МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

КАФЕДРА ОБЩЕНАУЧНОЙ ПОДГОТОВКИ

Бородин А.В.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Методическое пособие

по проведению практических занятий

направление подготовки 10.03.01
Информационная безопасность

Ростов-на-Дону

2022 г.

Бородин А.В. «Теория информации». Методическое пособие по проведению практических занятий (направление подготовки 10.03.01 - Информационная безопасность); Ростов-на-Дону: Северо-Кавказский филиал МТУСИ. 2022. – 34 с.

Составитель: доцент кафедры ОНП Бородин А.В.

Издание рассмотрено и утверждено
на заседании кафедры ОНП
29.08.2022 года (протокол № 1)

Дисциплина «Теория информации» изучается студентами направления 10.03.01 Информационная безопасность.

Теория информации связана с изучением систем обработки и передачи информации, измерением количества информации, кодированием. Теория информации решает такие теоретические вопросы как, количественная оценка информации; анализ информационных характеристик источников сообщений и каналов связи и выявление возможности кодирования и декодирования сообщений, обеспечивающих максимально допустимую скорость передачи сообщений по каналу связи с помехами и без помех.

Принципы теории информации используются в различных областях науки и связано это с тем, что в основе своей эта теория математическая. Подход к исследованиям в других областях науки с позиций использования основных идей теории информации получил название теоретико-информационного подхода. Этот подход позволяет решать задачи в области исследования каналов передачи информации, определения оптимальных способов кодирования и декодирования, максимальной скорости передачи и пропускной способности каналов, а также другие важные задачи в области систем связи.

Данные методические указания предназначены для проведения практических работ по курсу «Теория информации» для студентов направления подготовки 10.03.01 Информационная безопасность. Методические указания содержат теоретические сведения, задания и вопросы для самопроверки. Вопросы и задачи, рассматриваемые в данных методических указаниях, являются важными для формирования профессиональных компетенций будущего специалиста в сфере информационной безопасности.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Числовые характеристики случайных процессов.

<u>Задача 1.1</u>

Случайный процесс характеризуется ФПВ (функцией плотности вероятности) вида:

W(x) = Ax при 0 < x < B.

Найти взаимосвязь между числами *A* и *B*, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса.

Решение

Запишем условия нормировки ФПВ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1;$$

$$\int_{0}^{B} Ax\;dx = \left.\frac{Ax^2}{2}\right|_0^B = \frac{AB^2}{2} = 1.$$

Это соотношение связывает *A* и *B*.

Начальные моменты распределения случайного процесса равны:

$$m_n = \int_0^B x^n W(x)dx = \int_0^B x^n Axdx = \frac{AB^{n+2}}{n+2}$$

Отсюда получаем, что момент первого порядка, т.е. среднее значение равняется $m_1 = 2B/3$, момент второго порядка $m_2 = B^2/2$.

Дисперсия случайного процесса равна:

$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = B^2/2 - 4B^2/9 = B^2/18.$

<u>Задача 1.2</u>

Случайный процесс характеризуется ФПВ вида:

$W(x) = h$ *при* $0 < x < 2$.

Определить h, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса.

ОТВЕТ: $h = 0{,}5$; $m_1 = 1$; $m_2 = 4/3$; $\sigma^2 = 1/3$.

<u>Задача 1.3</u>

Случайный процесс характеризуется ФПВ вида:

$W(x) = (nx + m + 1)$ при $0 < x < B$.

Определить B, рассчитать первый и второй начальные моменты распределения, определить дисперсию процесса, рассчитать ФРВ процесса.

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

<u>Задача 1.4</u>

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - $W(x)$;

б) Среднее значение и дисперсию;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал [0,25;0,75].

Решение

Находим функцию плотности вероятности:

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Строим графики найденных функций *F(x)* и *W(x)*.

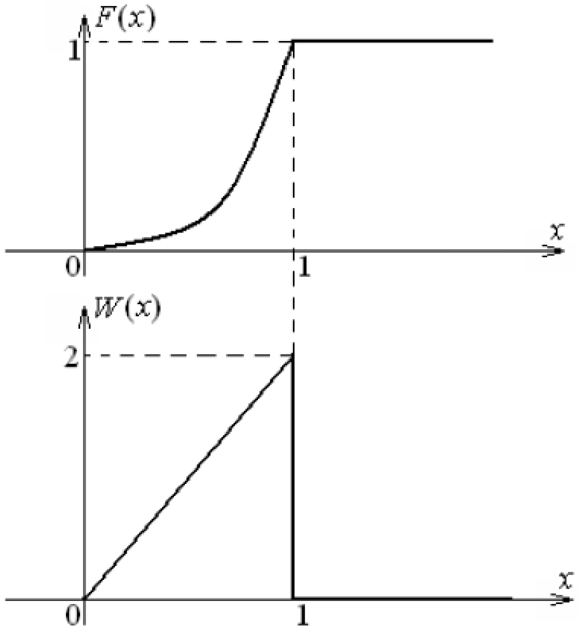

Рис.1.1. Графики функции распределения вероятности и функции плотности вероятности случайной величины x.

Для найденной функции *W(x)* проверяем условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = \int_{0}^{1} 2xdx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1$$

Находим среднее значение (математическое ожидание):

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = \int_{0}^{1} x \cdot 2xdx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3};$$

Далее находим момент второго порядка:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x)dx = \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2xdx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2};$$

По найденным значениям m_1 и m_2 находим дисперсию:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18};$$

Определяем вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$p\left[\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right] = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

<u>Задача 1.5</u>

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 \le x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - *W(x)*;

б) Среднее значение и дисперсию;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

<u>Задача 1.6</u>

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{4}x, & 2 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - *W(x)*;

б) Среднее значение и дисперсию;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал $[3,4]$.

