**МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра общенаучной подготовки

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Учебно – методическое пособие для проведения занятий по дискретной математике для студентов очной формы обучения по направлению 10.03.01 «Информационная безопасность»

Ростов-на-Дону

2022 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

«Дискретная математика» изучается студентами направления подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность»

В учебно – методическом пособии «Основы теории множеств» рассматриваются элементарные понятия математики, изучающей конечные множества, которые являются одним из разделов дискретной математики. Пособие ориентировано на студентов очной формы обучения.

Так как различные разделы дискретной математики внедряются в технические, экономические, юридические и др. сферы, то доскональное изучение находящейся в состоянии непрерывного развития теории множеств, практически невозможно. Поэтому, в рамках отведённого учебной программой времени студенту целесообразно ознакомиться лишь с некоторыми разделами основ теории множеств. Изучение этого материала может послужить базой для самостоятельного освоения теории множеств.

1. МНОЖЕСТВА.

1.1 Обозначения объектов и операций.

– Если обозначение объекта или операции является глобальным (в пределах работы, учебника, статьи), используется знак: $\stackrel{\text{def}}{=}$, который означает « по определению есть». Слева от этого знака может стоять обозначение объекта, а справа - выражение, которое определяет этот объект:

Пример 1. $\neg A \stackrel{\text{def}}{=} U \setminus A$

Если определяется операция, то в левой части стоит выражение:

Пример 2. $A = B \stackrel{\text{def}}{=} A \subset B \ \& \ B \subset A$;

Чтобы вычислить значения выражения $A = B$, следует вычислить значение $A \subset B$ и $B \subset A$, а затем вычислить конъюнкцию этих значений;

- Знак « $:=$ » обозначает « положим равно »;
- Знак « $=$ » обозначает « равно »;
- $\forall, \exists$ - Кванторы (логические символы) характеризуют следующие за ним элементы в количественном отношении. $\forall$ квантор всеобщности используется вместо слов «для всех», «для любого» ; $\exists$ квантор существования используется вместо слов «существует», «имеется», $\exists!$ – «существует единственный»;
- Знак « $\rightarrow$ » - «следует», «выполняется»;
- Знак « $\leftrightarrow$ » или « ~ » - равносильность утверждения.

1.2 Определение и обозначение множества.

Теория множеств получила признание в конце девятнадцатого века. Без символики теории множеств сейчас не обходится ни одно математическое исследование. Ввёл понятие «множество» немецкий математик Кантор. Понятие «множество» относится к первоначальным понятиям, не подлежащим определению.

Поэтому множеством называют совокупность некоторых объектов, объединённых каким-либо общим признаком. Объектами могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Примеры множеств: натуральные числа, множество целых чисел, планеты, алфавит, множество рыб и т. д.

Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита, элементы (объекты) – строчными буквами.

Для некоторых числовых множеств, часто встречающихся в различных разделах математики, ввели специальные обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z - множество целых чисел;

R – множество действительных чисел;

Q – множество рациональных чисел;

I - множество иррациональных чисел.

Символом « $\in$» обозначается отношение принадлежности. Запись $\mathbf{x \in X}$ означает, что элемент x принадлежит множеству **X,** а запись $\mathbf{x} \notin X$, означает что элемент x не принадлежит множеству **X.** Словесные обороты **,** как «элемент x принадлежит множеству X» достаточно длинны и не всегда удобны. Лучше, например, $\mathbf{5 \in N}$ **– 5** число натуральное, $0 \notin N$ – нуль не натуральное число.

Пример 3. Записать на символическом языке следующие утверждения:

Число 10 – натуральное.   Ответ - $10 \in N$.

Число 7 – не натуральное. Ответ – $7 \notin N$.

Число 100 – целое.   Ответ – $100 \notin Z$.

Множество, как объекты могут быть элементами других множеств . Их называют семейством. Семейства обозначаются прописными «рукописными » буквами латинского алфавита. Например, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ и т.д.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Универсальное множество (универсум) часто обозначают греческой буквой Ω, хотя во многих источниках обозначается буквой U. Универсальное множество включает в себя все множества.

Если число элементов множества, конечно, то множество называют конечным, иначе – бесконечным. Множество букв в алфавите – конечное множество, а множество натуральных чисел - бесконечное множество.

