ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал ордена Трудового Красного Знамени
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

**Е.А. РОМАНЕНКО**

Методические указания
для проведения практических занятий
по дисциплине

# «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Кафедра **«Информатика и вычислительная техника»**

Направление подготовки **09.03.01. Информатика и вычислительная техника**

Профиль **Программное обеспечение и интеллектуальные системы, вычислительный машины, комплексы, системы и сети**

Разработала:
***Ст. преподаватель кафедры ИВТ Романенко Е. А.***

Ростов-на-Дону
2019

Методические указания
для проведения практических занятий
по дисциплине
«Дискретная математика»

Составитель: Романенко Е.А., Ст. преподаватель каф. «ИВТ»

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры «ИВТ»
Протокол от «26» августа 2019 г., № 1.

## Практическое занятие №1.

## Решение задач с применением основных тождеств и законов алгебры логики двоичных функций. Логические формулы алгебры высказываний. Алфавит алгебры логики. Равносильность формул алгебры высказываний. Эквивалентные преобразования логических выражений.

В основе любой логики лежит формальная система. Формальная система представляет собой совокупность чисто абстрактных объектов, не связанных с внешним миром. В формальной системе представлены правила оперирования множеством символов в синтаксической трактовке без учёта смыслового содержания.

Под теоремой в формальной системе понимают высказывание, истинное в данной системе. При построении любой формальной теории (системы) в качестве исходных посылок всегда используются некоторые *неопределяемые термины и аксиомы*.

Неопределяемые термины – это те термины и понятия, смысл и содержание которых считается уже известным, через них вводятся все новые понятия и термины. Аналогично вводится некоторая часть постулатов (формул), которые, как считается в данной теории, не требуют доказательства. Обычно это утверждения, правильность которых не вызывает сомнения, и они принимаются как очевидные истины. Такие выражения (формулы) называют *аксиомами*, а системы, в основе построения которых лежит использование аксиом, называются *аксиоматическими* системами.

Формальную теорию часто называют *исчислением*. Под исчислением понимают формальное представление теории, которое позволяет оперировать с объектами без учёта формального смысла выражений.

Исчисление высказываний (ИВ), т.е. логика высказываний, - это формальная система, интерпретацией которой является алгебра высказываний. Основной задачей исчисления высказываний является порождение общелогических законов – тождественно истинных высказываний, т. е. высказываний (в том числе составных), которые всегда истинны независимо от входящих в них элементарных высказываний. Как и любая формальная система, исчисление высказываний строится на основе четырёх основных процедур: задания алфавита, установления правил построения формул, аксиом и правил вывода.

1. Алфавит состоит из символов трёх категорий:
   - Переменных высказываний, которые обозначаются буквами (x,y, z , a, d, b, $x_1$, $x_2$ и т. д.);
   - Логических связок (или операторов), которые обозначаются символами логических операций ($\vee$, &, $\rightarrow$, и т. д.);
   - Открывающихся и закрывающихся скобок ().

Других символов в ИВ нет.

2. Правила построения формул:

   Обозначаются формулы заглавными буквами латинского алфавита. Формулы получаются с помощью правил, которые описываются базисом и индуктивным шагом:

   ***Базис***: всякое высказывание есть формула;

   ***Индуктивный шаг***: если X и Y – формулы, то $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$, $\acute{x}$ , и т. д. – также формулы. &x; (x$\vee$z ; - не формулы.

3. Аксиомы.

   Тождественную истинность аксиом можно проверить, либо прямым вычислением значения формулы на каждом наборе, либо приведением их к константе **1** путём эквивалентных преобразований, применяемых в булевой алгебре.

Пример 1.

Тождественную истинность <u>заданной</u> аксиомы исчисления высказываний проверить:

a)

рямым вычислением значения формулы на каждом наборе;

b)

риведением её к константе 1 путём эквивалентных преобразований, применяемых в булевой алгебре.

