**МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра общенаучной подготовки

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»

Ростов-на-Дону

2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Математическая логика и теория алгоритмов»

Пособие предназначено для проведения практических занятий со студентами направления подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность»

Составители: Докучаев С.А., ст. преподаватель

Рассмотрены и одобрены
на заседании кафедры Общенаучной подготовки
Протокол от 29.08.2022 г. № 1

Практическое занятие №1.

Цель занятия: научиться проверять тождественную истинность аксиом исчисления высказывания.

В основе любой логики лежит формальная система. Формальная система представляет собой совокупность чисто абстрактных объектов, не связанных с внешним миром. В формальной системе представлены правила оперирования множеством символов в синтаксической трактовке без учёта смыслового содержания.

Под теоремой в формальной системе понимают высказывание, истинное в данной системе. При построении любой формальной теории (системы) в качестве исходных посылок всегда используются некоторые *неопределяемые термины и аксиомы*.

Неопределяемые термины – это те термины и понятия, смысл и содержание которых считается уже известным, через них вводятся все новые понятия и термины. Аналогично вводится некоторая часть постулатов (формул), которые, как считается в данной теории, не требуют доказательства. Обычно это утверждения, правильность которых не вызывает сомнения, и они принимаются как очевидные истины. Такие выражения (формулы) называют *аксиомами*, а системы, в основе построения которых лежит использование аксиом, называются *аксиоматическими* системами.

Формальную теорию часто называют *исчислением*. Под исчислением понимают формальное представление теории, которое позволяет оперировать с объектами без учёта формального смысла выражений.

Исчисление высказываний (ИВ), т.е. логика высказываний, - это формальная система, интерпретацией которой является алгебра высказываний. Основной задачей исчисления высказываний является порождение общелогических законов – тождественно истинных высказываний, т. е.

высказываний (в том числе составных), которые всегда истинны независимо от входящих в них элементарных высказываний. Как и любая формальная система, исчисление высказываний строится на основе четырёх основных процедур: задания алфавита, установления правил построения формул, аксиом и правил вывода.

1. Алфавит состоит из символов трёх категорий:
   - Переменных высказываний, которые обозначаются буквами (x,y, z , a, d, b, x_1, x_2 и т. д.);
   - Логических связок (или операторов), которые обозначаются символами логических операций ($\vee$, &, $\rightarrow$, и т. д.);
   - Открывающихся и закрывающихся скобок ().

Других символов в ИВ нет.

2. Правила построения формул:
   Обозначаются формулы заглавными буквами латинского алфавита. Формулы получаются с помощью правил, которые описываются базисом и индуктивным шагом:
   Базис: всякое высказывание есть формула;
   Индуктивный шаг: если X и Y – формулы, то $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$, $\overleftarrow{X}$, и т. д. – также формулы. &x; (x∨z ; - не формулы.
3. Аксиомы.
   Тождественную истинность аксиом можно проверить, либо прямым вычислением значения формулы на каждом наборе, либо приведением их к константе **1** путём эквивалентных преобразований, применяемых в булевой алгебре.

Пример 1.

Тождественную истинность заданной аксиомы исчисления высказываний проверить:

a) Прямым вычислением значения формулы на каждом наборе;
b) Приведением её к константе 1 путём эквивалентных преобразований, применяемых в булевой алгебре.

Аксиома:

$(y \to z) \to (\neg z \to \neg y)$;

По пункту “ a ” решения задачи справедливость вычисления доказать построением таблицы истинности на каждом наборе.

По пункту “ b ” решения задачи пояснять применение законов и тождеств Булевой алгебры поэтапно.

1. Таблица истинности:

				A	B	
y	z	¬z	¬y	y→z	¬z → ¬y	A → B
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

2. $(y \to z) \to (\neg z \to \neg y) = (\neg y \lor z) \to (z \lor \neg y) =$

$\neg(\neg y \lor z) \lor z \lor \neg y = y \land \neg z \lor z \lor \neg y = (z \lor y) \land (z \lor \neg z) \lor \neg y =$

$z \lor y \lor \neg y = 1 \lor z = \mathbf{1}$

Пояснение:

$A \to B = \neg A \lor B$.	Импликация
$A \lor \neg A = 1$	Закон исключённого третьего
$\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$	Закон де Моргана.
$A \lor B \land C = (A \lor B) \land (A \lor C)$	Дистрибутивный закон

.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Формальная система представляет собой совокупность абстрактных или реальных объектов?