1.3 Задание множеств. Мультимножество.

Задать множество – это значит указать, какие элементы ему принадлежат. Это указание заключают в пару фигурных скобок. Оно может иметь одну из следующих основных форм:

а) Задание множества перечислением элементов.

M := {a, b, c, d}.

Если множество состоит из чисел, то при их перечислении удобнее использовать не запятую, а точку с запятой, чтобы не спутать с десятичной запятой

A:= {1; 2; 3; 4; 5}.

Элементы множества можно перечислять в произвольном порядке. От изменения порядка перечисления само множество не меняется. Множество гласных букв русского алфавита А $\stackrel{\text{def}}{=}$ {а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я} или

А $\stackrel{\text{def}}{=}$ {я, е, у, и, о, а, ы, э, ю, ё} - одно и тоже множество.

Конечное множество задаётся простым перечислением. Например, множество нескольких простых чисел M:= {3; 5; 7; 11}.

Однако, задавать множество путём перечисления его элементов удобно только в том случае, когда их число невелико. Если число элементов множества достаточно велико или множество бесконечно, то явное перечисление элементов такого множества невозможно. Например, множество всех квадратов натуральных чисел можно записать B:={1; 4; 9; 16; 25; …}.

При задании множеств перечислением обозначения элементов иногда снабжают индексами и указывают множество, из которого берутся индексы. Например, запись $\{ a_i\}_{i=1}^{k}$ означает тоже, что $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$,

Запись $\mathcal{M} = \{M_a\}_{a \in A}$

Означает что $\mathcal{M}$ является семейством, элементами которого является множество M_a , причём индекс $\boldsymbol{a}$ «пробегает» множество А.

b) Задание множества характеристическим предикатом.

Характеристический предикат – это условие, выраженное в форме логического утверждения, возвращающей логическое значение и позволяющее проверить, принадлежит ли любой данный элемент множеству или нет. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

Пример 4. **M:= {x | P(x)}**

Символ “ | ” внутри фигурных скобок заменяет комбинацию слов «…таких, что…».

М – это множество $\boldsymbol{x}$, таких, что они обладают свойством P(x). Здесь P(x) – характеристический предикат.

Пример 5. $A := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathrm{N}, x \leq 100\}$

А – это множество $\boldsymbol{x}$, таких, что x принадлежит множеству натуральных чисел меньших или равных 100.

Пример 6. Вместо символа “ | ” может стоять символ “ **:** ” .

$$B := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \bmod(2) = 0\}$$

B – это множество $\boldsymbol{x}$, таких, что остаток от деления значения элемента х на 2 равняется нулю.

c) <u>Задание множества порождающей процедурой</u>.

Порождающая процедура – это процедура, которая в процессе работы порождает объекты, являющиеся элементами определяемого множества.

$$B := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x^2 - 3x + 2 = 0}\} \quad \text{Здесь } B = \{1 ; 2\}.$$

Пример 7. Заданное множество А задать перечислением всех своих элементов: $A := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x^2 - 3x - 4 = 0}\}$

Ответ: А:= {1; 2; 3; 4}.

<u>Мультимножества.</u>

Множества, допускающие включение одного и того же элемента несколько раз, называется <u>мультимножеством.</u>

Пример 8. Представить мультимножеством простые множители целого числа 120. Этими множителями являются: $120 = 2^3 * 3^1 * 5^1$. Они образуют мультимножество X:= {2; 2; 2; 3; 5}. В сокращённой записи оно имеет вид X:= {(2, 3), 3, 5} или в другой записи X:= {(3/2), 3, 5}.

1.4 <u>Сравнение множеств.</u>

Множества могут служить элементами других множеств:

1. Множество А называется подмножеством множества В, если всякий элемент А является элементом В. При этом говорят « В содержит или покрывает А».

Это свойство обозначается: $A \subseteq B$ (читается: А включено в В или В включает или равно А). Знак $\subseteq$ - знак «нестрогое включение».

Пример 9. X – множество студентов группы ДВ-21;

Y – множество студентов - отличников группы ДВ-21;

Тогда $Y \subseteq \mathbf{X}$ (могут же быть все отличники).