Аксиома:

$(y \to z) \to (\neg z \to \neg y)$;

По пункту “ a ” решения задачи справедливость вычисления доказать построением таблицы истинности на каждом наборе.

По пункту “ b ” решения задачи пояснять применение законов и тождеств Булевой алгебры поэтапно.

1. Таблица истинности:

| | | | | A | B | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $z$ | $\neg z$ | $\neg y$ | $y \to z$ | $\neg z \to \neg y$ | $A \to B$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

2.

$(y \to z) \to (\neg z \to \neg y) = (\neg y \lor z) \to (z \lor \neg y) =$

$\neg(\neg y \lor z) \lor z \lor \neg y = y \land \neg z \lor z \lor \neg y = (z \lor y) \land (z \lor \neg z) \lor \neg y =$
$z \lor y \lor \neg y = 1 \lor z = \mathbf{1}$

Пояснение:

$A \to B = \neg A \lor B$ . Импликация

$A \lor \neg A = 1$ Закон исключённого

третьего

| | |
|---|---|
| $\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$ | Закон де Моргана. |
| $A \lor B \land C = (A\lor B)\land(A\lor C)$ | Дистрибутивный закон |

.

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Формальная система представляет собой совокупность абстрактных или реальных объектов?
2. Какие формулы называют аксиомами? Приведите пример.
3. При каких условиях формула называется теоремой?
4. Какие правила вывода называют продукционными, а какие – правилами переписывания?
5. Как ещё называют формальную теорию?
6. Четыре основные процедуры построения исчисления высказываний?
7. Правила построения формул в исчислении высказываний?
8. Что такое базис и индуктивный шаг в исчислении высказываний?
9. Что называется подформулой формулы?
10. Как для заданной формулы определить её подформулы и глубину их вложенности.
11. Можно ли заданную формулу представить в виде дерева, ветви которого – исходные и промежуточные формулы ?
12. Является ли заданная запись формулы $(x\rightarrow(y\rightarrow z))\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z))$ аксиомой?
13. Как можно проверить тождественную истинность аксиом?
14. Как доказать методом эквивалентных преобразований истинность заданных аксиом?

**Задание.**

Доказать тождественную истинность следующих аксиом:

a. $x \to (y \to x)$;

b. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

c. $x \,\&\, y \to x$;

d. $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \,\&\, y))$;

e. $y \to x \vee y$;

f. $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$;

g. $(x \to y) \to (\neg y \to \neg x)$;

h. $(z \to (y \to x)) \to ((z \to y) \to (z \to x))$;

i. $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \,\&\, y))$;

j. $(y \to z) \to (\neg z \to \neg y)$.

Выполнение заданий практического занятия оформляется в виде отчёта с ответами на контрольные вопросы и с пояснениями (см. пример) выполнения заданий.

## Практическое занятие №2.
## Техническая реализация преобразованной (компактной) булевой функции. Метод карт КАРНО. Структурные схемы эквивалентных цифровых устройств. Полином Жегалкина. Построение полинома Жегалкина с помощью треугольника Паскаля.

Функцию $f(x_1, ..., x_n) \subset$□$P_2$, представим ее в виде формулы через конъюнкцию и сумму по модулю два, используя числа 0 и 1. Это можно сделать, так как $\{x_1\&x_2, x_1 \oplus x_2, 0, 1\}$ полна в $P_2$. В силу свойства $x \& (y \vee z) = xy \vee$□$xz$ можно раскрыть все скобки, привести подобные члены, и получится полином от $n$ переменных, состоящий из членов вида $x^{i_1} x^{i_2} ...x^{i_k}$ , соединенных знаком $\oplus$. Такой полином называется полиномом Жегалкина.

Общий вид полинома Жегалкина: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_s)} a_{i_1 i_2 \ldots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s},$ где $a_{i_1 i_2 \ldots i_s} \in \{0,1\}$ , $s = 0, 1, ..., n$, причем при $s = 0$ получаем свободный член $a_0$.

