ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра Информатики и вычислительной техники

Основы компьютерного моделирования

МУ к ЛР 1 и 2

Ростов-на-Дону

2019

МУ к ЛР 1 и 2
по дисциплине
Основы компьютерного моделирования

Для студентов очной формы обучения Направление подготовки **- 09.03.01 «**Информатика и вычислительная техника»

Составитель: П.В. Лобзенко, доцент кафедры ИВТ
Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры ИВТ
Протокол от «26» августа 2019 г. №1

УДК 681.5037.26

Лобзенко П.В.

Основы компьютерного моделирования. Исследование возможностей SciLab. Методическое пособие по выполнению лабораторных работ. / Моск. техн. ун-т связи и информатики, Сев.-Кавк. филиал. – Ростов н/Д, 2019, 32 с.

В пособии, приводится достаточно подробная методика и порядок выполнения лабораторной работы по исследованию возможностей работы в программной среде SciLab.

МУ к ЛР 1

Исследование математических моделей сложных информационных систем

Исследование свойств математических моделей информационных систем, созданных с помощью систем компьютерной математики (пакет Scilab).

1.1 Теоретическая часть

MathCAD работает с документами. С точки зрения пользователя, документ - это чистый лист бумаги, на котором можно размещать блоки трех основных типов: математические выражения, текстовые фрагменты и графические области.

Расположение нетекстовых блоков в документе имеет принципиальное значение - слева направо и сверху вниз.

1.1. Математические выражения

К основным элементам математических выражений MathCAD относятся типы данных, операторы, функции и управляющие структуры.

Операторы

Операторы - элементы MathCAD, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т.д.

Оператор определяет:

действие, которое должно выполняться при наличии тех или иных значений операндов;

сколько, где и какие операнды должны быть введены в оператор.

Операнд - число или выражение, на которое действует оператор. Например, в выражении 5! + 3 число 3 и выражение 5! - операнды оператора + (плюс), а число 5 операнд оператора факториал (!). После указания операндов операторы становятся исполняемыми по документу блоками. В Приложении 2 данного пособия приведен список наиболее часто используемых операторов.

Типы данных

К типам данных относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Константами называют поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. Переменные являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Имена констант, переменных и иных объектов называют идентификаторами. Идентификаторы в MathCAD представляют собой набор латинских или греческих букв и цифр.

В MathCAD содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать системными переменными, имеющими предопределенные системой начальные значения (см. Приложение 1). Изменение значений системных переменных производят во вкладке Встроенные переменные диалогового окна Math Options команды ***Математика ⇒ Опции***.

Обычные переменные отличаются от системных тем, что они должны быть предварительно определены пользователем, т. е. им необходимо хотя бы однажды присвоить значение. В качестве оператора присваивания используется знак :=, тогда как знак = отведен для вывода значения константы или переменной.

Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора :=, вызывается нажатием клавиши : (двоеточие) на клавиатуре, такое присваивание называется локальным. До этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать. Однако с помощью знака (клавиша ~ на клавиатуре) можно обеспечить глобальное присваивание (см. Пример 1 Рисунка 1).

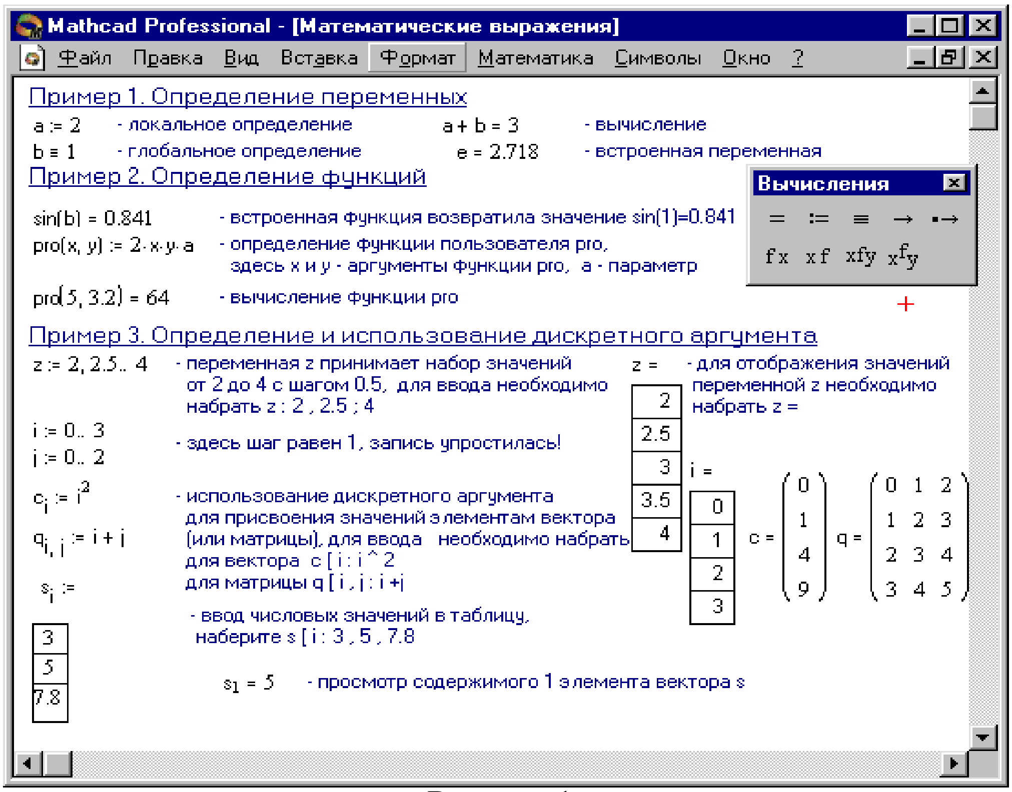


Рисунок 1.

MathCAD прочитывает весь документ дважды слева направо и сверху вниз. При первом проходе выполняются все действия, предписанные локальным оператором присваивания (), а при втором - производятся действия, предписанные локальным оператором присваивания (:=), и отображаются все необходимые результаты вычислений (=).

Существуют также жирный знак равенства = (комбинация клавиш Ctrl + =), который используется, например, как оператор приближенного равенства при решении систем уравнений, и символьный знак равенства → (комбинация клавиш Ctrl + .).

Дискретные аргументы - особый класс переменных, который в пакете MathCAD зачастую заменяет управляющие структуры, называемые циклами (однако полноценной такая замена не является). Эти переменные имеют ряд фиксированных значений, либо целочисленных (1 способ), либо в виде чисел с определенным шагом, меняющихся от начального значения до конечного (2 способ).