Задача 1.7

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), & 1\le \mathrm{x}\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - *W(x)*;

б) Среднее значение и дисперсию;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$.

Задача 1.8

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 3x^2+2x, & 0\le \mathrm{x}\le \dfrac{1}{3}\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Требуется определить:

а) Плотность вероятности - *W(x)*;

б) Среднее значение и дисперсию;

в) Вероятность попадания данной случайной величины в интервал $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Функция корреляции и энергетический спектр случайного процесса. Теорема Винера-Хинчина.

Задача 2.1

Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = U_m cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

Решение

В данном случае удобно определить функцию корреляции путем усреднения по времени одной реализации

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \; \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos[\omega_0 (t+\tau) + \varphi] d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} U_m^2 \int_0^T [\cos\omega_0\tau + \cos\omega_0(2t + \tau + 2\varphi)] \, d\tau == 0{,}5 \cdot U_m^2 \cos\omega_0\tau$$

Второй интеграл равен 0, т.к. интеграл от косинуса дает синус, (т.е. функцию по модулю не больше 1). Деление такой функции на T, при T стремящемся к бесконечности, дает ноль.

Энергетический спектр процесса может быть найден путем преобразования Винера-Хинчина:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 0{,}5 U_m^2 \cos\omega_0\tau \cos\omega\tau \, d\tau =$$

$$= 0{,}5 U_m^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos\omega_0\tau \cos\omega\tau \, d\tau == 0{,}5 U_m^2 \; \delta(\omega - \omega_0)$$

Интеграл от произведения косинусов есть дельта-функция. Следовательно, энергетический спектр в данном случае равен 0 для всех частот за исключением частоты ω_0. Т.о. спектр содержит только одну частоту ω_0.

Задача 2.2

Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = 0{,}6 \cdot cos(2000t + \varphi),$$

где φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

ОТВЕТ: $B(\tau) = 0{,}18cos2000\tau$, $G(\omega) = 0{,}18\delta(\omega - 2000)$.

Задача 2.3

Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = 1{,}2 \cdot cos(2\pi 10^6 t + \varphi),$$

где φ - случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

ОТВЕТ: $B(\tau) = 0{,}72cos2\pi 10^6\tau$, $G(\omega) = 0{,}72\delta(\omega - 2\pi 10^6)$.

Задача 2.4

Реализации случайного процесса имеют вид:

$$u(t) = (m + 4) \cdot \cos(n \cdot 10^6 t + \varphi),$$

где φ – случайная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить функцию корреляции и энергетический спектр данного процесса.

Задача 2.5

Реализации АМ сигнала, модулированного случайным процессом, имеют вид:

$$u(t) = x(t)cos\,\omega_0 t,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с заданной корреляционной функцией $b(\tau)$, равной:

$$b(\tau) = 8 \cdot exp(-2\tau).$$

Определить функцию корреляции процесса $u(t)$, его энергетический спектр и ширину энергетического спектра.

Решение

В соответствии с определением функции корреляции выполним усреднение по множеству реализаций процесса $u(t)$ для определения функции корреляции процесса $u(t)$:

$$B(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}\cos\omega_0 t\,\cos\omega_0(t+\tau) = b(\tau)\cos\omega_0 t\,\cos\omega_0(t+\tau) =$$
$$= 8\exp(-2\tau)\cos\omega_0 t\,\cos\omega_0(t+\tau) = 4\exp(-2\tau)[\cos\omega_0\tau + \cos\omega_0(2t+\tau]$$

Черта сверху означает усреднение по множеству реализаций процесса $x(t)$. Мы видим, что функция корреляции зависит от времени, поэтому необходимо усреднить выражение для функции корреляции $B(\tau,t)$ по времени. После усреднения по времени останется только первое слагаемое в сумме, т.к. среднее значение второго слагаемого равно 0:

$$B(\tau) = 4exp(-2\tau)\ cos\omega_0\tau.$$

Энергетический спектр заданного процесса находим, используя преобразование Винера-Хинчина:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 4exp(-2\tau)\cos\omega_0\tau\,\cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^\infty exp(-2\tau)\cos\omega_0\tau\,\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{2}{\pi[4+(\omega_0-\omega)^2]};$$

$$\textit{примечание}: \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

Ширину спектра процесса найдем в соответствии с выражением:

$$П_э = \frac{\int_0^\infty G(\omega)d\omega}{G(\omega_0)} = 2\pi\ рад/с.$$

Задача 2.6

Реализации АМ сигнала, модулированного случайным процессом, имеют вид:

$$u(t) = x(t)\cdot cos\omega_0 t,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с заданной корреляционной функцией $b(\tau)$, равной:

$$b(\tau) = 4exp(-4\tau).$$

Определить функцию корреляции процесса $u(t)$, его энергетический спектр и ширину энергетического спектра.

ОТВЕТ: $B(\tau) = 2exp(-4\tau)cos\omega_0\tau$, $G(\omega) = 1/\pi[16 - (\omega - \omega_0)^2]$, $П_э = 4\pi$ рад/с.

Задача 2.7

Реализации АМ сигнала, модулированные случайным процессом, имеют вид:

$$u(t) = x(t)\cos\omega_0 t,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с заданной корреляционной функцией $b(\tau)$, равной:

$$b(\tau) = (m + 5)exp(-n\tau).$$

(m – предпоследняя цифра, n – последняя цифра номера студенческого билета).