*Представление функции в виде полинома Жегалкина*

1. Представим любую функцию формулой над $\{x_1\&x_2, \bar{x}\}$ и сделаем замену $\acute{x} = x \oplus 1$ . Этот способ удобен, если функция задана формулой.

Пример 1.9. Представим формулу в виде полинома Жегалкина:

$$(x_1(x_2\acute{x}_3))(x_1 \square \vee x_2)x_3 = (\acute{x}_1 \square \vee \acute{x}_2 \square \vee \acute{x}_3)(x_1 \square \vee x_2)x_3$$

$$¿(\acute{x}_1 x_2 \vee \acute{x}_2 x_1 \vee x_1 \acute{x}_3 \vee x_2 \acute{x}_3)x_3 = \acute{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \acute{x}_2 x_3 = \acute{x}_1 \acute{x}_2 x_3 \acute{\wedge} x_1 \acute{x}_2 x_3$$

$$¿((x_1 \oplus 1)x_2 x_3 \oplus 1)(x_1(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_3.$$

Надо помнить, что четное число одинаковых слагаемых в сумме по *mod*2 дает 0.

2. Метод неопределенных коэффициентов. Он удобен, если функция задана таблицей.

Пример 1.10. Запишем с неопределенными коэффициентами полином Жегалкина для функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3) = (01101001) = a_0 \oplus$□$a_1x_1 \oplus$□$a_2x_2 \oplus$□$a_3x_3 \oplus$□$b_1x_1x_2 \oplus$□$b_2x_2x_3 \oplus b_3x_1x_3 \oplus cx_1x_2x_3$. Затем находим коэффициенты, используя значения функции на всех наборах. На наборе (0, 0, 0) $f(0, 0, 0) = 0$, с другой стороны, подставив этот набор в полином, получим $f(0, 0, 0) = a_0$, отсюда $a_0 = 0$. $f(0, 0, 1) = 1$, подставив набор (0, 0, 1) в полином, получим: $f(0, 0, 1) = a_0 \oplus$□$a_3$, т.к. $a_0 = 0$, отсюда $a_3 = 1$. Аналогично, $f(0, 1, 0) = 1 = a_2$, f(0, 1, 1) = 0 = $a_2 \oplus$□$a_3 \oplus$□$b_2$ $b_2 = 0$; $a_1 = 1$; $0 = a_1 \oplus$□$a_3 \oplus$□$b_3$ $b_3 = 0$; $0 = a_1 \oplus a_2 \oplus$□$b_1$ $b_1 = 0$; $1 = 1 \oplus$□$1 \oplus$□$1 \oplus$□$c$; $c = 0$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus$□$x_2 \oplus$□$x_3$.

3. Многочлен Жегалкина можно получить также с помощью треугольника Паскаля по единицам его левой стороны по таблице следующим образом. Построим многочлен Жегалкина для функции $f$ = (10011110). Верхняя сторона треугольника есть функция $f$. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю для двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника для функции $f$ содержит шесть единиц. Многочлен Жегалкина будет содержать шесть слагаемых. Первая единица треугольника соответствует набору (000). Первое слагаемое многочлена есть 1. Третья снизу единица в левой стороне треугольника соответствует набору (101). В качестве слагаемого многочлена берем $x_1x_3$. Аналогично для других единиц треугольника. Слева от наборов показаны слагаемые многочлена Жегалкина.

| N | $x_1x_2x_3$ | f | Треугольник Паскаля |
|---|---|---|---|
| 1 | 000 | 1 | 1 0 0 1 1 1 1 0 |
| $x_3$ | 001 | 0 | 1 0 1 0 0 0 1 |
| $x_2$ | 010 | 0 | 1 1 1 0 0 1 |
| $x_2x_3$ | 011 | 1 | 0 0 1 0 1 |
| $x_1$ | 100 | 1 | 0 1 1 1 |
| $x_1x_3$ | 101 | 1 | 1 0 0 |
| $x_1x_2$ | 110 | 1 | 1 0 |
| $x_1x_2x_3$ | 111 | 0 | 1 |

Тогда $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$.