Name := Nbegin .. Nend,

где Name - имя переменной, Nbegin - ее начальное значение, Nend - конечное значение, .. - символ, указывающий на изменение переменной в заданных пределах (вводится клавишей ;). Если Nbegin < Nend, то шаг переменной будет равен +1, иначе -1.

Name := Nbegin, (Nbegin + Step) .. Nend

Здесь Step - заданный шаг изменения переменной (он должен быть положительным, если Nbegin < Nend, или отрицательным в обратном случае).

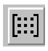
Дискретные аргументы значительно расширяют возможности MathCAD, позволяя выполнять многократные вычисления или циклы с повторяющимися вычислениями, формировать векторы и матрицы (Пример 3 Рисунка 1).

Массив - имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса. В пакете MathCAD используются массивы двух наиболее распространенных типов:

- одномерные (векторы);
- двумерные (матрицы).

Порядковый номер элемента, который является его адресом, называется индексом. Индексы могут иметь только целочисленные значения. Они могут начинаться с нуля или единицы, в соответствии со значением системной переменной ***ORIGIN*** (см. Приложение 1).

Векторы и матрицы можно задавать различными способами:

1. с помощью команды ***Вставка ⇒ Матрица***, или комбинации клавиш ***Ctrl + M,*** или щелчком на кнопке  панели Матрица, заполнив массив пустых полей для не слишком больших массивов;
2. с использованием дискретного аргумента, когда имеется некоторая явная зависимость для вычисления элементов через их индексы (Пример 3 Рисунка 1).

Функции

Функция - выражение, согласно которому проводятся некоторые вычисления с аргументами и определяется его числовое значение.

Следует особо отметить разницу между аргументами и параметрами функции. Переменные, указанные в скобках после имени функции, являются ее аргументами и заменяются при вычислении функции значениями из скобок. Переменные в правой части определения функции, не указанные скобках в левой части, являются параметрами и должны задаваться до определения функции (см. Пример 2 Рисунка 1).

Главным признаком функции является возврат значения, т.е. функция в ответ на обращение к ней по имени с указанием ее аргументов должна возвратить свое значение.

Функции в пакете MathCAD могут быть встроенные (см. Приложение 3), т. е. заблаговременно введенные разработчиками, и определенные пользователем.

Способы вставки встроенной функции:

1. Выбрать пункт меню ***Вставка ⇒ Функция***.
2. Нажать комбинацию клавиш ***Ctrl + E.***
3. Щелкнуть на кнопке 

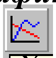
Текстовые фрагменты представляют собой куски текста, которые пользователь хотел бы видеть в своем документе. Существуют два вида текстовых фрагментов:

1. текстовая область предназначена для небольших кусков текста - подписей, комментариев и т. п. Вставляется с помощью команды ***Вставка ⇒ Текстовая регион*** или комбинации клавиш ***Shift*** + " (двойная кавычка);
2. текстовый абзац применяется в том случае, если необходимо работать с абзацами или страницами. Вставляется с помощью комбинации клавиш ***Shift*** + ***Enter***.

1.3. Графические области

Графические области делятся на три основных типа - двумерные графики, трехмерные графики и импортированные графические образы. Двумерные и трехмерные графики строятся самим MathCAD на основании обработанных данных.

Для создания декартового графика:

1. Установить визир в пустом месте рабочего документа.
2. Выбрать команду ***Вставка ⇒ График ⇒ Х-У*** график, или нажать комбинацию клавиш Shift + @, или щелкнуть кнопку панели  Графики. Появится шаблон декартового графика.
3. Введите в средней метке под осью X первую независимую переменную, через запятую - вторую и так до 10, например x1, x2, …
4. Введите в средней метке слева от вертикальной оси Y первую независимую переменную, через запятую - вторую и т. д., например y1(x1), y2(x2), …, или соответствующие выражения.
5. Щелкните за пределами области графика, что бы начать его построение.

Трехмерные, или 3D-графики, отображают функции двух переменных вида Z(X, Y). При построении трехмерных графиков в ранних версиях MathCAD поверхность нужно было определить математически (Рисунок 2, способ 2). Теперь применяют функцию MathCAD CreateMesh.

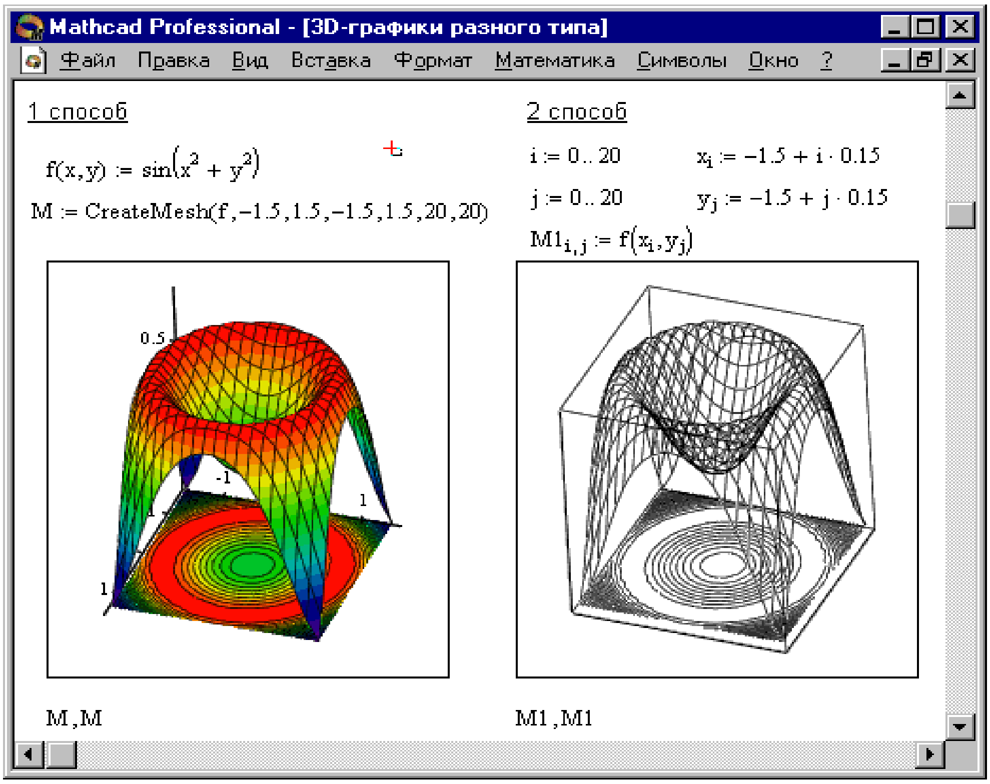


Рисунок 2.