Определить функцию корреляции процесса $u(t)$, его энергетический спектр и ширину энергетического спектра.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Информационные характеристики дискретных источников

Сообщения, энтропия которых максимальна, переносит максимальное количество информации. Т. е. эти сообщения являются оптимальными с точки зрения наибольшего количества передаваемой информации. Энтропия источника сообщений максимальна (и, следовательно, он вырабатывает максимальное количество информации в среднем на один символ), когда все символы алфавита источника равновероятны и независимы.

Основными информационными параметрами дискретных источников сообщений являются ***энтропия, избыточность*** и ***производительность***.

Энтропия дискретных источников сообщений

<u>Задача 3.1</u>

С целью определения того какой из двух источников «информативнее» определяют энтропию *H(X)* каждого из них и полученные значения сравнивают между собой.

Первый источник сообщения выдает 5 равновероятных сообщений. Второй источник выдает пять сообщений со следующим рядом распределения вероятностей:

$p(x_1)=0,1$ $p(x_2)=0,15$ $p(x_3)=0,2$ $p(x_4)=0,25$ $p(x_5)=0,1$ $p(x_1)=0,3$.

Используя выражения для определения энтропии дискретных событий, получим:

а) для первого источника

$$H_1(X) = -\sum_{i=1}^{5} p(x_1)\log_2 p(x_1) = 0,2 \cdot \log_2 0,2 = 2,3219 \text{ [бит]}$$

б) для второго источника

$$H_2(X) = -\sum_{i=1}^{5} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -[0,1 \cdot \log_2 0,1 + 0,15 \cdot \log_2 0,15 + 0,2 \cdot \log_2 0,2 +$$

$$+0,25 \cdot \log_2 0,25 + 0,3 \cdot \log_2 0,3] = 2,2282 \text{ [бит]}$$

Таким образом, так как энтропия первого источника сообщений больше второго, то можно сделать вывод: первый источник «информативнее» второго.

Сравнение полученных значений $H_1(X) > H_2(X)$ энтропий для первого и второго источников показывает, что энтропия максимальна, если сообщения равновероятны.

Еще меньшей будет энтропия при наличии корреляции (связи) между сообщениями (элементами сообщений).

Избыточность дискретных источников сообщений

Проанализируем алфавит русского языка. Если не делать различий между буквами «е» и «ё», твердым и мягким знаками, то можно считать, что в русском алфавите содержится 31 буква. С учетом того, что между отдельными словами необходим знак «пробел» нужно передавать 32 символа.

Считаем символы равновероятными и независимыми, и средняя энтропия на символ будет максимальна и равна

$$H_{\max}(X) = -\log_2 32 = 5 \text{ [бит/символ]}.$$

Т.е. каждая буква представима 5-ю битами.

Если буквы передаются не хаотически, а составляют связный текст, то появление их неравновероятно (вероятность появления буквы "О" в 45 раз больше, чем буквы "Ф"). Энтропия при этом уменьшается. Для русского языка с учетом различных вероятностей появления букв (символов) $H_1(X)$=4,39[бит/символ].

Помимо неравновероятности появления букв, буквы в тексте зависимы. Так, после гласных не может появиться "Ь", мала вероятность сочетания более трёх согласных подряд. Например, после сочетания «ПР» наиболее вероятно появление одной из гласных «И», «О», «Е». Таким образом, зная одну предыдущую букву, можно предугадать какой будет последующая буква.

Поэтому ее появление не представит большой неожиданности или новизны. С учетом связи между двумя символами энтропия уменьшается до значения $H_2(X)$=3,52[бит/символ]. Между тремя символами - до значения $H_3(X)$=3,05[бит/символ]. И, наконец, между восемью символами - до значения $H_8(X)$=2 [бит/символ], и далее остается неизменной.

При неизменном объеме информации, приходящейся в среднем на одно сообщение, уменьшение энтропии H относительно ее максимально возможного при данном алфавите значения H_{max}, вызывает необходимость увеличения количества символов, необходимых для передачи одного сообщения. При энтропии H оказалось необходимо в среднем на одно сообщение m символов. Вместе с тем при передаче сообщения с энтропией

$H < H_{max}$, необходимо увеличить число символов на величину k, т.е. передавать $(m+k)$ символов в среднем на сообщение. Число символов k называют **избыточным**.

Мера возможного сокращения (без потери информации) сообщения, например вследствие использования статистических взаимосвязей между его элементами, называется **избыточностью** сообщения. Количественно избыточность оценивают отношением числа избыточных символов k в сообщении k их общему числу $(m+k)$

$$r = \frac{k}{m+k} \quad \text{или}$$

$$r = \frac{H(x)_{\max} - H(x)}{H(x)_{\max}} = 1 - \frac{H(x)}{H(x)_{\max}}$$

Для русского языка избыточность составляет

$$r = \frac{H(x)_{\max} - H_p(x)}{H(x)_{\max}} = \frac{5-2}{5} = 0,6$$

Избыточность показывает, какая часть букв в слове не загружена информацией.
Заметим, что избыточность величина безразмерная.

Производительность дискретных источников сообщений

Некоторые источники передают сообщения с фиксированной скоростью передачи каждого элемента, затрачивается в среднем время T на каждое сообщение. Производительностью источника называется суммарная энтропия сообщений передаваемых за единицу времени. Математически это определение записывается в следующем виде

$$H'(X) = \frac{H(X)}{T} \text{ [бит/с]}.$$

Задача 3.2

На выходе двоичного источника информации элементы «0» и «1» появляются с вероятностями соответственно *p* и *(1-p)*. При каком значении *p* энтропия источника максимальна? Построить график зависимости энтропии от вероятности *H(p)* для двоичного источника.

