАМ	150	1000
2	ДЧМ	150	1000
3	ДФМ	150	1000
4	ДОФМ	150	1000
5	ДАМ	200	800
6	ДЧМ	200	800
7	ДФМ	400	400
8	ДОФМ	200	800
9	ДАМ	300	600
10	ДЧМ	300	600

Задача 12.4 На вход приемного устройства, оптимального по критерию идеального наблюдателя, поступают сигналы с ДАМ, ДЧМ, ДФМ или ДОФМ с амплитудой A_m и стационарный белый шум со спектральной плотностью N_0.

Вероятности сигналов $P(S_1) = P(S_2) = 0{,}5$.

Скорость передачи в канале связи V Бод.

Найти вероятность искажения сигнала для заданного варианта задачи.

Исходные данные приведены в таблице 12.4.

Решение должно сопровождаться подробными пояснениями.

Таблица 12.4 - Варианты исходных данных к задаче 12.4

№ варианта	A_m, В	Способ модуляции	$N_0 \cdot 10^6$, Вт/Гц	V, Бод
1	1,7	ДЧМ	300	500
2	1,71	ДФМ	700	300
3	1,83	ДАМ	1000	150
4	2,31	ДАМ	300	800
5	1,44	ДОФМ	150	1000
6	1,52	ДФМ	600	400
7	2,58	ДЧМ	800	300
8	2,84	ДАМ	700	300
9	1,24	ДОФМ	400	400
10	0,82	ДФМ	1200	100

Задача 12.5. На вход приемного устройства, оптимального по критерию идеального наблюдателя, поступает сигнал с ДЧМ вида

$S_1(t) = 4\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$,

$S_2(t) = 4\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

Априорные вероятности сигналов $P(S_1) = P(S_2) = 0{,}5$.

Скорость передачи $V = 200$ Бод, причем $V << \omega_1$ и $V << \omega_2$, а $\omega_2 - \omega_1 >> V$ (сигналы ортогональны).

Стационарный белый (гауссовский) шум в канале связи имеет спектральную плотность $N_0 = 0{,}01$ Вт/Гц.

Требуется:

1. Вычислить эквивалентную энергию (энергию разности сигналов) $E_э$.
2. Вычислить энергию первого сигнала E_1.
3. Найти отношение эквивалентной энергии к энергии первого сигнала.
4. Определить среднюю вероятность ошибки, пользуясь найденной величиной $E_э$.
5. Записать алгоритм работы данного приемника и привести его структурную схему. Дать их краткое описание.
6. Пояснить, на что повлияет невыполнение каждого из неравенств, приведенных в условиях задачи.

Задача 12.6 По каналу связи без памяти передаются двоичные символы b_1 и b_2 с вероятностями $P(b_1)=0{,}6$; $P(b_2)=0{,}4$, причем символ b_1 определяется в месте приема на интервале T сигналом s_1 (t)=0, а символ b_2 — сигналом $s_2(t)=a$ (двоичная АИМ). В канале действует гауссовский стационарный шум с дисперсией $\delta^2 = = 10^{-4}$ Вт. Сигналы s_1 (t) = 0 и s_2 (t) = 10^{-2} В известны точно в месте приема. Какой символ зарегистрирует приемник, оптимальный по критерию минимума средней вероятности ошибки, принимающий решение по одному отсчету смеси $z(t) = s_i\ (t)+n(t)$ на интервале T, если в момент принятия решения $z = 0{,}008$ В? Изобразите структурную схему этого приемника.

Задача 12.7 Приемник по одному отсчету выносит решение в пользу символа b_1, если отсчет принимаемой реализации $z(t)$ больше порога U_0; в противном случае выносится решение в пользу символа b_2. Определить пороговое значение U_0 для приемника, оптимального по критерию минимума средней вероятности ошибки, если передаваемым двоичным символам b_1 и b_2, имеющим априорные вероятности $P(b_1)$ и $P(b_2)$, соответствуют канальные сигналы $s_1 = a$ и $s_2 = -a$, а в канале без памяти имеется гауссовский стационарный шум с дисперсией δ^2.

Задача 12.8 Сигнал $s(t)$ задается функцией

$$s(t) = \begin{cases} kt & \text{при } 0 \le t < T \\ 0 & \text{при } t > T,\ t < 0. \end{cases}$$

Построить график импульсной переходной характеристики фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$, при условии $t_0 = T$.

Задача 12.9 Определить минимальную вероятность ошибки приемника Котельникова при использовании m-позиционной системы ортогональных на интервале (0, *T*) сигналов с активной паузой в канале без памяти с аддитивным стационарным гауссовским белым шумом. Упростить результат для больших значений отношения сигнал-шум.

Задача 12.10 Определить среднюю вероятность ошибки при оптимальном приеме двоичных сигналов на фоне стационарного гауссовского белого шума в канале без памяти и анализе на интервале (0, *T*) при $P(b_1) \neq P(b_2)$. Записать выражение для средней вероятности ошибки в системе АМ (с пассивной паузой), ЧМ (с ортогональными сигналами) и ФМ (с противоположными сигналами).

Задача 12.11. По результатам предыдущей задачи составить выражение для средней вероятности ошибки в двоичных системах АМ, ЧМ (с ортогональными сигналами) и ФМ (с противоположными сигналами) при $P(b_1) = P(b_2)$ (передаваемые символы равновероятны). Построить графики $p_{\text{ам}}$, $p_{\text{чм}}$, $p_{\text{фм}}$ при изменении мощности передаваемого сигнала от 1 до 100 Вт, полагая, что коэффициент передачи канала $k = 10^{-2}$, длительность сигнала T = 10 мс, спектральная плотность мощности шума $N_0 = 10^{-7}$ Вт/Гц.

Список использованной литературы

1. Теория электрической связи: Учебник для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Ю. Н. Прохоров.— М.: Радио и связь, 1998. 432с.

2. Кловский Д. Д., Шилкин В. А., Теория электрической связи. Сборник задач и упражнений: Учебное пособие для вузов.— 2-е издание, переработанное и дополненное. — М.: Сов. радио, 1990. 280с.

3. Акулиничев Ю.П., Теория электрической связи, практикум. Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2008. 175с.

4. Алексеева Т.П. и др., Теория электрической связи (часть 1). Сборник задач. -М.: МТУСИ, 2000. 78с.

5. Макаров А. А., Резван И. И., Чиненков Л. А., Методические указания к практическим занятиям по курсу «Теория электрической связи» - Новосибирск: СибГАТИ, 1997. 84с.

6. Астрецов Д.В., Вострецова Е.В., Теория электрической связи в примерах и задачах. Учебно - методическое пособие – Екатеринбург: УГТУ - УПИ, 2006. 98с.

7. Баскаков С.И., Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М: Высшая школа, 2002. 212с.

СОДЕРЖАНИЕ