*Теорема 1.2.( Жегалкина)*

Каждая функция из $P_2$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина единственным образом. Здесь единственность понимается с точностью до порядка слагаемых в сумме и порядка сомножителей в конъюнкциях:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_s)} a_{i_1 i_2 \ldots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}, \quad a_{i_1 i_2 \ldots i_s} \in \{0,1\}, \; s = 0, 1, \ldots, n.$$

Определение1.15. Функция $f(x_1, ..., x_n)$, полином Жегалкина для которой имеет следующий линейный относительно переменных вид: $f = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus ... \oplus a_nx_n$, называется линейной.

Лемма о нелинейной функции. Суперпозицией нелинейной функции, отрицания и константы 1 можно получить конъюнкцию.

Определение1.16: Говорят, что функция $f(x_1, ..., x_\mathrm{n})$ сохраняет константу $a \in \{0, 1\}$, если $f(a, \ldots, a) = a$.

Пример 1.11. Функция $xy$ сохраняет 0, сохраняет 1. Функция $x \to y$ сохраняет 1 и не сохраняет 0.

**Задание**

Методом треугольника Паскаля построить полином Жегалкина:

1. $f(\tilde{x}^2) = (1000)$;
2. $f(\tilde{x}^2) = (0010)$;
3. $f(\tilde{x}^3) = (01101110)$;
4. $f(\tilde{x}^3) = (01110011)$;
5. $f(\tilde{x}^3) = (10101110)$;
6. $f(\tilde{x}^3) = (10000100)$;

## Практическое занятие №3.

## Булева алгебра предикатов. Решение задач: определение значения истинности предикатных формул.

Высказывания в алгебре логики рассматриваются как единый объект с точки зрения истинности или ложности. Структура и содержание высказываний не рассматриваются. Однако на практике для построения полноценного логического вывода важно иметь представление о структуре и содержании используемых в выводе высказываний. Поэтому логика предикатов является расширением логики высказываний, которую включает в себя в качестве составной части.

Одноместным предикатом P(x) называется произвольная функция переменной $x$ , определённая на множестве M и принимающая значение из множества $\{0, 1\}$. $P(x_1, x_2, \ldots.., x_n)$ можно трактовать, что переменные $x_1, x_2, \ldots.., x_n$ связаны отношением $P$. n – местный предикат – это двузначная функция от $n$ аргументов, определённая на произвольном множестве $M$ , принимающая значение 0 или 1.

Пример. Предикат P(x) – «x – простое число» определён на множестве N. Предикат Q(x) – «sin x = 0» определён на множестве R.

Предикаты, так же как высказывания, принимают два значения (1, 0) истина и ложь. Кроме логических операций в логике предикатов вводятся кванторные операции, что позволяет повысить выразительную мощность предикатных предложений. Как известно из курса «Дискретная математика» кванторов всего два(**∀, ∃**).

Пример. Пусть предикат P(x, y) – «$x \le y$ » определён на множестве N.

Предикатное выражение $\exists x \forall y\, P(x, y)$ означает - Существует x, который меньше любого y – значение истинности 1.

Предикатное выражение $\exists x \exists y\, P(x, y)$ означает - Существуют такие x и y, что $x \le y$ - значение истинности 1.

Предикатное выражение $\forall x \forall y\, P(x, y)$ означает - Для любого x и любого y имеет место $x \le y$ – значение истинности 0.

Логику предикатов можно рассматривать как формальную систему. О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в формулу предикаты. При задании аргументам предикатов конкретных значений предикаты становятся высказываниями и можно говорить об их истинности или ложности.

**Задание.**

Доказать тождественную истинность или тождественную ложность предикатных выражений, преобразовав их по правилам, регламентирующим преобразование выражений в исчислении предикатов, содержащих кванторы.