ОТВЕТ: $p = 0{,}5$;

Рис.3.1 График зависимости энтропии от вероятности *H(p)* для двоичного источника.

Задача 3.3

Источник сообщений выдает символы из ансамбля $A=\{\alpha_i\}$ (где i = 1,2,3,4,5) с вероятностями, представленными в таблице в зависимости от последней цифры шифра.

вероятность	последняя цифра шифра студенческого билета									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$p(\alpha_1)$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1	0,2	0,45	0,15	0,2	0,05
$p(\alpha_2)$	0,3	0,2	0,35	0,2	0,45	0,25	0,15	0,4	0,11	0,45
$p(\alpha_3)$	0,25	0,15	0,1	0,3	0,25	0,35	0,2	0,1	0,45	0,25
$p(\alpha_4)$	0,15	0,1	0,1	0,15	0,1	0,05	0,15	0,15	0,05	0,15
$p(\alpha_5)$	0,1	0,25	0,2	0,2	0,1	0,15	0,05	0,2	0,3	0,1

Найти количество информации, содержащейся в каждом из символов источника при их независимом выборе (источник без памяти). Вычислить энтропию и избыточность заданного источника.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Эффективное кодирование дискретных источников без памяти

Задача 4.1

Определите количество информации в сообщении, переданном с помощью равномерного кода.

Пусть для передачи сообщения *«DANKE»* используются следующие кодовые слова равномерного кода:

A → (000)
K → (010)
N → (001)
D → (111)
E → (100)

Для построения этого кода использовались символы двоичного источника X = {0,1}. Кодированному сообщению *«DANKE»* соответствует последовательность независимых символов $x_i \in \{0,1\}$:

DANKE → (111000001010100)

Пусть символы источника x_i передаются с вероятностью $p_i = 0,5$. Количество информации в этом сообщении равно

$$I = \log_2 \frac{1}{p(x_1 \ldots x_{15})} = \log_2 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}} = -\log_2 2^{-15} = 15 \text{ бит.}$$

Задача 4.2

Определите количество информации в сообщении, переданном с помощью неравномерного кода.

Пусть для передачи сообщения *«DANKE»* используются следующие кодовые слова неравномерного кода:

A → (00)
K → (10)
N → (010)
D → (110)
E → (111)

Сообщению *«DANKE»* соответствует последовательность двоичных символов:

$DANKE \rightarrow (1100001010111)$

Количество информации в этом сообщении равно

$$I = \log_2 \frac{1}{p(x_1 ... x_{13})} = \log_2 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}} = -\log_2 2^{-13} = 13 \text{ бит.}$$

Из задач 4.1 и 4.2 следует вывод: неравномерный код более эффективный. Для передачи сообщения с использованием неравномерного кода потребовалось 13 бит. При равномерном кодировании того же сообщения затрачено 15 бит.

Основная идея эффективного кодирования базируется на использовании коротких кодовых слов для событий, характеризующихся высокой вероятностью. В этом случае уменьшается средняя длина закодированных сообщений. при этом должно обеспечиваться однозначное декодирование (желательно без введения дополнительных символов – меток синхронизации между кодовыми словами).

Код является эффективным, если он имеет наименьшую возможную среднюю длину кодового слова.

Многие алгоритмы эффективного кодирования в качестве однозначно декодируемого кода используют префиксные моментальные коды.

Префиксный код – это множество кодовых слов, в котором каждое кодовое слово не совпадает с началом более длинного слова.

Кодовую конструкцию моментального кода удобно иллюстрировать с помощью кодового дерева. Кодовое дерево имеет начальную точку отсчёта (корень). Из этой точки начинаются одна или две ветви. Ветвям присваиваются значения символов 0 и 1. Слева располагаются ребра, соответствующие символу 0, справа – ребра, соответствующие символу 1. Ветви заканчиваются промежуточными узлами. Затем из этих узлов строятся ещё одна или две ветви и т.д., пока не будет изображен конечный узел, соответствующий каждому символу источник – кодовому слову. Кодовое слово получается в результате движения по ветвям от корня и записи символов 0 и 1 ветвей. Для однозначно декодируемого кола не должно конечных узлов на более длинном пути, заканчивающемся узлом, т.е. кодовым словом.

Задача 4.3

Пусть символы источника задаются множеством $X = \{A,K,N,D,E\}$. Для кодирования источника используем префиксный код со словами:

A → (00)
K → (10)
N → (010)
D → (110)
E → (111)

Требуется построить кодовое дерево данного неравномерного кода.

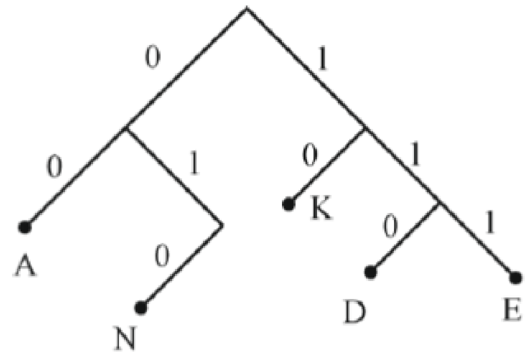

Рис.4.1. Кодовое дерево неравномерного префиксного кода

Черные точки (конечные узлы дерева) соответствуют словам кода.