Знак $\subset$ - знак «строгое включение». $A \subset B$ - означает, что А подмножество множества В, не совпадающее с В (читается: А включено в В.

Примечание. Иногда, в литературе знаком «$\subset$» обозначают нестрогое включение, допускающее и равенство множеств. В таком случае символ $\subseteq$ не используется, а строгое включение записывается двумя соотношениями $A \subset B$, $A \neq B$.

Пример 10. Z – множество студентов групп специальности 11.03.02

X – множество студентов группы ДИ-21.

Тогда, $X \subset Z$. Здесь строгое включение, X включено в Z, X подмножество Z, X не может равняться Z т. к в Z есть и другие группы.

Не следует смешивать знаки «$\in$» и «$\subset$».

Пример 11. М1 – множество футболистов клуба «Зенит».

М2 – множество всех футбольных команд.

Верно, $\mathbf{M1 \in M2}$, но неверно $M1 \subset M2$, т.к. М1 и М2 – множества разной природы.

2. Два множества называют равными ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов или являются пустыми множествами. Так, как при равенстве множеств А и В во множестве А нет элементов, не принадлежащих В, а в В нет элементов, не принадлежащих А, то признаком равенства множеств является одновременное выполнение двух условий:

$$A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

1.5 Мощность множества. Булеан множества

Число элементов ***n*** в множестве X называют <u>мощностью</u> множества X и обозначают как **| X | = n.** Множество X=∅ - пустое множество, если n=0. Множество X и Y считаются равными, если **| X | = | Y |.**

Булеан множества A – это множество, состоящее из всех подмножеств множества A. Булеан обозначается 2^A , иногда - β(A)

Пример 12. Пусть A={1; 2; 3} Булеан множества A есть множество

2^A ={∅, {1}, {2}, {3}, {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}, {1; 2; 3}}.

2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

2.1 Диаграммы Эйлера – Венна.

Диаграммы – это геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри него - кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться, как требуется в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определённые области для обозначения вновь образованных множеств.

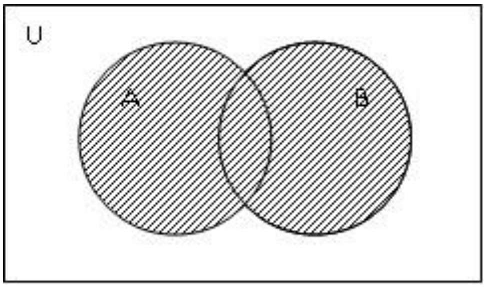
При решении целого ряда задач Леонард Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов. Однако, этим методом ещё до Эйлера пользовался выдающийся немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц. Лейбниц использовал их для геометрической интерпретации логических связей между понятиями, но при этом всё же предпочитал использовать линейные схемы. Но достаточно основательно развил этот метод сам Л. Эйлер. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шрёдер в книге "Алгебра логики". Особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна, подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы иногда называют Диаграммы Эйлера-Венна.

2.2 Операции над множествами.

1. Объединение множеств.

Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$. Это множество всех таких x, что x является элементом хотя бы одного из множеств A, B.

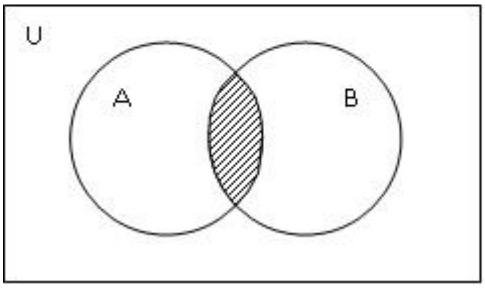
$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \vee \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}$$



2. Пересечение множеств.

Пересечение множеств A и B обозначается A ∩ B . Это множество всех таких x , что x является одновременно элементом A и элементом B.

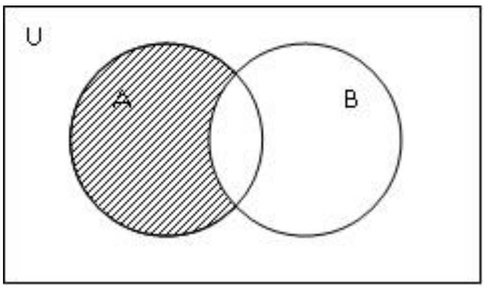
$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \ \& \ \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}$$



3. Разность множеств A и B.