2. Какие формулы называют аксиомами? Приведите пример.
3. При каких условиях формула называется теоремой?
4. Какие правила вывода называют продукционными, а какие – правилами переписывания?
5. Как ещё называют формальную теорию?
6. Четыре основные процедуры построения исчисления высказываний?
7. Правила построения формул в исчислении высказываний?
8. Что такое базис и индуктивный шаг в исчислении высказываний?
9. Что называется подформулой формулы?
10. Как для заданной формулы определить её подформулы и глубину их вложенности.
11. Можно ли заданную формулу представить в виде дерева, ветви которого – исходные и промежуточные формулы ?
12. Является ли заданная запись формулы $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ аксиомой?
13. Как можно проверить тождественную истинность аксиом?
14. Как доказать методом эквивалентных преобразований истинность заданных аксиом?

Задание. Доказать тождественную истинность следующих аксиом:

a. $x \to (y \to x)$;
b. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;
c. $x \,\&\, y \to x$;
d. $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \,\&\, y))$;

e. $y \rightarrow x \vee y$;

f. $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$;

g. $(x \rightarrow y) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)$;

h. $(z \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x))$;

i. $(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \& y))$;

j. $(y \rightarrow z) \rightarrow (\neg z \rightarrow \neg y)$.

Выполнение заданий практического занятия оформляется в виде отчёта с ответами на контрольные вопросы и с пояснениями (см. пример) выполнения заданий.

Практическое занятие №2.

Цель занятия: Правила вывода в исчислении высказываний (ИВ).

Правила вывода – это четвёртая процедура построения ИВ как формальной системы.

Правила вывода устанавливают отношения на множестве формул исчисления высказываний. Обычно правила вывода представляются как отношения на множестве формул исчисления высказываний. Над чертой записываются формулы, которые играют роль посылки (известные истинные выражения), а под чертой – выводимая формула, истинность которой утверждается данным правилом. Она называется следствием или заключением.

В исчислении высказываний используются два правила вывода:

1. ***Правило заключения*** (modus ponens). Если A и A → B – это выводимые формулы, то B также является выводимой формулой. Записывается это правило так:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B};$$

2. ***Правило подстановки***. Его формальная запись имеет вид:

$$\frac{A}{A(x_1, x_2, \ldots, x_n \| B_1, B_2, \ldots, B_n)},$$

где A, B_1, B_2, …., B_n – это формулы, x_1, x_2,….., x_n – попарно различные переменные высказывания;

Через запись $A(x_1, x_2, \ldots, x_n \| B_1, B_2, \ldots, B_n)$ обозначен результат одновременной замены всех вхождений переменных x_1, x_2,….., x_n в **A** на формулы B_1, B_2, …., B_n.

Справедливость правил вывода ИВ подтверждается применением методов булевой алгебры. Так, если A и A → B –

тождественно истинные формулы, т. е. А=1 и $A \to B$ =1, следовательно $\overline{A} \vee B$ =1. Так как в последнем выражении $\overline{A} = 0$, а значение логического выражения равно 1, то В должно быть равно 1 (быть истинным).

Используя два приведенных правила, можно порождать новые формулы без учёта семантического смысла используемых выражений. Но так как они реализуются с помощью правила подстановки и заключения, то получили название ***производных правил*** вывода:

Правило сложного заключения. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - формулы и $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_m \to B)\ldots)))$ – теорема, то формула В – также теорема.

Правило двойного отрицания. Если $A \to \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{A}} \to B$ теоремы, то будет теоремой и $\mathbf{A \to B}$.

Правило силлогизма (замыкания). Если $A \to B$ – теорема, то $\overline{B} \to \overline{A}$ - теорема.

Правила вывода можно рассматривать и как результат логического анализа некоторых человеческих рассуждений.

<u>Пример</u><u>1</u>. Правилу заключения соответствует следующая схема рассуждений.

<u>Исходные посылки</u>. Если данный многоугольник правильный (А=1), то в него можно вписать окружность ($A \to B$). Возьмём правильный многоугольник (А=1).

<u>Вывод</u>. В данный многоугольник можно вписать окружность. (В =1).

<u>Пример 2.</u> К какой схеме относится следующее рассуждение:

«Если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задания. Следовательно, он отсутствовал на работе». Обозначим каждое простое высказывание. «Если рабочий отсутствовал на работе» - A, «Он не выполнил задания» - B.

Он не выполнил задания (B), следовательно, он отсутствовал на работе (A). Схема данного рассуждения - $\frac{A \to B,\ \ B}{A}$

Эта схема относится к схеме ***неправильных*** рассуждений, следовательно, это рассуждение **неверно**

Пример 3. Представить логической формулой следующее высказывание.

«Сегодня понедельник или вторник».

Составное высказывание состоит из двух простых: «Сегодня понедельник» и «Сегодня вторник». Высказывания **A** и **B соединены** связкой «или» очевидно в разделительном смысле.