Изображение кодового дерева равномерного кода из задачи 4.1

A → (000)
K → (010)
N → (001)
D → (111)
E → (100)

Показано на рис.4.2.

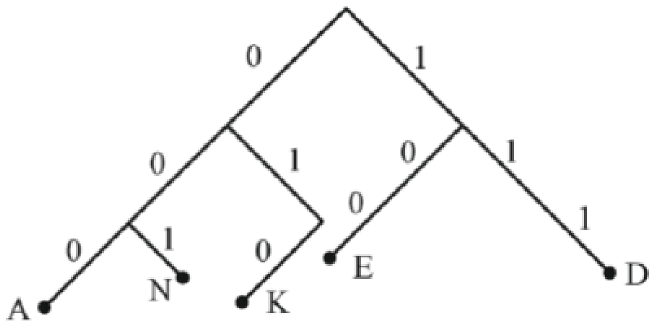

Рис.4.2. Кодовое дерево равномерного кода

Для ответа на вопрос, будет ли предполагаемое множество кодовых слов кода при декодировании точно соответствовать исходной информации источника, применяется неравенство Крафта.

Для построения однозначно декодируемого q-ичного кода, содержащего m кодовых слов с длинами n_1, n_2, ..., n_m, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство Крафта:

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-n_i} \le 1,$$

где q обозначает число разных символов(размерность) кодового алфавита.

Для двоичного алфавита (q=2):

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-n_i} = \sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i} = 2^{-n_1} + 2^{-n_2} + \ldots + 2^{-n_m} \le 1$$

Неравенство Крафта для двоичного равномерного кода имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i} = m2^{-n} \le 1.$$

Например, для m=3, n=2 имеем

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i} = 2^{-n_1} + 2^{-n_2} + 2^{-n_3} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} = 3 \cdot 2^{-2} = \frac{3}{4} < 1$$

Задача 4.4

Используются следующие кодовые слова длиной n = 3 равномерного кода:

A → (000)
K → (010)
N → (001)
D → (111)
E → (100)

Удовлетворяет ли код неравенству Крафта?

Решение.

Так как $n_1 = n_2 = \ldots = n_5 = n = 3$, $m = 5$, то

$$m2^{-n} = 5 \cdot 2^{-3} = \frac{5}{8} < 1.$$

Данный код однозначно декодируемый.

<u>Задача 4.5</u>

Пусть для кодирования используется префиксный код со словами:

A → (00)
K → (10)
N → (010)
D → (110)
E → (111)

Удовлетворяет ли код неравенству Крафта?

Решение.

Так как $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = n_4 = n_5 = 3$, $m = 5$, то

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{-n_i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1.$$

Данный код однозначно декодируемый.

<u>Задача 4.6</u>

Определите среднюю длину кодового слова равномерного кода.

Мерой эффективности кода является его средняя длина кодовых слов:

$$L_n = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot l_i,$$

где m – число символов источника с n-кратным расширением источника одиночных символов;

$p_1, \ldots, p_m$ – вероятности символов;

$l_1, \ldots, l_m$ – длина соответствующих кодовых слов.

Пусть для передачи сообщения *«DANKE»* используются следующие кодовые слова равномерного кода:

A → (000)
K → (010)
N → (001)
D → (111)
E → (100)

Для построения кода используются символы двоичного источника $X = \{0,1\}$. Пусть код характеризуется вероятностями $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0{,}2$.

Код имеет среднюю длину

$$L_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{5} \cdot l_i = \frac{15}{5} = 3.$$

Задача 4.7

Пусть для передачи сообщения *«DANKE»* используются следующие кодовые слова неравномерного кода:

A → (00)
K → (10)
N → (010)
D → (110)
E → (111)

Для построения кода используются символы двоичного источника $X = \{0,1\}$. Пусть код характеризуется вероятностями $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0,2$. Код имеет среднюю длину

$$L_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{5} \cdot l_i = \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 2,6.$$

Очевидно, более эффективной является та информационная система, которая использует коды с минимально возможными длинами кодовых слов.

Задача 4.8

Построить кодовое дерево кода $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$, где $x_1 = (01)$, $x_2 = (00)$, $x_3 = (111)$, $x_4 = (110)$, $x_5 = (100)$, $x_6 = (1011)$, $x_7 = (10101)$, $x_8 = (10100)$.

Задача 4.9

Является ли код однозначно декодируемым?

A → (00)
K → (10)
D → (101)
E → (111)

Постройте кодовое дерево кода.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Информационные характеристики непрерывных источников.

Пусть *x(t)* – реализация непрерывного сообщения на входе канала связи; $P_1(x)$ – одномерная плотность вероятности входных сообщений. Тогда будут иметь место следующие выражения:

1. Энтропия источника непрерывных сообщений:

   $$I(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} P_1(x) \cdot \log P_1(x) dx - \log \Delta x,$$

   где Δx – интервал квантования (точность измерения).
2. Дифференциальная энтропия источника непрерывных сообщений

   $$h(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} P_1(x) \cdot \log P_1(x) dx,$$

   определяющая количество информации в битах.
3. Максимальная дифференциальная энтропия источника непрерывных сообщений

   $$h(x)_{\max} = \log \sqrt{2\pi e} \cdot \sigma,$$

   которая имеет место при нормальной плотности распределения случайного процесса.

   $$P_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\left(x - a^2\right)}{2\sigma^2}\right],$$

   где σ^2 – дисперсия этой величины; *e* – основание натурального логарифма; *a* – математическое ожидание случайной величины.