CreateMesh(F (или G, или f_1, f_2, f_3), x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap)

Создает сетку на поверхности, определенной функцией ***F. x0, x1, y0, y1*** - диапазон изменения переменных, ***xgrid, ygrid*** - размеры сетки переменных, fmap - функция отображения. Все параметры, за исключением F, - факультативные. Функция CreateMesh по умолчанию создает сетку на поверхности с диапазоном изменения переменных от -5 до 5 и с сеткой 20*20 точек.

Пример использования функции ***CreateMesh*** для построения 3D-графиков приведен на Рисунке 2, способ 1. На Рисунке 2 построена одна и та же поверхность разными способами, с разным форматированием, причем изображены поверхности и под ними те же поверхности в виде контурного графика. Такое построение способно придать рисунку большую наглядность.

Нередко поверхности и пространственные кривые представляют в виде точек, кружочков или иных фигур. Такой график создается операцией ***Вставка ⇒ График 3D Точечный***, причем поверхность задается параметрически - с помощью трех матриц (X, Y, Z) (см. Рисунок 3, способ 2), а не одной как в примере на Рисунке 2.

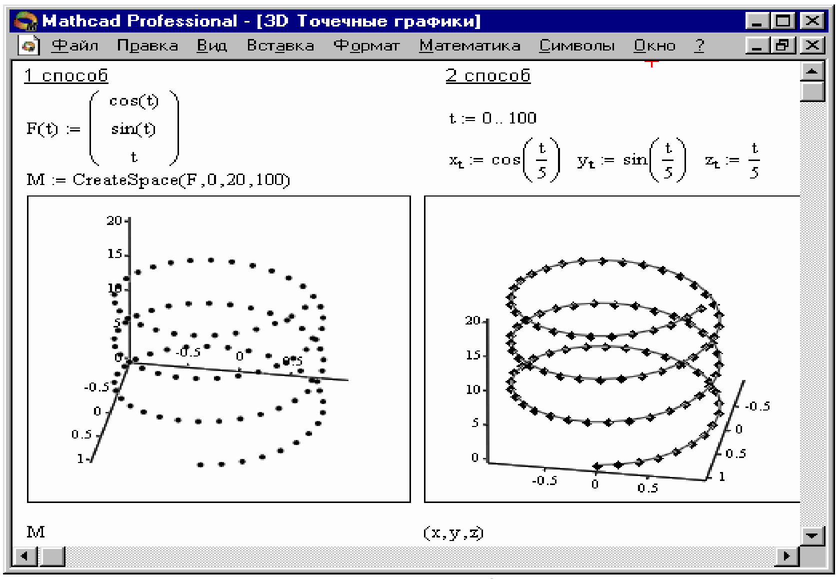


Рисунок 3.

Для определения исходных данных для такого вида графиков используется функция CreateSpace (см. Рисунок 3, способ 1).

CreateSpace (F , t0, t1, tgrid, fmap)

Возвращает вложенный массив трех векторов, представляющих x-, y-, и z-координаты пространственной кривой, определенной функцией F. t_0 и t_1 - диапазон изменения переменной, tgrid - размер сетки переменной, fmap - функция отображения. Все параметры, за исключением F, - факультативные.

Построение пересекающихся фигур

Особый интерес представляет собой возможность построения на одном графике ряда разных фигур или поверхностей с автоматическим учетом их взаимного пересечения. Для этого надо раздельно задать матрицы соответствующих поверхностей и после вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы под ним с использованием в качестве разделителя запятой (Рисунок 4).

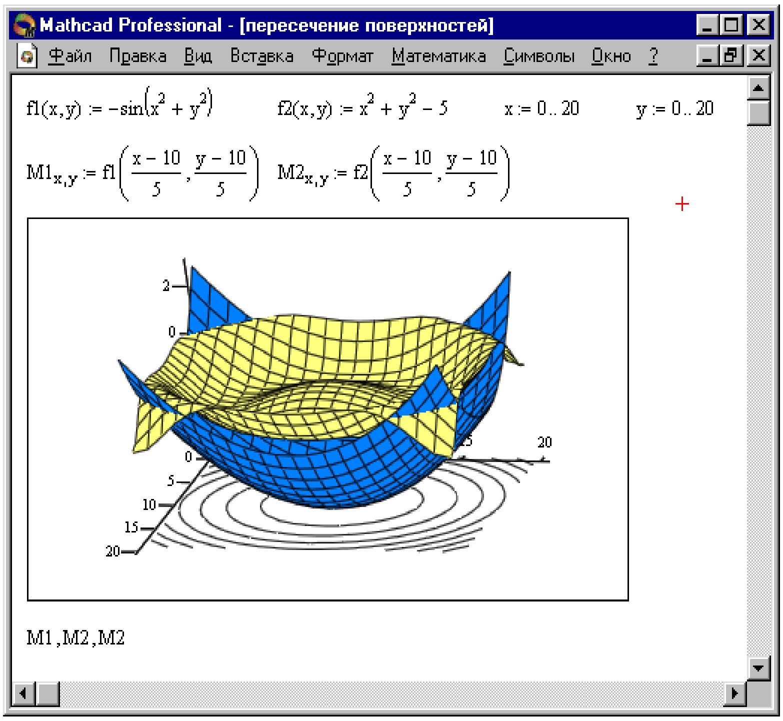


Рисунок 4.

Создание анимационного клипа

- MathCAD имеет встроенную переменную FRAME, чье единственное назначение - управление анимациями:
- Создайте объект, чей вид зависит от FRAME.
- Убедитесь, что установлен режим автоматического расчета (***Математика ⇒ Автоматическое Вычисление).***
- Выберите ***Вид ⇒ Анимация*** для вызова одноименного диалогового окна.
- Заключите в выделяющий пунктирный прямоугольник часть рабочего документа, которую нужно анимировать.
- Установите нижние и верхние границы FRAME (поля От: и До:).
- В поле Скорость введите значение скорости воспроизведения (кадров/

сек). •

1.2 Практическая часть. Задания

Упражнение 1. Вычислить:

$\sqrt{100} =$

|-10| = 10! = .

Это и все остальные задания снабдить комментариями, используя команду ***Вставка ⇒ Текстовая область.***

Упражнение 2. Определить переменные: ***a := 3.4, b := 6.22, c ≡ 0.149*** (причем переменную c - глобально) и выражения:

$$Z := \frac{2ab + \sqrt[3]{c}}{\sqrt{\left(a^2 + b^{a+c}\right)\cdot c}} \qquad N := e^{\sin c}\cos\frac{a}{b}$$

- Вычислить выражения.
- С помощью команды ***Формат ⇒Результат ⇒Формат чисел ⇒Число знаков*** изменить точность отображения результатов вычисления глобально.