Таким образом, данное высказывание представлено логической формулой $\mathbf{A \oplus B}$.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Можно ли рассматривать правила вывода формул и как результат логического анализа некоторых человеческих рассуждений?
2. Что устанавливают правила вывода?
3. Как записываются формулы посылки (уже известные истинные выражения)?
4. Как записывается выводимая формула, истинность которой утверждается данным правилом ?
5. Какие два правила вывода используются в исчислении высказываний?
6. В чём суть правила заключения (*modus ponens)*?
7. В чём суть правила подстановки ?
8. Какие другие производные правила вывода можно получить, позволяющие строить новые доказуемые

формулы?

9. В чём суть правила двойного отрицания ?

Задания.

1. Для всех указанных правил вывода записать по 3 примера человеческих рассуждений;

2. Представить логическими формулами следующие человеческие высказывания (учитывая все связки ИВ):

a. «Если идёт дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые»;

b. «Что в лоб, что по лбу»;

c. «Идёт дождь или снег»;

d. «Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьёшь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью».

e. « Если социологические исследования показывают, что потребитель отдаёт предпочтение удобству и многообразию выбора, то фирме следует сделать упор на усовершенствование товара или увеличение многообразия новых форм»

f. «Если компьютер при запуске не выдаёт ошибку при проверке оперативной памяти, то она исправна. Если при запуске он выдаёт ошибку при проверке оперативной памяти и память установлена правильно, то либо оперативная память дефектна, либо дефектна материнская плата. Тогда если эта оперативная память правильно установлена в другой (контрольный) компьютер и он при запуске не выдаёт ошибку при проверке оперативной памяти, то оперативная память исправна.

Выполнение заданий практического занятия оформляется в виде отчёта с ответами на контрольные вопросы и с пояснениями выполненных заданий.

Практическое занятие №3

Использование алгоритма редукции для доказательства общезначимости формул исчисления высказываний.

Формулы исчисления высказываний можно интерпретировать как формулы алгебры высказываний (АВ). Для этого следует переменные ИВ трактовать как переменные АВ, т. е. переменные, которые могут принимать только значения 0 и 1. Очевидно, что между формулами ИВ и АВ существует взаимно-однозначное соответствие. Однако АВ не всегда достаточно для построения доказательств в ИВ.

Термины и определения, используемые в исчислении высказываний для установления факта общезначимости формул:

- Формула выполнима, если она может принимать значение «истина» (например, $p \,\&\, q$, $\bar{p}$, $p \vee q$);
- Формула невыполнима, если ни при каких значениях, составляющих её высказываний, она не может быть истинной (например, $p \,\&\, \bar{p}$);
- Формула общезначима, если она принимает значение «истина» независимо от истинности её составляющих (например, $p \vee \bar{p}$);
- Формула нейтральна, если она не общезначима и не является невыполнимой.

Тавтологиями называются общезначимые формулы. Если формула $\mathbf{A \equiv 1}$, т.е. А – тавтология, то это можно записать $\vDash \mathbf{A}$.

Пусть Е – множество формул, тогда запись $E \vDash A$ означает, что если все формулы из Е истины, то будет истинной формула А. В этом случае А называется логическим следствием из Е.

Если $E = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ и $E \vDash A$, то можно записать $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \vDash \mathbf{A}$.

Формулы H_i называются **гипотезами**, а формула А – **заключением.**

Принцип дедукции состоит в следующем: формула А является логическим следствием конечного множества Е тогда и только тогда, когда **Е**$\cup\{\overline{\mathrm{A}}\}$содержит невыполнимые формулы.

Учитывая принцип дедукции можно считать справедливой следующую запись $\mathbf{H_1}$ **&** $\mathbf{H_2}$ **& …..&** $\mathbf{H_n}$ **&** $\overline{\mathrm{A}}$ **=** $\mathbf{0}$. Это правило называется ***правилом прямой дедукции.***

Правило обратной дедукции - $\overline{\mathrm{H}}_{\mathbf{1}} \vee \overline{\mathrm{H}}_{\mathbf{2}} \vee \ldots\ldots\vee \overline{\mathrm{H}}_{\boldsymbol{n}} \vee \mathrm{A} = \mathbf{1}$

Алгоритм редукции позволяет доказывать общезначимость формул исчисления высказываний путём приведения к абсурду.

Пример. Требуется доказать общезначимость формулы

$$((p \,\&\, q) \to r) \to (p \to (q \to r)).$$

Предположим, что при некоторой интерпретации эта формула принимает значение «ложь». Из определения импликации известно, что значение «ложь» она принимает только в том случае, когда посылка истинна, а заключение ложь. Учитывая это свойство, представляем исходную формулу в виде двух интерпретаций:

1. $(p \to (q \to r)) = 0$.
2. $((p \,\&\, q) \to r) = 1$.