Разность множеств A и B обозначается A \B . Это множество всех таких x , что $x \in$ A, но не содержаться в B.

$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \ \& \ \mathbf{x} \notin \mathbf{B}\}$$

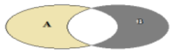


4. Симметричная разность множеств А и В.

Симметричная разность множеств А и В обозначается $A \Delta B$. Это множество всех таких $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{x} \in A$, $\boldsymbol{x} \in B$, за исключением их общих элементов.

$$A \Delta B \overset{def}{=} \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} \in \mathbf{A} \;\&\; \mathbf{x} \notin \mathbf{B}) \vee (\mathbf{x} \in \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{x} \notin \mathbf{A})\}$$ или

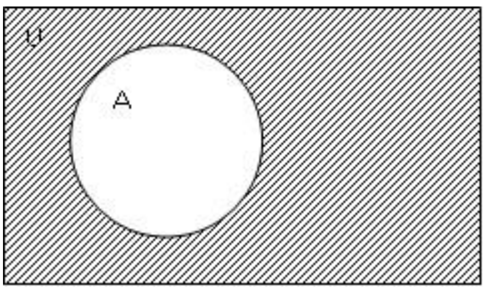
можно записать так: $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$



5. Дополнение.

Дополнение – эта операция подразумевает, что задан некоторый универсум U, тогда $\neg A = U \setminus A$, в противном случае операция дополнения не определена.

$$\neg A \overset{def}{=} \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \,\}.$$



2.3 Основные свойства операций над множествами.

Операции: пересечение, объединение и дополнение можно считать главными операциями в том смысле, что результат любой другой операции может быть представлен формулой, содержащей три указанные операции. Свойства операций пересечения, объединения и дополнения представлены в таблице 1.

№ п/п	СВОЙСТВА	ПЕРЕСЕЧЕНИЕ	ОБЪЕДИНЕНИЕ
1.	Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
2.	Ассоциативность	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3.	Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4.	Свойство нуля	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
5.	Свойство единицы	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
6.	Идемпотентность	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
7.	Свойство поглощения	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
8.	Законы де Моргана	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
9.	Свойство дополнения	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	$A \cup \overline{A} = U$
10.	Инволютивность	$\overline{\overline{A}} = A$	
11.	Выражение для разности	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	
	Свойства симметричной разности		
12.	$A \Delta B = B \Delta A$		
13.	$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$		
14.	$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$		
15.	$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$		

В справедливости перечисленных равенств можно убедиться различными способами: нарисовать диаграммы Эйлера – Венна для левой и правой частей равенства и убедиться, что они совпадают; провести формальное рассуждение для каждого равенства.

2.4 Декартово произведение множеств.

Пусть A и B - множества.

Множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, называется *декартовым произведением множеств* A и B и обозначается

A x B.

Набор (a, b) называют *кортежем, вектором*.

Частный случай $A = B$, тогда $A \times B = A^2$.

Пример 13. Определить декартово произведение множеств $A_1=\{0, 1\}$, $A_2 = \{x, y, z\}$

$$A_1 \times A_2 = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}.$$

Пример 14. Определить декартово произведение $A = \{1; 2; 5\}$и $B = \{4; 6\}$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (5, 4), (5, 6)\}.$$

Пример 15. Пусть X – множество студентов в группе $|X| = n$, а Y – множество мест в аудитории $|Y| = m$.

Тогда декартово произведение множеств X и Y есть двумерное множество X x Y всевозможных пар (студент, место). Всего таких пар $n*m$. Если $n = m$, каждому студенту выделяется единственное место. При $n < m$ имеет место избыток мест, а при $n > m$ – их недостаток.

3. ОТНОШЕНИЯ.

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определённого признака **R** (свойства и т.п.) у элементов множества **M** (например «быть белым» на множестве шаров в урне). Тогда все такие элементы ***a*** из множества М, которые отличаются данным признаком **R,** образуют некоторое подмножество в **M,** называемое унарным отношением **R,** т.е. $\boldsymbol{a \in R}$ ***и*** $\boldsymbol{R \subseteq M}$.