Упражнение 3. Вывести на экран значение системной константы **π** и установить максимальный формат ее отображения локально.

Упражнение 4. Выполнить следующие операции с комплексными числами:

Z:=-3+2i |Z|= Re(Z)= Im(Z)= arg(Z)=

$\sqrt{Z} =$ $\sqrt[5]{Z} =$ **2Z = Z1:=1+2i Z2:=3+4i**

Z1+Z2= Z1 i := 1 .. 10, $\sum_i i$ $\prod_i (i+1)$ $\int_0^{0.4} x^2 \cdot \lg(x+2)\,dx$ $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\mathrm{ctg}\,2x}{(\sin 2x)^2}\,dx$ $\frac{d}{dx}x^5$ $\frac{d}{dx}\sin(x)$

Упражнение 6. Определить векторы d, S и R через дискретный аргумент i. Отобразить графически таблично заданные функции Si(di) и Ri(di), используя команду ***Вставка ⇒График ⇒X-Y Зависимость***. Чтобы оформить график, необходимо выполнить следующие команды:

i	d_i	S_i	R_i
0	0.5	3.3	2
1	1	5.9	3.9
2	1.5	7	4.5
3	2	6.3	3.7
4	2.5	4.2	1.2

Щелкнуть левой клавишей мыши на графике, чтобы выделить его. Затем щелкнуть правой клавишей мыши, при этом появится контекстное меню в котором необходимо выбрать команду Формат

(появится диалоговое окно ***“Formatting Currently Selected X-Y Plot”).***

Нанести линии сетки на график (***Оси X-Y ⇒Вспом. линии***) и отобразить легенду (***След***

Отформатировать график так, чтобы в каждой узловой точке графика функции Si(di) стоял знак вида &127; (***След ⇒Символ ⇒box***), а график функции Ri(di) отобразить в виде гистограммы (***След ⇒Тип ⇒bar***).

Упражнение 7. Построить декартовы (X-Y Зависимость) и полярные (Полярные Координаты) графики следующих функций:

$$X(\alpha) := \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$
$$Y(\alpha) := 1.5\cos(\alpha)^2 - 1$$
$$P(\alpha) := \cos(\alpha).$$

Для этого необходимо определить a как дискретный аргумент на интервале от 0 до 2π с шагом π/30.

Определить по графику X-Y Зависимость координаты любой из точек пересечения графиков Y(a) и P(a), для этого необходимо:

- Выделить график и выбрать из контекстного меню Масштаб (появится диалоговое окно “X-Y Zoom”) для увеличения части графика в области точки пересечения.
- На чертеже выделить пунктирным прямоугольником окрестность точки пересечения графиков Y(a) и P(a), которую нужно увеличить.
- Нажать кнопку ***Масштаб+,*** чтобы перерисовать график.
- Чтобы сделать это изображение постоянным, выбрать OK.
- Выбрать из контекстного меню Трассировка (появится диалоговое окно “X-Y Trace”).
- Внутри чертежа нажать кнопку мыши и переместить указатель мыши на точку, чьи координаты нужно увидеть.
- Выбрать Copy X (или Copy Y), на свободном поле документа набрать Xper := (или Yper :=) и выбрать пункт меню ***Правка ⇒ Вставка***.

Вычислить значения функций X(a) и Y(a) при a :=π/ 2.

Упражнение 8. Используя команду ***Вставка ⇒Матрица*** создать матрицу Q размером 6 * 6, заполнить ее произвольно и отобразить графически с помощью команды ***Вставка ⇒График ⇒Поверхности.***

Упражнение 9. Построить график поверхности (Поверхности) и карту линий уровня (Контурный) для функции двух переменных

$$X(t,\alpha) := t\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

двумя способами:

1. С помощью функции CreateMesh (сетка размером 40 * 40, диапазон изменения $\boldsymbol{t}$ от -5 до 5, $\boldsymbol{a}$ - от 0 до $2\boldsymbol{\pi}$).
2. Задав поверхность математически, для этого:

Определить функцию X(t,a)

Задать на осях переменных $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{a}$ по 41 точке

`i:=0..40 j:=0..40`

для переменной t_i со значениями, изменяющимися от -5 до 5 с шагом 0.25: **`ti:=-5+0.25i,`** а для переменной a_j - от 0 до 2π с шагом p /20: a_j:= π/20*j.

Определить матрицу ***Mij := X(ti,aj)*** и отобразить ее графически.

С помощью команды Формат контекстного меню вызвать диалоговое окно “Формат 3-D графика” и изменить:

- характеристики просмотра (***Общее ⇒Вид ⇒Вращение, Наклон***),
- цвета и линии поверхности (***Внешний Вид ⇒Свойства линии, Свойства заливки***),
- параметры осей (Оси),
- вид заголовка графика (Название).

Упражнение 10. Отобразить графически пересечение поверхностей

$$f1(x,y) := \frac{(x+y)^2}{10} \qquad f2(x,y) := 5\cdot\cos\left(\frac{x-y}{3}\right)$$

Матрицы для построения поверхностей задать с помощью функции CreateMesh, значения факультативных параметров не указывать. Выполнить однотонную заливку для поверхностей, выбрав из контекстного меню команду Формат. Также из контекстного меню выбрать эффекты Туман, Освещение, Перспектива.

Упражнение 11. Используя переменную ***FRAME*** и команду ***Вид ⇒ Анимация***, создать анимационные клипы с помощью данных приведенных в Таблице 1.

Таблица 1. Варианты упражнения 11

№ варианта	Переменные и функции	FRAME	Тип графика
1	x:= 0, 0.1,.. 30 f(x):=x+FRAME	от 0 до 20	График Полярные Координаты
2	i:=0..FRAME+1 gi:=0.5 i cos(i) hi:=i sin(i) ki:=2 i	от 0 до 50	3D точечный график границы на осях Min Max x - 50 50 y - 50 50 z 0 50 В метке для ввода матрицы укажите (g, h, k)
3	i:=0..20 j:= 0..20 f(x,y):= sin(x2+y2)+FRAME) xi:=-1.5+0.15 i yj:=-1.5+0.15 j Mi,j:=f(xi,yj)	от 0 до 50	График Поверхности В метке для ввода матрицы укажите M
4	r:=FRAME; R:= 6 n:=0..20; m:=0..20 v_n:=2πn/r+1 w_m:=2πm/r+1 x_{mn}:=(R+rCos(v_n))Cos(w_m) y_{mn}:=(R+rCos(v_n))Sin(w_m) z_{mn}:=rSin(v_n)	от 0 до 20	ГрафикПоверхности (границы на всех осях установить от -11 до 11) В метке для ввода матрицы укажите (x, y, z)

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. С помощью какого оператора можно вычислить выражение?
2. Как вставить текстовую область в документ Mathcad?
3. Чем отличается глобальное и локальное определение переменных? С помощью каких операторов определяются?
4. Как изменить формат чисел для всего документа?
5. Как изменить формат чисел для отдельного выражения?
6. Какие системные (предопределенные) переменные Вам известны? Как узнать их значение? Как изменить их значение?
7. Какие виды функций в Mathcad Вам известны?
8. Как вставить встроенную функцию в документ Mathcad?
9. С помощью каких операторов можно вычислить интегралы, производные, суммы и произведения?
10. Как определить дискретные переменные с произвольным шагом? Какой шаг по умолчанию?
11. Как определить индексированную переменную?
12. Какие виды массивов в Mathcad Вам известны?