$(p \to (q \to r)) = 0$ (равно 0), если $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$. Если подставить полученные значения в (2), то получится противоречие.

Значит, предположение о том, что существует некоторая интерпретация, при которой исходная формула принимает значение «ложь», неверно, и это означает общезначимость исходной формулы.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Можно ли формулы исчисления высказываний (ИВ) интерпретировать как формулы алгебры высказываний (АВ)?
2. Условие выполнимости формулы?
3. Условие невыполнимости формулы?
4. Условие общезначимости формулы?
5. Условие нейтральности формулы?
6. Какие общезначимые формулы называются тавтологиями?
7. Если формула тавтология, то как она записывается
8. В чём состоит принцип дедукции?
9. Правило прямой дедукции?
10. Правило обратной дедукции?
11. Методы, используемые для определения общезначимости формул исчисления высказываний?
12. Использование алгоритма редукции для доказательства общезначимости формул исчисления высказываний?

<u>Задания</u>

Требуется доказать общезначимость формул, используя **алгоритм редукции:**

1. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$;
2. $((p \& q) \to r) \to (p \to (q \to r))$;
3. $(a \to b) \to (a \vee c \to b \vee c)$;
4. $(a \to b) \& (b \to c) \to (a \to c)$;
5. $(a \to (b \to c)) \to (a \& b \to c)$;
6. $(a \to b) \to (a \& c \to b \& c)$;
7. $((a \to b) \& (a \to c)) \to (a \to (b \& c))$;

8. $((a \to c) \,\&\, (b \to c)) \to ((a \vee b) \to c)$;

9. $((a \,\&\, b) \to c) \leftrightarrow (a \to (b \to c))$;

0. $(a \,\&\, b \to c) \to (a \to (b \to c))$.

При выполнении решения задач показать, обосновать все шаги доказательства и привести результат.

Практическое занятие №4.

Метод резолюций для построения доказательств.

Для порождения логических следствий используется метод резолюций. Пусть A, B, X – формулы. Предположим , что две формулы $(A \vee X)$ и $(B \vee \overline{X})$ истины. Если X – истина, то следует, что B – тоже истина. Тогда, если X – ложь, то A – истина. Получаем правило $\{ A \vee X , B \vee \overline{X} \} \vDash (A \vee B)$, которое можно записать в виде:

$\{ \overline{X} \to A , X \to B \} \vDash (A \vee B)$ – это правило резолюций (если X – высказывание, а A и B - дизъюнкты).

В методе резолюций применяется правило прямой дедукции
($\mathbf{H_1 \,\&\, H_2 \,\&\, \ldots \,\&\, H_n \,\&\, \overline{A} = 0}$), из которого следует, что для доказательства выводимости формулы A необходимо доказать, что в множестве
$\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \overline{A}\}$ имеется хотя бы одна невыполнимая формула.

Для этого каждый элемент указанного множества рассматривается как элементарная дизъюнкция (**дизъюнкт**).

Применение метода резолюций предусматривает порождение новых дизъюнктов, поэтому для доказательства утверждений о выполнимости формулы A необходимо доказать, что хотя бы один дизъюнкт из рассматриваемого множества исходных и порождённых дизъюнктов тождественно равен нулю. В этом случае говорят, что получен ***пустой дизъюнкт.***

Невыполнимость формул, из которых формируется конечное множество дизъюнктов S, доказывается с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. *Проверка множества S на невыполнимость*.

Если пустой дизъюнкт принадлежит множеству S (он либо может присутствовать изначально, либо получается из–за того, что в множестве одновременно присутствует некоторая литера и её отрицание), это означает, что множество S невыполнимо и алгоритм свою работу закончил. Иначе шаг 2.

Шаг 2. *Построение резольвенты*. Вычисляем резольвенту r.

Шаг 3. *Обновление множества дизъюнктов.* Заменяем множество дизъюнктов, т. е. добавляем к существующим дизъюнктам новый дизъюнкт – резольвенту, полученную на предыдущем шаге. После чего переходим на шаг 1.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Применение правила прямой дедукции в методе резолюций?
2. Суть метода резолюций для построения доказательств?
3. Какой дизъюнкт называется *резольвентой*?
4. Пустой дизъюнкт?
5. Алгоритм невыполнимости формул?
6. Проверка множества S на невыполнимость ?
7. Построение резольвенты?
8. Обновление множества дизъюнктов?
9. Если множество S не содержит не одной пары дизъюнктов, то оно выполнимо ?
10. Установлена ли невыполнимость исходного множества S, если выполнение алгоритма закончилось нормально после порождения пустого дизъюнкта?

ЗАДАНИЕ.

1. Доказать, используя метод резолюций, невыполнимость множества дизъюнктов $S = \{p \vee q, p \vee r, \bar{q} \vee \bar{r}, \bar{p}\}$.