Подмножество **R** декартова произведения множеств **A** x **B** называется двухместным, или <u>бинарным *отношением* множеств</u> **A** и **B.** Тогда **R** $\subseteq$ A x B. Подмножество пар <u>(a, b) $\in$ **R**,</u> пишут **a R b** и говорят, что <u>**a** и **b** находятся в *отношении* **R.**</u>

Пример 16. Пусть множество **R** задаёт отношение в примере 14.

R = **{(a, b) | b делится на a }.** Указать его элементы.

Решение: Оставляем в декартовым произведении только те пары, у которых второе число ***b*** делится на первое ***a***.

Тогда **R =** {(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6)}.

3.1 Матрица отношения.

Отношения, определяемые на конечных множествах, обычно задаются:

- Списком (перечислением) пар, для которых это отношение выполняется. **R** = {(a, b), (a, c), (b, d)};
- Матрицей отношения. Для множеств A= $\{a_1, a_2 \ldots, a_m\}$ и

B = $\{b_1, b_2 \ldots b_n\}$ занумеруем <u>строки</u> матрицы размера $\boldsymbol{m \times n}$ элементами $a_1, \ldots, a_m$, а <u>столбцы</u> матрицы занумеруем элементами $b_1, \ldots b_n$. При выполнении условия $(\mathbf{a_i}, \mathbf{b_j}) \in \mathbf{R}$ на пересечении **i** – строки и **j** – го столбца матрицы записываем **1, а** при $(\mathbf{a_i}, \mathbf{b_j}) \notin \mathbf{R}$ на пересечении **i** – строки и **j** – го столбца матрицы записываем **0.**

Пример 17. Множество **R** = **{(a, b) | b делится на a }.**

A = {1; 2; 5}и B = {4; 6}

Число элементов в множестве A равно **3**, значит у матрицы отношения будет **3** строки. Число элементов в множестве B равно **2**, значит у матрицы отношения будут **2** столбца. Поэтому размер матрицы отношения будет **3 x 2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементам множества **R =** {(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6)} в матрице соответствуют единицы. Остальные числа матрицы равны **0.**

По матрице отношения можно определить элементы отношения. Для этого надо занумеровать строки матрицы элементами 1–го множества, а столбцы матрицы – элементами 2–го множества. Каждой единице матрицы соответствует упорядоченная пара отношения (на 1-м месте указывается соответствующий элемент 1-го множества, а на 2-м месте – соответствующий элемент 2-го множества).

Пример 18. На множестве **A** x **B,** где A = {2, 5, 9} и B = {1, 3}задано отношение с помощью матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Определим элементы этого отношения. Занумеруем строки матрицы отношения элементами множества **A.** Столбцы матрицы отношения элементами множества B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда отношение R = {(2, 1), (5, 3), (9, 1)}(именно этим парам в матрице отношения соответствуют единицы).

Для каждого отношения **R** можно определить обратное отношение $\mathbf{R}^{-1}$ следующим способом $\mathbf{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathbf{R}\}$ (надо просто поменять местами элементы в упорядоченных парах отношения R).

С помощью двух отношений можно построить новое отношение. Допустим, даны множества A, B, C и отношения R (на множеств **A** x **B**), S (на множестве **B** x **C**). <u>*Композицией отношений*</u> R и S называется отношение

T = **{(a, c) | существует элемент b∈B, такой, что** (a, b) ∈ **R и** (b, c) ∈ **S }.**

3.2 Свойства отношений.

1. Отношение R на множестве A x A - бинарное отношение на множестве A. В дальнейшем будем говорить просто «отношение R на множестве A».

Отношение R на множестве A называется ***рефлексивным***, если (a, a) = R для всех a∈A, т.е. отношение выполнено между **объектом** и **им самим**. В этом случае на главной **диагонали матрицы отношения R** все элементы **равны <u>единице</u>**.

Пример 19. На множестве A= {1, 2, 3} задано отношение R= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}. Определить, является ли это отношение рефлексивным отношением. Так как для всех элементов a∈A (т.е. 1, 2, 3) элементы (a, a) = R (это элементы (1, 1), (2, 2), (3, 3)), то отношение R является рефлексивным отношением.