13. Какая системная переменная определяет нижнюю границу индексации элементов массива?
14. Опишите способы создания массивов в Mathcad.
15. Как просмотреть содержимое массива, определенного через дискретный аргумент?
16. Как построить графики: поверхности; полярный; декартовый?
17. Как построить несколько графиков в одной системе координат?
18. Как изменить масштаб графика?
19. Как определить координату точки на графике?
20. Как построить гистограмму?
21. Какие функции используются для построения трехмерных графиков?
22. Как создать анимацию в Mathcad?
23. Какое расширение имеют сохраненные файлы анимаций?

МУ к ЛР 2

Исследование имитационных моделей информационных систем. Исследование свойств имитационных моделей информационных вычислительных систем

2.1 Теоретическая часть

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Однако такие уравнения могут решаться численными методами с заданной точностью (не более значения заданного системной переменной TOL).

2.1.1 Численное решение нелинейного уравнения

Для простейших уравнений вида f(x) = 0 решение в Mathcad находится с помощью функции root (Рисунок 5).

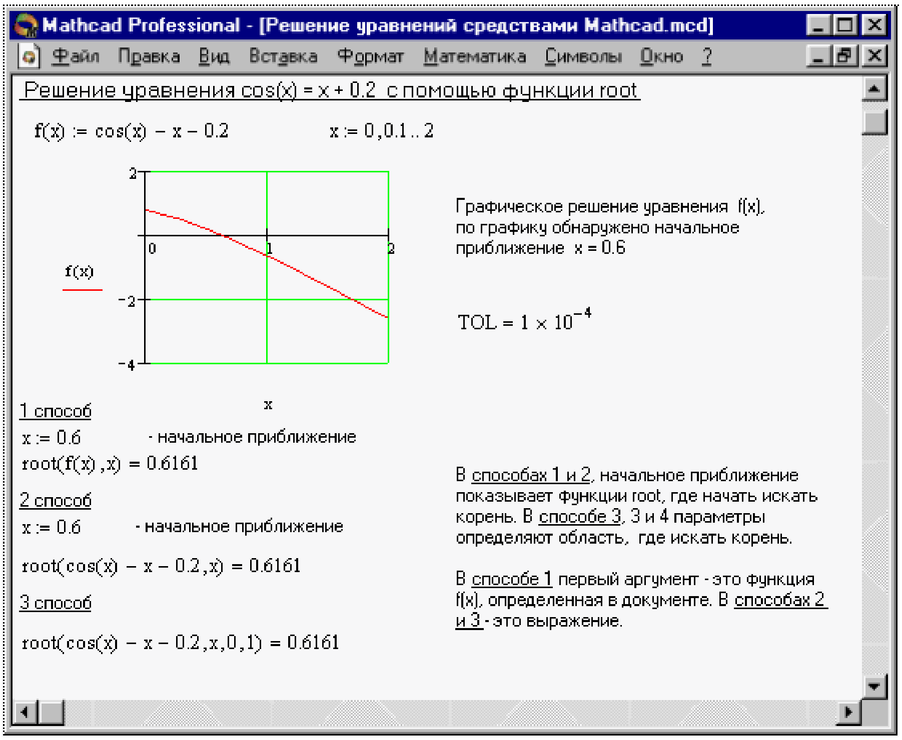


Рисунок 5.

root(f(x1, x2, …), x1, a, b)

Возвращает значение x1, принадлежащее отрезку [a, b], при котором выражение или функция f(x) обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Аргументы:

f(x1, x2, …) - функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения.

x1 - - имя переменной, которая используется в выражении. Этой переменной перед использованием функции root необходимо присвоить числовое значение. Mathcad использует его как начальное приближение при поиске корня.

a, b - необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем a < b.

Приближенные значения корней (начальные приближения) могут быть:

1. Известны из физического смысла задачи.
2. Известны из решения аналогичной задачи при других исходных данных.
3. Найдены графическим способом.

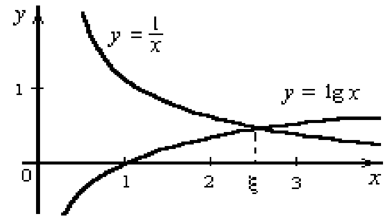
Наиболее распространен графический способ определения начальных приближений. Принимая во внимание, что действительные корни уравнения f(x) = 0 - это точки пересечения графика функции f(x) с осью абсцисс, достаточно построить график функции f(x) и отметить точки пересечения f(x) с осью Ox, или отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение f(x) = 0 равносильным ему уравнением:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция f(x). Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример. Графически отделить корни уравнения:

$$x \lg x = 1. \qquad (1)$$



Уравнение (1) удобно переписать в виде равенства:

$$\lg x = 1 / x.$$

Отсюда ясно, что корни уравнения (1) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = 1/x$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень уравнения (1) или определим его содержащий отрезок [2, 3].

Отсутствие сходимости функции root

Если после многих итераций Mathcad не находит подходящего приближения, то появится сообщение Can't converge to a solution. (отсутствует сходимость). Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- Уравнение не имеет корней.
- Корни уравнения расположены далеко от начального приближения.
- Выражение имеет локальные max и min между начальным приближением и корнями.
- Выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями.
- Выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, исследуйте график f(x). Он поможет выяснить наличие корней уравнения f(x) = 0 и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет root сходиться.