2. Доказать, используя метод резолюций, что S является логическим следствием множества гипотез H, где

$H = \{\bar{a} \vee (b \to c), \overline{c \& d} \vee e, f \vee (\overline{\bar{d} \vee e})\}$, а $S = \bar{a} \vee \bar{b} \vee f$.

Практическое занятие № 5.(продолжение практического занятия 4)

1. Доказать, используя метод резолюций, что S является логическим следствием множества гипотез H, где
   $H = \{\neg a \vee (b \to c), \neg(c \,\&\, d) \vee e, f \vee \neg(\neg d \vee e)\}$, $S = \neg a \vee \neg b \vee f$.
2. Преобразовать, используя вышеуказанное множество гипотез, в множество дизъюнктов.
3. Доказать невыполнимость следующего множества дизъюнктов:
   $H = \{\neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee \neg d \vee e, f \vee d, f \vee \neg e, a, b, \neg f\}$
4. Утверждение, сформулированное на естественном языке и некоторое заключение, превратить в множество высказываний и доказать справедливость рассуждений методом прямой дедукции.

   Набор рассуждений следующий:

   1) Если пойти на первую пару, то надо встать рано, а если играть в компьютерные игры, то лечь придётся поздно;
   2) Если лечь поздно и рано встать, то спать придётся мало;
   3) Мало спать нельзя.

   Заключение: надо или не играть в компьютерные игры, или не идти на первую пару

При выполнении задания ввести следующие обозначения для высказываний:

q – встать рано;

d – играть в компьютерные игры;

c – идти на первую пару;

s – лечь поздно спать;

e – мало спать.

Порядок решения:

– Используя введённые обозначения, перейти от утверждений к набору гипотез. Следствие записать как $A = \overline{c} \vee \overline{d}$.
– При построении доказательства по дедукции в качестве механизма воспользоваться методом эквивалентных преобразований и методом

резолюций.

- При использовании метода резолюций привести гипотезы к форме дизъюнктов.
- Отрицание следствия будет иметь вид: $\overline{A} = \overline{\overline{c} \vee \overline{d}} = cd$.

Практическое занятие №6.

Логика предикатов.

Высказывания в алгебре логики рассматриваются как единый объект с точки зрения истинности или ложности. Структура и содержание высказываний не рассматриваются. Однако на практике для построения полноценного логического вывода важно иметь представление о структуре и содержании используемых в выводе высказываний. Поэтому логика предикатов является расширением логики высказываний, которую включает в себя в качестве составной части.

Одноместным предикатом P(x) называется произвольная функция переменной x , определённая на множестве M и принимающая значение из множества $\{0, 1\}$. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно трактовать, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны отношением P. n – местный предикат – это двузначная функция от n аргументов, определённая на произвольном множестве M , принимающая значение 0 или 1.

Пример. Предикат P(x) – «x – простое число» определён на множестве N. Предикат Q(x) – «sin x = 0» определён на множестве R.

Предикаты, так же как высказывания, принимают два значения (1, 0) истина и ложь. Кроме логических операций в логике предикатов вводятся кванторные операции, что позволяет повысить выразительную мощность предикатных предложений. Как известно из курса «Дискретная математика» кванторов всего два**(**$\forall$**,** $\exists$).

Пример. Пусть предикат P(x, y) – «$x \le y$ » определён на множестве N.

Предикатное выражение $\exists x \forall y\ P(x, y)$ означает - Существует x, который меньше любого y – значение истинности 1.

Предикатное выражение $\exists x \exists y\ P(x, y)$ означает - Существуют такие x и y, что $x \le y$ - значение истинности 1.

Предикатное выражение $\forall x \forall y\ P(x, y)$ означает - Для любого x и любого y имеет место $x \le y$ – значение истинности 0.

Логику предикатов можно рассматривать как формальную систему. О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в формулу предикаты. При задании аргументам предикатов конкретных значений предикаты становятся высказываниями и можно говорить об их истинности или ложности.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Какие значения принимают предикаты?
2. Какая функция называется одноместным предикатом?
3. Какие операции применяются к предикатам?
4. В какое высказывание превращает квантор общности $\forall x$ предикат $P(x)$?
5. В какое высказывание превращает квантор существования $\exists x$ предикат ***P(x)***?
6. Когда две формулы логики предикатов называются равносильными?
7. Равносильные формулы – это формулы, равносильные на какой области?
8. Какая формула логики предикатов называется общезначимой (логическим законом)?
9. Определение ***терма***?
10. Определение ***функциональной формы***?
11. Определение ***предикатной формы***?
12. Определение ***атома***?
13. Правила вывода предикатных формул?
14. Значение истинности предикатных формул?
15. Определение унификации?
16. Подстановочный частный случай?
17. Композиция подстановок?
18. Множество рассогласований непустого множества?
19. Метод резолюций для логики предикатов?
20. Последовательность действий, которую необходимо реализовать для приведения любой формулы логики предикатов к множеству дизъюнктов?