Задача 5.1

Случайная величина *x* равномерно распределена между значениями *a* и *b*, $a > 0$, $b > 0$. Найдите выражение для дифференциальной энтропии процесса.

Решение.

Из условия задачи вытекает, что

$P(x) = \frac{1}{b-a}$, следовательно,

$$h(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \log \frac{1}{b-a} dx = \log(b-a) \text{ бит.}$$

Задача 5.2

По линии связи передается непрерывный амплитудно-модулированный сигнал *x(t),* распределённый по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 0$ и дисперсией $\sigma^2 = 8$ В^2. Определите энтропию *I(x)* сигнала при точности его измерения $\Delta x = 0{,}2$ *В*.

Решение.

$$I(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} P_1(x) \cdot \log P_1(x) dx - \log \Delta x = h(x) - \log \Delta x =$$

$$= \log \frac{\sqrt{2\pi e \sigma^2}}{\Delta x} = \log 58{,}56 \approx 5{,}87 \text{ бит.}$$

Задача 5.3

Измерительное устройство вырабатывает временные интервалы, распределенные случайным образом в пределах от 100 до 500 мс. Как изленится энтропия случайной величины при изменении точности измерения с 1 мс до 1 мкс?

Задача 5.4

Плотность вероятности случайного процесса *x(t)* имеет вид

$$P_1(X) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0.$$

Найдите дифференциальную энтропию величины *X*.

Задача 5.5

Найдите дифференциальную энтропию случайной величины $Y = A\sin\omega t$, где t равномерно распределено в интервале от $-\frac{\pi}{\varpi}$ до $\frac{\pi}{\varpi}$, A и ω – положительные постоянные.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

Математическая модель и информационные характеристики дискретных каналов связи.

Как показано на рис.6.1, передаваемое сообщение $\{x_i\}, i=\overline{1,m}$,под влиянием помехи *n(t)* на выходе канала связи преобразуется в сообщение $\{y_j\}, j=\overline{1,m'}$.

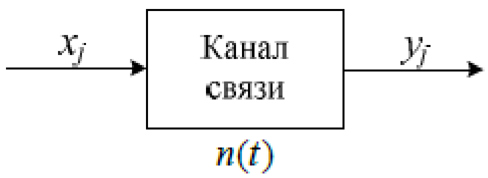

Рис.6.1 Модель дискретного канала.

Если дискретный стационарный канал без памяти, то $m=m'$ и длительности символов τ на выходе и входе канала одинаковы. Тогда скорость передачи информации как среднее количество информации, получаемое в единицу времени, определяется выражением

$$R = F \cdot I(X;Y),$$

где $F = 1/\tau$ – частота посылки символа; $I(X;Y)$ – среднее количество взаимной информации в множестве символов $X=\{x_i\}$ относительно символов $Y=\{x_j\}$:

$$I(X;Y) = H(X) + H(X/Y) = H(Y) + H(Y/X).$$

H(X/Y) – условная энтропия множества символов *X* при данном множестве *Y*, определяющая среднее количество потерянной информации из-за влияния помех;

H(Y/X) – условная энтропия множества символов *Y* при данном множестве X, определяющая шумовую энтропию;

H(Y) – энтропия множества символов *Y*:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{m} P(x_i) \sum_{j=1}^{m} P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i);$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j) \log P(y_j);$$

$$P(y_j)=\sum_{i=1}^{m}P(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{m}P(x_i)P(y_i/x_i),$$

где $P(y_i/x_i)=\begin{cases}P_{ош}, i\neq j\\ 1-P_{ош}, i=j.\end{cases}$

$P_{ош}$ – вероятность ошибки воспроизведения символа x_i.

Скорость передачи информации определяется формулой:

$$R=F\left[H(Y)-H(Y/X)\right] \text{бит/с.}$$

Пропускная способность дискретного канала связи определятся следующим выражением:

$$C=F_k\left[H_{\max}(X)-H(X/Y)\right]=F_k\left[H_{\max}(Y)-H(Y/X)\right],$$

где $F_k\geq F$, F_k – полоса канала, F = 1/τ.

В каналах без помех $H(Y/X)$ = 0.

Задача 6.1

По двоичному симметричному каналу связи с помехой передаются сигналы x_1 и x_2 с априорными вероятностями $P(x_1)$=0,75 и $P(x_2)$=0,25. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов уменьшилась до 7/8. Считая длительность каждого сигнала τ = 1 мс, определить $H(x)$, $H(x)_{\max}$, r, $I(X,Y)$, R,C.

Решение.

$$H(X)=-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}=0,315+0,5=0,815 \text{ бит.}$$

Максимальная энтропия

$$H(X)_{\max}=\log 2=1 \text{ бит.}$$

Коэффициент избыточности

$$r=\frac{H(X)_{\max}-H(X)}{H(X)_{\max}}=1-\frac{H(X)}{H(X)_{\max}}=1-\frac{0,815}{1}=0,185.$$