Рекомендации по использованию функции root

- Для изменения точности, с которой функция ***root*** ищет корень, нужно изменить значение системной переменной TOL. Если значение TOL увеличивается, функция root будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение TOL уменьшается, то функция root будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен. Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида. Чтобы изменить значение TOL для всего рабочего документа, выберите команду ***Математика ⇒Параметры… ⇒Переменные ⇒Допуск сходимости (TOL).***

- Если два корня расположены близко друг от друга, следует уменьшить TOL, чтобы различить их.
- Если функция f(x) имеет малый наклон около искомого корня, функция ***root(f(x), x)*** может сходиться к значению r, отстоящему от корня достаточно далеко. В таких случаях для нахождения более точного значения корня необходимо уменьшить значение TOL. Другой

$$g(x) = \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)}$$

вариант заключается в замене уравнения ***f(x) = 0*** на ***g(x) = 0***

- Для выражения f(x) с известным корнем a нахождение дополнительных корней f(x) эквивалентно поиску корней уравнения ***h(x) = f(x)/(x - a).*** Подобный прием полезен для нахождения корней, расположенных близко друг к другу. Проще искать корень выражения h(x), чем пробовать искать другой корень уравнения f(x) = 0, выбирая различные начальные приближения.

Для нахождения корней выражения, имеющего вид

$$v_n x^n + \ldots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0,$$

лучше использовать функцию ***polyroots***, нежели ***root***. В отличие от функции ***root***, функция ***polyroots*** не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

Polyroots(v)

Возвращает корни полинома степени n. Коэффициенты полинома находятся в векторе v длины n + 1. Возвращает вектор длины n, состоящий из корней полинома.

Аргументы:

v - вектор, содержащий коэффициенты полинома.

Вектор ***v*** удобно создавать использую команду ***Символы ⇒ Коэффициенты полинома***. Рисунок 6 иллюстрирует определение корней полинома средствами Mathcad.

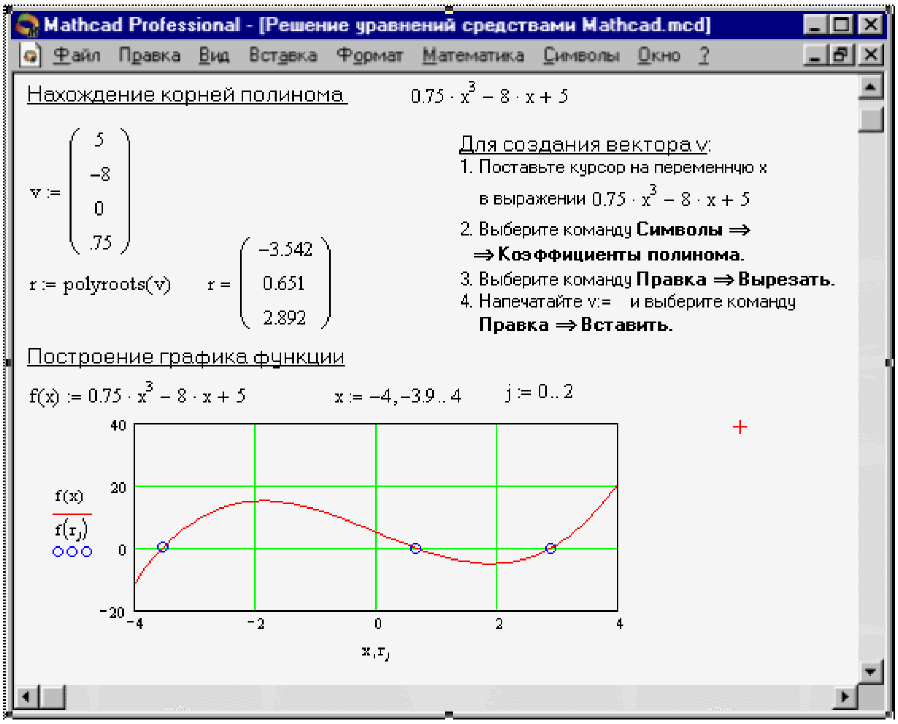


Рисунок 6.

2.1.2 Решение систем уравнений

MathCAD дает возможность решать также и системы уравнений. Максимальное число уравнений и переменных равно 50. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующее:

- Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. Mathcad решает систему с помощью итерационных методов.
- Напечатать ключевое слово Given. Оно указывает Mathcad, что далее следует система уравнений.
- Введите уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте [Ctrl]= для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов <, >, и .
- Введите любое выражение, которое включает функцию Find, например: a:= Find(x, y).

Find(z1, z2, . . .)

Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Ключевое слово Given, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию Find, называют блоком решения уравнений.

Следующие выражения недопустимы внутри блока решения:

- Ограничения со знаком $\neq$.
- Дискретный аргумент или выражения, содержащие дискретный аргумент в любой форме.
- Неравенства вида a < b < c.

Блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово Given и имя функции Find.

Функция, которая завершает блок решения уравнений, может быть использована аналогично любой другой функции. Можно произвести с ней следующие три действия:

Можно вывести найденное решение, напечатав выражение вида:

Find(var1, var2,…) =.

Определить переменную с помощью функции Find:

a := Find(x) - скаляр,

var := Find(var1, var2,…) - вектор.

Это удобно сделать, если требуется использовать решение системы уравнений в другом месте рабочего документа.

Определить другую функцию с помощью Find

f(a, b, c, …) := Find(x, y, z, …).

Эта конструкция удобна для многократного решения системы уравнений для различных значений некоторых параметров a, b, c,…, непосредственно входящих в систему уравнений.

Сообщение об ошибке No solution was found. Try changing the guess value or the value of TOL or CTOL. (Решение не найдено) при решении уравнений появляется, когда:

- Поставленная задача может не иметь решения.
- Для уравнения, которое не имеет вещественных решений, в качестве начального приближения взято вещественное число и наоборот.
- В процессе поиска решения последовательность приближений попала в точку локального минимума невязки. Для поиска искомого решения нужно задать различные начальные приближения.
- Возможно, поставленная задача не может быть решена с заданной точностью. Попробуйте увеличить значение TOL.

Пример 1 Рисунка 7 иллюстрирует решение системы уравнений в MathCAD.