2. Отношение R называется ***антирефлексивным***, если выполняется для несовпадающих объектов (a, b) = R. В этом случае на главной **диагонали матрицы отношения R** все элементы **равны <u>нулю</u>**.

Пример 20. На множестве действительных чисел задано отношение

$R = \{(a, b) \mid a < b\}$. Определить, является ли это отношение рефлексивным отношением.

Элемент $(1, 1) \notin R$, так как неравенство $1 < 1$ ложно. Поэтому отношение R не является рефлексивным отношением.

3. Отношение R на множестве A называется ***симметричным***, если для всех $a, b \in A$ из условия $(a, b) = R$ следует, что $(b, a) = R$. В этом случае обратное отношение $\mathbf{R}^{-1}$ совпадает с отношением R, а матрица отношения R при транспонировании не меняется.

Пример 21. Определить, является ли отношение из примера **19 симметричным отношением.** Так как $\mathbf{R}^{-1}$ совпадает с отношением R, то отношение R является симметричным отношением.

4. ***Антисимметричность***: все элементы вне главной диагонали равны нулю, на главной диагонали тоже могут быть нули.

Пример 22. Определить, является ли отношение из примера **20** симметричным отношением. Так как $1 < 2$, то элемент $(1, 2) \in R$. Но неравенство $2 < 1$ ложно. Поэтому $(2, 1) \notin R$. Следовательно, отношение R не является симметричным.

5. Отношение R на множестве A называется ***транзитивным***, если для всех $a, b, c \in A$ из одновременного выполнения условий $(a, b) = R$ и $(b, c) = R$ следует, что $(a, c) = R$. В этом случае композиция отношения R с <u>самим собой есть снова</u> отношение R.

Пример 23. Определить, является ли отношение из примера **19 транзитивным отношением.** Так как композиция отношения R с самим собой есть снова отношение R, то отношение R является транзитивным.

Пример 24. На множестве прямых на плоскости задано отношение

R = **{(a, b) | a ⊥ b }.** Определить, является ли отношение R транзитивным отношением. Так как (a, b) = R и (b, c) = R, то **a ⊥ b и b ⊥ c,** но две прямые на плоскости, перпендикулярные к одной прямой, параллельны. Поэтому условие **a ⊥ c не выполняется,** т.к. (a, c) ∉ R. Следовательно, отношение R не является транзитивным отношением.

6. Отношение R на множестве A есть отношение ***эквивалентности***, Если это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для класса эквивалентности (отношение эквивалентности задаёт разбиение непересекающихся подмножеств множества) используют специальное обозначение

   |a| = {x∈A | x ~ a}, где **a** – какой-то представитель класса эквивалентности, A – множество, на котором задано отношение эквивалентности.

Пример 25. Отношение «быть однофамильцем» является отношением эквивалентности на множестве людей. Однофамильцы – это классы эквивалентности в этом примере. Например, в класс эквивалентности **| Сидоров|** попадут все Сидоровы.

Пример 26. Отношение подобия фигур на плоскости. Каждая фигура **подобна сама себе. Это рефлексивность.** Если **первая** фигура **подобна второй** фигуре, то **вторая** фигура **подобна первой. Это симметричность.**

Если **первая** фигура **подобна второй** фигуре**,** а **вторая** фигура **подобна третьей,** то первая и третья фигуры подобны. **Это транзитивность.** Отсюда**,** отношение подобия фигур на плоскости является **отношением эквивалентности.**

4. ОТОБРАЖЕНИЯ

Бинарное отношение R называется функциональным (или функцией), если из $(x,y) \in R$ и $(x,z) \in R$ следует $y = z$. Этому условию соответствует отображение множества X в множество Y,обозначаемое так

$$f\colon X \to Y.$$

Функция ***f*** устанавливает соответствие между элементами множеств X и Y, ***f*** играет роль правила, сопоставляющего каждому элементу $\mathbf{x \in X}$ однозначно определённый элемент

$$y = f(x) \in Y.$$

Здесь множество X - область определения отображения ***f***, а элемент **x** называют *прообразом элемента* ***y.***

$$y = f(x)\ \text{ - образ элемента } x \text{ при отображении } f.$$

Ещё говорят, что на множестве X задано отображение ***f***, со значениями в множестве Y, если каждому элементу $x \in X$ поставить в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Условные обозначения: $f(x)=y$, $f\colon X \to Y$ (отображение f из X в Y).