Задание.

Доказать тождественную истинность или тождественную ложность предикатных выражений, преобразовав их по правилам, регламентирующим преобразование выражений в исчислении предикатов, содержащих кванторы.

1. $\forall x(P(x) \to (P(x) \lor P(y)));$

2. $\exists x \exists y((F(x) \rightarrow F(y)) \& (F(x) \rightarrow \neg F(y)) \& F(x));$

3. $\forall x(q \rightarrow p_1(x)) \leftrightarrow (q \rightarrow \forall x p_1(x));$

4. $\forall x(F1(x) \rightarrow F2(x)) \rightarrow (\forall x F1(x) \rightarrow \forall x F2(x));$

5. $\forall x(p_1(x) \rightarrow p_2(x)) \leftrightarrow (\exists x p_1(x) \rightarrow \forall x p_2(x));$

6. $\exists x R(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(R(x) \vee Q(x));$

7. $\forall x(p(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \neg(\forall x p(x) \& \forall x Q(x));$

8. $\exists x(F(x) \rightarrow \neg F(x)) \& (\neg F(x) \rightarrow F(x));$

9. $\exists x \exists y((F(x) \rightarrow F(y)) \& (F(x) \rightarrow \neg F(y)) \& F(x));$

0. $\exists x \exists y((F(x) \rightarrow F(y)) \& (F(x) \rightarrow \neg F(y)) \& F(x)).$

При выполнении решения задач показать, обосновать все шаги доказательства и привести результат.

Практическое занятие №7.

Уточнение понятия алгоритма с помощью машины Тьюринга (МТ).

Алгоритм – это план действий , состоящий из последовательности понятных человеку операций, приводящих к искомому результату. Алгоритм состоит из элементарных шагов, число которых конечно. Основные требования к алгоритму: понятливость, определённость, дискретность, элементарность шага, массовость, конечность и результативность. Можно выделить следующие варианты описания алгоритмов: словесное, линейная форма записи, в виде структурной схемы.

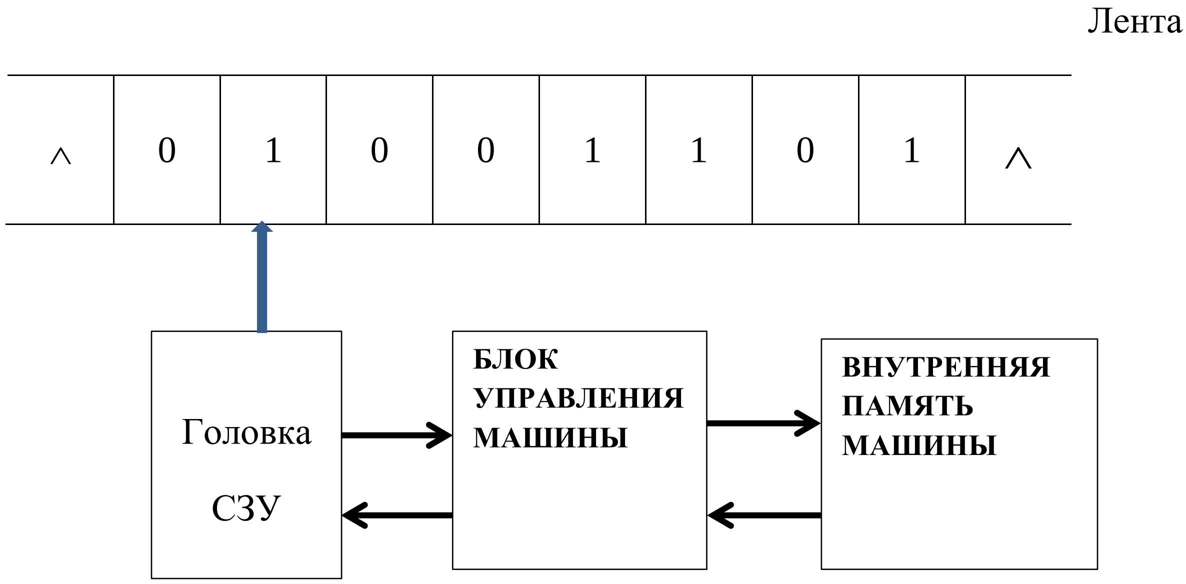
Выработано множество определений алгоритма. Это объясняется тем, что исходят из различных технических и логических соображений. Однако со временем было доказано, что все эти определения равносильны. Поэтому сегодня в подходах к определению алгоритма можно выделить три основных направления.