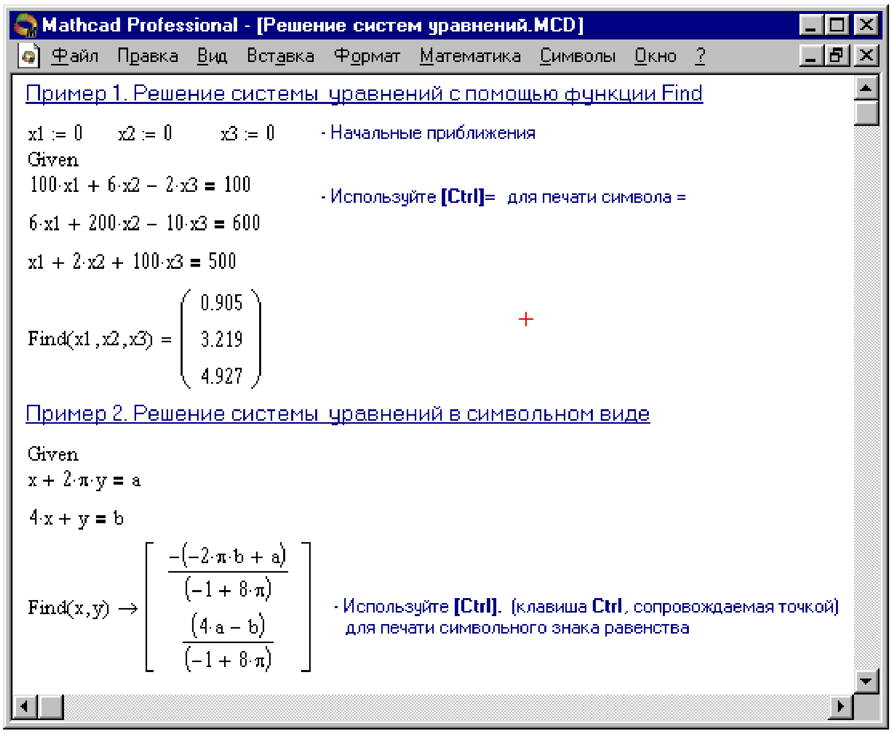


Рисунок 7.

Решение матричных уравнений

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных ***x1, x2, …, xn:***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

В соответствии с правилом умножения матриц рассмотренная система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$Ax = b, \qquad (3)$$

где:

.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

Матрица A, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками - коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении, называется матрицей системы; матрица-столбец b, элементами которой являются правые части уравнений системы, называется матрицей правой части или просто правой частью системы. Матрица-столбец x, элементы которой - искомые неизвестные, называется решением системы.

Если матрица A - неособенная, то есть det A 0 то система (2), или эквивалентное ей матричное уравнение (3), имеет единственное решение.

В самом деле, при условии det A 0 существует обратная матрица A-1. Умножая обе части уравнения (3) на матрицу A-1 получим:

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b, \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned} \qquad (5)$$

Формула (5) дает решение уравнения (3) и оно единственно.

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции lsolve.

lsolve(A, b)

Возвращается вектор решения x такой, что Ax = b.

Аргументы:

A - квадратная, не сингулярная матрица.

b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице A.

На Рисунке 8 показано решение системы трех линейных уравнений относительно трех неизвестных.

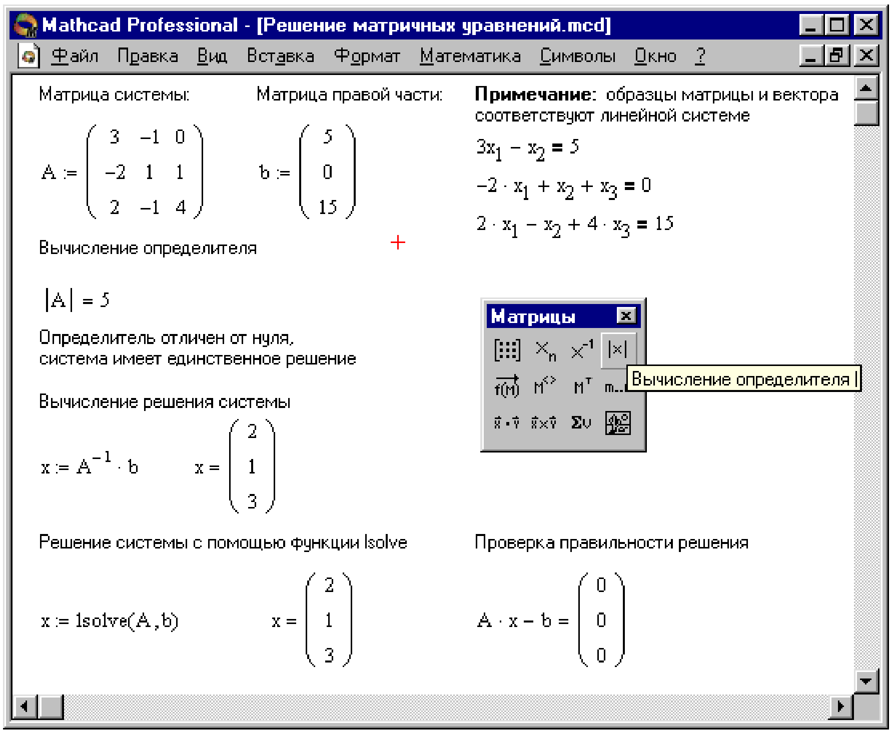


Рисунок 8.

Приближенные решения

Функция Minerr очень похожа на функцию Find (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, Minerr возвращает это приближение. Функция Find в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции Minerr такие же, как и функции Find.

Minerr(z1, z2, . . .)

Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Если ***Minerr*** используется в блоке решения уравнений, необходимо всегда включать дополнительную проверку достоверности результатов.

В Mathcad можно быстро и точно найти численное значение корня с помощью функции root. Но имеются некоторые задачи, для которых возможности Mathcad позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде.

Решение уравнений в символьном виде позволяет найти точные или приближенные корни уравнения:

Если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Поэтому вместо того, чтобы решать уравнение для каждого нового значения параметра, можно просто заменять его значение в найденном символьном решении.

Если нужно найти все комплексные корни полинома со степенью меньше или равной 4, символьное решение даст их точные значения в одном векторе или в аналитическом или цифровом виде.

Команда ***Символы ⇒Переменные ⇒Вычислить*** позволяет решить уравнение относительно некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения.

Чтобы решить уравнение символьно необходимо:

- Напечатать выражение (для ввода знака равенства используйте комбинацию клавиш [Ctrl]=).
- Выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, щелкнув на ней мышью.
- Выбрать пункт меню ***Символы ⇒ Переменные ⇒Вычислить***.

Нет необходимости приравнивать выражение нулю. Если MathCAD не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять выражение нулю.

Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

- Напечатать ключевое слово Given.
- Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова Given. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется [Ctrl]=.
- Напечатать функцию Find, соответствующую системе уравнений.
- Нажать [Ctrl]. (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). Mathcad отобразит символьный знак равенства →.
- Щелкнуть мышью на функции Find.

Пример 2 Рисунка 7 иллюстрирует символьное решение системы уравнений в MathCAD.