Иногда, вместо «задано отображение» говорят «установлено соответствие».

Пример 27.

В холле гостиницы за спиной у портье на стене висят ключи от номеров гостиницы. Установлено соответствие между множеством ключей и множеством номеров гостиницы.

Пример 28.

Заселяется новый дом. Устанавливается отображение между жильцами и номерами квартир.

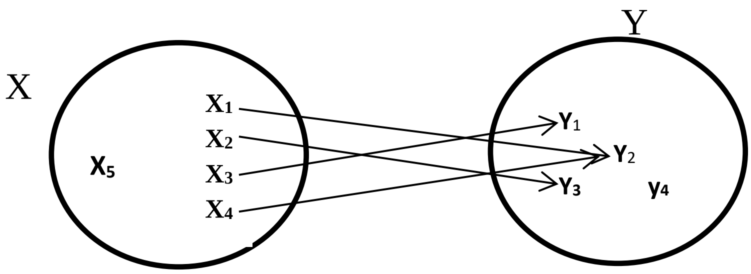
Пример 29.

Задано отображение f: X → Y.

$f(x_1) = f(x_4) = y_2$;

$f(x_2) = y_3$,

$f(x_3) = y_1$. На рисунке это выглядит следующим образом:



Элементу x_5 не поставлен в соответствие ни один элемент из множества Y. Элемент y_4 не поставлен в соответствие ни одному элементу из множества X. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ – это область определения отображения ***f***. $\{y_1, y_2, y_3\}$- это образ отображения ***f***. Здесь один элемент y_2 соответствует двум различным элементам x_1 и x_4. Это не запрещается ( ). Запрещается другое ( ) : соответствие двух образов одному прообразу.

Здесь можно вспомнить следующие пословицы: «для глухого двух обеден не служат», «одному началу не два конца» , «за двумя зайцами погонишься – и ни одного не поймаешь».

Отображение f: X → Y называется **инъективным**, если для любых x_1, x_2 множества X из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пример 30.

Отображение $f(x)=x^2$ не является **инъективным,** так как

$f(1)= 1^2 = 1= (-1^2) = f(-1)$.

Отображение f: X → Y называется **сюръективным,** если каждый элемент множества имеет хотя бы один прообраз.

Пример 31.

Отображение $f(x) = 2^x$ является **инъективным** отображением множества действительных чисел на множество положительных действительных чисел, так как $2^{x1} = 2^{x2}$ только при $x1 = x2$. Отображение $f(x) = 2^x$ является и **сюръективным**.

Пример 32.

Отображение из примера 29 не является сюръективным отображением, так как прообраз элемента y_4 пуст (элемент y_4 не поставлен в соответствие ни одному элементу из X).

Отображение называется биективным, если оно одновременно инъективное и сюръективное. Например, отображение из примера 31.

ЛИТЕРАТУРА.

1.	Ф. А. Новиков	Дискретная математика для бакалавров и магистров: стандарт 3-го поколения	СПб.: Питер, 2013.
2.	С. В. Микони	Дискретная математика для бакалавра: Учебное пособие	СПб.: Издательство «Лань», 2012.
3.	Г. И. Просветов	Дискретная математика: Задачи и решения: Учебно – практическое пособие. 2-е изд., доп	М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2015.
4.	Г. И. Просветов	Математические методы в логистике: Задачи и решения. 3-е изд.	М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2014.
5.	Д. В. Гринченков С. И. Потоцкий	Математическая логика и теория алгоритмов для программистов: Учебное пособие	М.: КНОРУС, 2014.
6.	В. И. Игошин	Математическая логика: Учебное пособие.	М.: Инфра-М, 2013
7.	Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева	Математическая логика: Задачник – практикум и решения: Учебное пособие	СПб.: Издательство «Лань», 2012.
8.	О. П. Кузнецов	Дискретная математика для инженера	СПб.: Издательство «Лань», 2007.