Первое направление связано с машинной математикой. В нём сущность понятия алгоритма раскрывается путём рассмотрения процессов, осуществляемых в машине. Впервые это было сделано английским математиком Аланом Тьюрингом в 1937г. Он предложил самую общую и вместе с тем самую простую концепцию вычислительной машины.

Второе направление связано с уточнением понятия эффективно вычислимой функции. Результатом исследований было выделение особого класса - частично рекурсивных функций, которые имеют строгое математическое определение.

Третье направление связано с понятием нормальных алгоритмов А. А. Маркова, которые трактуют способы обработки некоторых синтаксических конструкций.

МАШИНА ТЬЮРИНГА. (МТ)



ЛЮБОЙ АЛФАВИТ ДОЛЖЕН СОДЕРЖАТЬ ПУСТОЙ СИМВОЛ $\wedge$

УУ – НАХОДИТСЯ В ОДНОМ ИЗ СОСТОЯНИЙ Q

ВЫДЕЛЯЕТСЯ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ $\mathbf{q_1}$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ $\mathbf{q_0}$

НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ – ОБОЗРЕВАЕТСЯ КРАЙНЯЯ ЛЕВАЯ НЕПУСТАЯ ЯЧЕЙКА ЛЕНТЫ И **УУ** НАХОДИТЬСЯ В СОСТОЯНИИ $\mathbf{q_1}$

Правила преобразования, которые выполняет МТ, определяются системой команд. Работа МТ может быть описана следующим образом: системой команд, таблицей, диаграммой (графом) переходов.

Пример реализации МТ с помощью системы команд.

Выяснить, применима ли машина Тьюринга, заданная программой P к слову S и, если применима, то указать результат применения машины Тьюринга к заданному слову.

При решении задачи следует учесть, что в начальный момент времени головка машины обозревает самую левую ячейку на ленте и устройство управления (УУ) находится в начальном состоянии q_1.

$$P = \begin{cases} q_1 0 \rightarrow 0q_3 \\ q_1 1 \rightarrow 1Rq_1 \\ q_2 0 \rightarrow 0Lq_3 \\ q_2 1 \rightarrow 1Rq_3 \\ q_3 0 \rightarrow 0Rq_0 \\ q_3 1 \rightarrow 1Lq_3 \end{cases} \qquad S = 111101$$

Решение.

Машина Тьюринга, заданная программой P, применима к слову, если она закончит работу за конечное число шагов. Предполагается, что слово S записывается с левого конца ленты, начиная с первой ячейки. Все правые ячейки после окончания слова заполняются пустыми символами. Начальное состояние машины, при котором головкой обозревается первая ячейка и УУ находится в начальном состоянии q1 изображено далее в виде двух строк: на первой строке – лента с содержимым в её ячейках, а на второй строке – головка с текущим состояниям УУ.

∧	1	1	1	1	0	1	∧	∧	∧
	q_1								

Из приведённого рисунка первый шаг работы машины определяет адрес $q_1 1$. По этому адресу следует выполнить команду $1Rq_1$. В обозреваемую ячейку записывается 1, головка сдвигается на одну ячейку вправо и УУ переходит в состояние q_1 .

Результаты выполнения этой и последующих команд отражены ниже.

∧	1	1	1	1	0	1	∧	∧	∧
		q_1							
∧	1	1	1	1	0	1	∧	∧	∧
			q_1						
∧	1	1	1	1	0	1	∧	∧	∧
				q_1					

$\wedge$	1	1	1	1	0	1	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
					q_1				
$\wedge$	1	1	1	1	0	1	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
					q_3				
$\wedge$	1	1	1	1	0	1	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
						q_0			

$q_3 0 \to 0Rq_0$. В текущую ячейку записывается 0, головка сдвигается на одну ячейку вправо. УУ переходит в состояние q_0 (заключительное состояние машины).

Машина применима к данному слову и результат её работы 111101

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Определение алгоритма и основные требования, применяемые к алгоритму?
2. Уточнение понятия алгоритма с помощью машины Тьюринга (МТ)?
3. Элементарные операторы – сингулярный и бинарный?
4. Способы описания алгоритмов (словесное, линейная форма записи, в виде структурной схемы)?
5. Рекурсивные функции?
6. Частично рекурсивная функция?
7. Управляющее устройство машины Тьюринга, лента, устройство обращения к ленте?
8. Два варианта работы МТ?
9. Правила преобразования, выполняемые МТ?
10. Описание работы МТ таблицей?
11. Описание работы МТ диаграммой (графом) переходов?

Задания.

Выяснить, применима ли машина Тьюринга, заданная программой P к слову S и, если применима, то указать результат применения машины Тьюринга к заданному слову.