2.2 Практическая часть. Задания

Упражнение 1. Построить график функции f(x) (Таблица 1) и приблизительно определить один из корней уравнения. Решить уравнение f(x)= 0 с точностью **ε**= 10^{-4} с помощью встроенной функции Mathcad ***root***;

Таблица 1. Варианты упражнения 1

№ варианта	**f(x)**	**№ варианта**	**f(x)**
1	$e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0, 1]$	8	$0.25x^3 + x - 2$ $x \in [0, 2]$
2	$x - \frac{1}{3+\sin(3.6x)}$ $x \in [0, 1]$	9	$\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ -x, $x \subset [2, 3]$
3	$\arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3}$ $x \in [0, 1]$	10	$3x - 4\ln x - 5$ $x \in [2, 4]$
4	$\sqrt{1 - 0.4x^2} - \arcsin x$ $x \in [0, 1]$	11	$e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0, 1]$
5	$3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1, 3]$	12	$\sqrt{1 - x} - \mathrm{tg}\, x$ $x \in [0, 1]$
6	$\sqrt{2x^2 + 1.2 - \cos x} - 1$ $x \in [0, 1]$	13	$1 - x + \sin x - \ln(1 + x)$ $x \in [0, 2]$
7	$\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$ $x \in [1, 2]$	14	**x^5 - x - 0,2, $x \subset [1, 2]$**

Упражнение 2. Для полинома g(x) (Таблица 2) выполнить следующие действия:

с помощью команды ***Символы ⇒Коэффициенты полинома*** создать вектор V, содержащий коэффициенты полинома;

- решить уравнение ***g(x) = 0*** с помощью функции ***polyroots;***
- решить уравнение символьно, используя команду ***Символы ⇒ Переменные ⇒ Вычислить***.

Таблица 2. Варианты упражнения 2

№ варианта	g(x)	№ варианта	g(x)
1	x4 - 2x3 + x2 - 12x + 20	**9**	x4 + x3 - 17x2 - 45x - 100
2	x4 + 6x3 + x2 - 4x - 60	**10**	x4 - 5x3 + x2 - 15x + 50
3	x4 - 14x2 - 40x - 75	**11**	x4 - 4x3 - 2x2 - 20x + 25
4	x4 - x3 + x2 - 11x + 10	**12**	x4 + 5x3 + 7x2 + 7x - 20
5	x4 - x3 - 29x2 - 71x -140	**13**	x4 - 7x3 + 7x2 - 5x + 100
6	x4 + 7x3 + 9x2 + 13x - 30	**14**	x4 + 10x3 +36x2 +70x+ 75
7	x4 + 3x3 - 23x2 - 55x - 150	**15**	x4 + 9x3 + 31x2 + 59x+ 60
8	x4 - 6x3 + 4x2 + 10x + 75		

Упражнение 3. Решить систему линейных уравнений (Таблица 3):

1. используя функцию ***Find***;
2. матричным способом и используя функцию ***lsolve***.

Таблица 3. Варианты упражнения 3

№ варианта	Система линейных уравнений	№ варианта	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = 23 \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 88 \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 88 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 181 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 99 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 213 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 72 \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -159 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 37 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 124 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -54 \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 83 \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45 \end{cases}$

8	$\begin{cases} 4x_1-5x_2+7x_3+5x_4=165 \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=-15 \\ 9x_1+4x_3-x_4=194 \\ x_1-x_2-2x_3-3x_4=-19 \end{cases}$		

Упражнение 4. Преобразовать нелинейные уравнения системы из Таблицы 4 к виду: ***f₁(x) = y** и **f₂ (y)= x.*** Построить их графики и определить начальное приближение решения. Решить систему нелинейных уравнений с помощью функции ***Minerr***.

Таблица 4. Варианты упражнения 4

№ варианта	Система нелинейных уравнений	№ варианта	Система нелинейных уравнений
1	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7. \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} \sin y + x = -0{,}4, \\ 2y - \cos(x+1) = 0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1, \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5, \\ \cos(y-2) + x = 0{,}5. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5, \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1. \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2, \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8, \\ \sin y - 2x = 1{,}6. \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} \cos(x-2) + y = 0, \\ \sin(y+0{,}5) - x = 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0.8. \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1, \\ \sin(y+0{,}5) - x = 1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \cos(y+0{,}5) - x = 2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} -\sin(x+1) + y = 0{,}8, \\ \sin(y-1) + x = 1{,}3. \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 2y - \sin(x-0{,}5) = 1, \\ \cos(y) + x = 1{,}5. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \sin(y-1) + x = 1{,}3. \end{cases}$		

Упражнение 5. Символьно решить системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4\pi y = a, \\ 2x + y = b. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - \pi z = a, \\ \pi z - z = b, \\ 3y + x = c. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите способы нахождения начального приближения.
2. Какие функции для решения одного уравнения в MathCAD вы знаете? В чем их отличие?
3. Какие аргументы функции root не обязательны?
4. В каких случаях MathCAD не может найти корень уравнения?
5. Какая системная переменная отвечает за точность вычислений?
6. Как изменить точность, с которой функция root ищет корень?
7. Как системная переменная TOL влияет на решение уравнения с помощью функции root?

8. Назовите функции для решения систем уравнений в MathCAD и особенности их применения.
9. Опишите структуру блока решения уравнений.
10. Какой знак равенства используется в блоке решения? Какой комбинацией клавиш вставляется в документ?
11. Какие выражения не допустимы внутри блока решения уравнения?
12. Опишите способы использования функции Find.
13. В каких случаях MathCAD не может найти решение системы уравнений?
14. Дайте сравнительную характеристику функциям Find и Minerr.
15. Какие уравнения называются матричными?
16. Как решать матричные уравнения? Назовите способы решения матричных уравнений.
17. Как символьно решить уравнение или систему уравнений в MathCAD? Какой знак равенства используется? Какой комбинацией клавиш вставляется в документ?
18. Назовите особенности использования символьного решения уравнений.

Список использованных источников

1. Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95./Перевод с англ. - М.: Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1996. -712 с.
2. Дьяконов В.П. Справочник по MathCAD PLUS 6.0 PRO. - М.: “СК Пресс”, 1997. - 336 с.: ил.
3. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCAD 8 PRO в математике, физике и Internet. - М.: “Нолидж”, 2000. - 512 с.: ил.
4. Кудрявцев Е.М. MathCAD 2000 Pro. - М.: ДМК Пресс, 2001. - 576 с.: ил.
5. Очков В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров. - М.: КомпьютерПресс, 1998. - 384 с.: ил.
6. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Лабораторный практикум по высшей математике. - М.: Высш. шк., 2000. - 716 с.: ил.
7. Ханова А.А., Макарова И.Г. Лабораторный практикум по математическому моделированию и методам в расчетах на ЭВМ. - Астрахань: Изд-во АГТУ, 1998. - 93 с.
8. Ханова А.А. Численное решение уравнений и систем. - Астрахань: Изд-во АГТУ, 2001. - 44 с.
9. Ханова А.А. Символьные вычисления в среде MathCAD. - Астрахань: Изд-во АГТУ, 2001. - 34 с.