Среднее количество взаимной информации получим, вычислив

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} P(y_j) \log P(y_j),$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P(x_i) P(y_j / x_i) \log P(y_j / x_i),$$

$$P(y_1) = P(x_1) \cdot P\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + P(x_2) \cdot P\left(\frac{y_1}{x_2}\right)$$

$$P(y_2) = P(x_1) \cdot P\left(\frac{y_2}{x_1}\right) + P(x_2) \cdot P\left(\frac{y_2}{x_2}\right)$$

$$P\left(\frac{y_j}{x_i}\right) = \begin{cases} 7/8, & i = j \\ 1/8, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом,

$$P(y_1) = 3/4 \cdot 7/8 + 1/4 \cdot 1/8 = 11/16$$

$$P(y_2) = 3/4 \cdot 1/8 + 1/4 \cdot 7/8 = 5/16$$

$$H(Y) = -\frac{11}{16}\log\frac{11}{16} - \frac{5}{16}\log\frac{5}{16} \approx 0,89$$

$$H(Y/X) = -P(x_1)\left[P\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\log P\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + P\left(\frac{y_2}{x_1}\right)\log P\left(\frac{y_2}{x_1}\right)\right] -$$

$$-P(x_2)\left[P\left(\frac{y_1}{x_2}\right)\log P\left(\frac{y_1}{x_2}\right) + P\left(\frac{y_2}{x_2}\right)\log P\left(\frac{y_2}{x_2}\right)\right] =$$

$$= -P\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\log P\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - P\left(\frac{y_2}{x_2}\right)\log P\left(\frac{y_2}{x_2}\right) = -\frac{7}{8}\log\frac{7}{8} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \approx 0,55.$$

Скорость передачи информации

$$R = 10^{-3}\left[0,89 - 0,55\right] = 340 \text{ бит/с}.$$

Пропускная способность канала связи:

$$C \geq 1/10^{-3}\left[1 - 0,55\right] = 450 \text{ бит/с}.$$

Задача 6.2

Алфавит сообщения состоит из двух букв: X_1 ($P(x_1)$ = ¾) и X_2 ($P(x_2)$ = ¼). Определите энтропию источника и коэффициент избыточности, если условная вероятность $P(x_j/x_i)$ появления j-й буквы после i-й задана в таблице:

i	j	
	x_1	x_2
i_1	0,2	0,8
i_2	0,6	0,4

С учетом априорных вероятностей имеем

$$H(x) = \frac{I_1(x) + I_2(x)}{2},$$

$$I_1(x) = -\sum_{i=1}^{2} P(x_i) \log P(x_i),$$

$$I_2(x) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P(x_i) P(x_j / x_i) \log P(x_j / x_i),$$

где

$$I_2(x) = -\frac{3}{4}\left[0,2\log 0,2 + 0,8\log 0,8\right] - \frac{1}{4}\left[0,6\log 0,6 + 0,4\log 0,4\right] \approx$$
$$\approx 0,54 + 0,24 = 0,78 \text{ бит.}$$

$$I_1(x) = -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = 0,815 \text{ бит.}$$

$$H(x) = \frac{0,78 + 0,815}{2} \approx 0,797 \text{ бит.}$$

$$r = 1 - \frac{0,797}{1} = 0,203.$$

Задача 6.3

По каналу связи передаются сообщения, вероятности которых соответственно равны: $P(x_1) = 0{,}1$; $P(x_1) = 0{,}2$; $P(x_1) = 0{,}3$; $P(x_1) = 0{,}4$.

Канальная матрица, определяющая потери информации в канале связи имеет вид:

$$P(y/x) = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}97 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}99 \end{vmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) = 1$$

Определить:

1. Энтропию источника информации – $H(X)$.
2. Безусловную энтропию приемника информации – $H(Y)$.
3. Общую условную энтропию – $H(Y/X)$.
4. Скорость передачи информации, если время передачи одного символа алфавита $t = 0{,}1$ мс.
5. Определить потери информации в канале связи при передаче 500 символов алфавита.
6. Среднее количество принятой информации.
7. Пропускную способность канала связи.

Решение.

1. Энтропию источника сообщений равна

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{m} P(x_i)\log P(x_i) = -\left(0{,}1\log 0{,}1 + 0{,}2\log 0{,}2 + 0{,}3\log 0{,}3 + 0{,}4\log 0{,}4\right) =$$
$$= 0{,}3322 + 0{,}4644 + 0{,}5211 + 0{,}5288 = 1{,}8465 \text{ бит/симв.}$$

2. Вероятности появления символов на входе приемника

$$P(y_1)=-\sum_{i=1}^{m}P(x_i)\log P(y_1/x_i)=P(x_1)P(y_1/x_1)+P(x_2)P(y_1/x_2)+P(x_3)P(y_1/x_3)+$$
$$+P(x_4)P(y_1/x_4)=0,1\cdot 0,99+0,2\cdot 0,01=0,101;$$

$$P(y_2)=0,1\cdot 0,01+0,2\cdot 0,97+0,3\cdot 0,01=0,198;$$

$$P(y_3)=0,2\cdot 0,02+0,3\cdot 0,98+0,4\cdot 0,01=0,302;$$

$$P(y_4)=0,3\cdot 0,01+0,4\cdot 0,99=0,399.$$

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{m}P(y_i)=0,101+0,198+0,302+0,399=1.$$

Энтропия приемника информации равна

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{m}P(y_i)\log P(y_i)=$$
$$=-\left(0,101\log 0,101+0,198\log 0,198+0,302\log 0,302+0,399\log 0,399\right)=$$
$$=0,334+0,4626+0,5216+0,5290=1,85\text{ бит/симв.}$$

3. Общая условная энтропия равна

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)P(y_j/x_i)\log P(y_j/x_i)=$$
$$=-0,1(0,99\log 0,99+0,01\log 0,01)-$$
$$-0,2(0,01\log 0,01+0,97\log 0,97+0,02\log 0,02)-$$
$$-0,3(0,01\log 0,01+0,98\log 0,98+0,01\log 0,01)-$$
$$-0,4(0,01\log 0,01+0,99\log 0,99)=$$
$$=0,008+0,044+0,048+0,032=0,133\text{ бит/симв.}$$