0.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Rq_2 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Lq_0 \\ q_3 1 \to 1Rq_3 \end{cases} \qquad S= 110101$$

1.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases} \qquad S= 111101$$

2.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 0Rq_2 \\ q_3 1 \to 1Lq_0 \end{cases} \qquad S= 101111$$

3.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 0q_2 \\ q_3 0 \to 1Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases}$$

S= 111101

4

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0q_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_3 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 1Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_2 \end{cases}$$

S= 110101

5

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Lq_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0q_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_2 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 0q_0 \end{cases}$$

S= 111101

6.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1Rq_2 \\ q_1 1 \to 1Rq_3 \\ q_2 0 \to 0Rq_3 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Lq_3 \\ q_3 1 \to 1Rq_0 \end{cases}$$

S= 101101

7.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 0q_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_1 \\ q_2 0 \to 0Lq_3 \\ q_2 1 \to 1Rq_3 \\ q_3 0 \to 0Rq_0 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases}$$

S= 111101

8.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \to 1q_3 \\ q_1 1 \to 1Rq_2 \\ q_2 0 \to 0Rq_0 \\ q_2 1 \to 0Rq_3 \\ q_3 0 \to 0q_3 \\ q_3 1 \to 1Lq_3 \end{cases}$$

S= 111101

9.

$$P=\begin{cases} q_1 0 \rightarrow 1Rq_1 \\ q_1 1 \rightarrow 1Rq_2 \\ q_2 0 \rightarrow 0Lq_3 \\ q_2 1 \rightarrow 0Rq_3 \\ q_3 0 \rightarrow 0Rq_0 \\ q_3 1 \rightarrow 1Lq_2 \end{cases}$$

$S= 111101$

При выполнении решения задач показать, обосновать все шаги доказательства и привести результат.

Практическое занятие №8.

Нормальные алгоритмы А. А. Маркова.

Нормальный алгоритм – понятие, введённое *в конструктивную математику* русским учёным А. А. Марковым. Под конструктивной математикой понимается такое направление в математике, которое, как и классическая математика, имеет своим предметом исследование форм и количественных отношений объективной действительности. Но отличается от классической математики некоторыми особенностями. Если в классической математике исследователь имеет дело с объектами, о которых известно, что они обладают такими – то свойствами, и при этом полностью отвлекается от способов построения такого объекта, то в *конструктивной математике* исследователь ограничивается конструктивными объектами. Понятие конструктивного объекта не определяется, а лишь поясняется примерами. В качестве элементарного конструктивного объекта берутся, например, буквы, входящие в то или иное слово.

Из этих элементарных конструктивных объектов по некоторым правилам, принятым по соглашению, строится слово, а из слов – ещё более сложные конструктивные объекты. Существование такого конструктивного объекта считается доказанным лишь тогда, когда указывается способ потенциально осуществимого построения (конструирования) объекта.

Различные нормальные алгоритмы отличаются друг от друга лишь алфавитами и системами допустимых подстановок.

Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ) являются вербальными, то есть предназначенными для применения к словам в различных алфавитах. НАМ является Тьюринг-полным языком, что делает его по выразительной силе эквивалентным машине Тьюринга и следовательно современным языком программирования. На основе НАМ был создан функциональный язык программирования Рефал. Нормальный алгоритм описывает метод переписывания строк, похожий по способу задания на формальные грамматики.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия

1. В чём заключается работа нормального алгоритма Маркова?
2. Когда считается, что алгоритм Маркова применим к заданному слову?
3. Почему нормальные алгоритмы Маркова считаются вербальными?
4. Какой язык программирования был создан на основе НАМ?
5. Чем отличаются нормальные алгоритмы друг от друга?
6. Теория нормальных алгоритмов строится в рамках абстракции потенциальной осуществимости?
7. Пример реализации алгоритма Маркова?
8. Где наиболее широко применяется абстракция потенциальной осуществимости?
9. Сравнительный анализ основных моделей представления алгоритмов?

Задания.

Схема алгоритма **U: a → b, b → b, c → ·a.** Определить результат действия алгоритма **U** на слово **w.** (Пример выполнен для 3 варианта)

Вариант	w	Вариант	w
1	abbbbcca	**6**	abbccaca
2	abbabbca	**7**	abbcaccca
3	acabbbccc	**8**	babbcca
4	baabcca	**9**	abccaba
5	abacbcca	**0**	abacabca

Действие алгоритма **U** на слово **W:**

U (acabbbccc**) = bU**(cabbbccc) = **ba**← заключительная подстановка **c → ·a**

Результат действия алгоритма **U** **baabbbccc.**

При выполнении решения задач показать, обосновать все шаги доказательства и привести результат.