4. Скорость передачи информации равна

$$R=F\left[H(Y)-H(Y/X)\right]=V\left[H(X)-H(X/Y)\right]=$$
$$=(1,85-0,132)/0,0001=17,18\text{ кбит/с.}$$

5. Потери информации в канале связи при передаче 500 символа алфавита равны:

$$\Delta I = kH(Y/X) = 500 \cdot 0{,}132 = 66 \text{ бит.}$$

6. Среднее количество принятой информации равно

$$I = k\left[H(Y) - H(Y/X)\right] = k\left[H(X) - H(X/Y)\right] =$$
$$= 500 \cdot (1{,}85 - 0{,}132) = 859 \text{ бит.}$$

7. Пропускная способность канала связи

$$C_n = V\left[\log m - H(Y/X)\right] = (2 - 0{,}132)/0{,}0001 = 18{,}68 \text{ кбит/с.}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

Математическая модель и информационные характеристики непрерывных каналов связи.

1. Полная средняя взаимная информация

$$I(X;Y) = h(X) - h\left(\frac{X}{Y}\right) = h(Y) - h\left(\frac{Y}{X}\right),$$

где $h(Y) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_1(y)\log P_1(y)dy$ – дифференциальная энтропия сообщения y(t) на выходе канала связи;

$h\left(\frac{Y}{X}\right) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_2(x,y)\log P_1\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$ – дифференциальная условная энтропия, характеризующая действие шумового процесса.

2. Для аддитивной смеси *y(t) = x(t) + n(t)* при статической независимости нормальных процессов *x(t)* и помехи *n(t)*:

$$h(Y) = \frac{1}{2}\log\left[2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)\right],$$

$$h\left(\frac{Y}{X}\right)=\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\sigma_n^2\right],$$

$$I(X;Y)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right),$$

где σ_x^2 и σ_n^2 – соответственно дисперсии процессов *x(t)* и *n(t)*.

3. Пропускная способность канала связи для нормально распределенных сообщений и помехи

$$C=2F_K\cdot I(X;Y)=F_K\cdot\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)\text{ бит/с.}$$

4. Пропускная способность канала связи при $\dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\ll 1$:

$$C\approx 1{,}44\cdot\frac{\sigma_x^2}{N_0}\text{ бит/с,}$$

где N_0 – спектральная плотность аддитивной помехи.

5. Пропускная способность канала связи при спектральной плотности *F(f)* гауссова сигнала *x(t)* и спектральной плотности *N(f)* аддитивной гауссовой помехи *n(t)* определяется

$$C=\int_{f1}^{f2}\log\left[1+\frac{F(f)}{N(f)}\right]df,$$

где $f_2 - f_1 = F_K$ – полоса пропускания канала.

6. Скорость передачи информации для гауссовых сигнала и аддитивной помехи

$$R=F_{эф}\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)\text{бит/с,}$$

где $F_{эф}$ – эффективная полоса частот, занимаемая информационным сигналом,

$$\sigma_n^2=N_0\cdot F_{эф}.$$

<u>Задача 7.1</u>

На вход приемного устройства действует колебание *y(t) = x(t) + n(t)*, где сигнал *x(t)* и помеха *n(t)* – независимые гауссовы случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными соответственно $\sigma_x^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-2} B^2$ и $\sigma_n^2 = 5 \cdot 10^{-3} B^2$. Эффективная полоса частот, занимаемая сигналом, $F_{эф}$ = 1 МГц. Определите полную среднюю взаимную информацию на входе приемника и пропускную способность канала связи.

Решение.

$$I(X;Y) = h(Y) - h\left(\frac{Y}{X}\right),$$

$$h(Y) = \log\left[2\pi e \sigma_y^2\right],$$

$$h\left(\frac{Y}{X}\right) = \log\left[2\pi e \sigma_n^2\right],$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2,$$

$$I(X;Y) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}}\right) = \frac{1}{2}\log 4 = 1 \text{ бит.}$$

Пропускная способность канала связи

$$C \geq 2F_{эф} \cdot I(X;Y) = 2 \cdot 10^6 \text{бит/с.}$$

<u>Задача 7.2</u>

Радиоприем осуществляется на две антенны, разнесенные в пространстве так, что сигналы *x(t)* и *y(t)* статистически независимы. Определите энтропию *h(x)* колебания *z(t) = x(t) + y(t)* распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_x^2 = 16\ B^2$ и $\sigma_y^2 = 25\ B^2$.

Задача 7.3

Сообщение $x(t)$, распределенное по нормальному закону, принимается на фоне белого шума $n(t)$. Определите пропускную способность канала связи, если входное отношение сигнал/шум $q_{вх} = 0,1$, полоса частот, отведенная радиоканалу, $F_K = 1$ МГц. Как изменится пропускная способность канала связи, если увеличить полосу частот радиоканала в три раза?

Литература

1. Белов В.М. Теория информации. Курс лекций. Учебное пособие для вузов. Москва: Горячая линия – Телеком, 2012.

2. Андреев А.Н., Краснов Р.П., Чепелев М.Ю. Теория электрической связи. Курс лекций. Учебное пособие для вузов. Москва: Горячая линия – Телеком, 2014.

3. Карпушкин Э.М. Радиотехнические системы. Учебно-методическое пособие. Минск: БГУИР, 2011.