1. $\forall x( P(x) \to ( P(x) \lor P(y)));$

2. $\exists x\exists y(( F(x) \to F(y)) \,\&\, ( F(x) \to \neg F(y)) \,\&\, F(x));$

3. $\forall x( q \to p_1(x)) \leftrightarrow (q \to \forall x p_1(x));$

4. $\forall x( F1(x) \to F2(x)) \to (\forall x F1(x) \to \forall x F2(x));$

5. $\forall x( p_1(x) \to p_2(x)) \leftrightarrow (\exists x p_1(x) \to \forall x p_2(x));$

6. $\exists x R(x) \lor \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(R(x) \lor Q(x));$

7. $\forall x( p(x) \to \neg Q(x)) \to \neg(\forall x p(x) \,\&\, \forall x Q(x));$

8. $\exists x(F(x) \to \neg F(x)) \,\&\, ( \neg F(x) \to F(x));$

9. $\exists$

$x\exists y((F(x) \to F(y))\ \&\ (F(x) \to \neg F(y))\ \&\ F(x));$

1. $\exists$

$x\exists y((F(x) \to F(y))\ \&\ (F(x) \to \neg F(y))\ \&\ F(x)).$

При выполнении решения задач показать, обосновать все шаги доказательства и привести результат.

## Практическое занятие №4.
## Решение задач с применением основных правил комбинаторики.

Пусть есть некоторое конечное множество элементов $U=\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$. Рассмотрим набор элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_j}$, где $a_{i_j} \in U$, $j = 1, 2, ..., m$.

Этот набор называется выборкой объема m из $n$ элементов. Любое подмножество $U$ является выборкой, но не всякая выборка является подмножеством $U$, так как в выборку один и тот же элемент может входить несколько раз (в отличие от подмножества). Комбинаторные задачи связаны с подсчетом числа выборок объема m из n элементов, где выборки подчиняются определенным условиям, т.е. выбор производится по какому-нибудь принципу. Подсчет числа выборок основывается на двух правилах теории множеств.

*Перестановки.*

Определение: Упорядоченные выборки, объемом $n$ из $n$ элементов, где все элементы различны, называются перестановками из $n$ элементов. Число перестановок из $n$ элементов обозначается $P_n$.

*Теорема1.* $P = n!$

*Пример 3.* Сколько существует способов, чтобы расположить на полке 10 различных книг? Ответ: 10!

*Размещения.*

*Определение:* Упорядоченные выборки объемом $m$ из $n$ элементов ($m < n$), где все элементы различны, называются размещениями. Число размещений из $n$ элементов по $m$ обозначается $A_n^m$.

*Теорема2.* $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

*Пример 4.* Группа из 15 человек выиграла 3 различных книги. Сколькими способами можно распределить эти книги среди группы?

Имеем $A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730.$

*Сочетания.*

*Определение:* Неупорядоченные выборки объемом $m$ из $n$ элементов ($m < n$) называются сочетаниями. Их число обозначается $C_n^m$.

*Теорема3.* $C_n^m = \frac{m!}{m!(n-m)!}$.

*Пример 7.* Группа из 15 человек выиграла 3 одинаковых книги. Сколькими способами можно распределить эти книги?

$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455.$

Размещения с повторениями.

*Определение:* Упорядоченные выборки объемом $m$ из $n$ элементов, где элементы могут повторяться, называются размещениями с повторениями. Их число обозначается $A_n^m(n)$.

*Теорема4.* $A_n^m(n) = n^m$.

*Пример 8.* Кодовый замок состоит из четырех разрядов, в каждом разряде независимо от других могут быть выбраны цифры от 0 до 9. Сколько возможных комбинаций?

Здесь $n = 10$, $m = 4$ и ответом будет $10^4$.

*Перестановки с повторениями.*

*Определение:* Пусть имеется $n$ элементов, среди которых $k_1$ элементов первого типа, $k_2$ элементов второго типа и т.д., $k_s$ элементов $s$-го типа, причем $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$. Упорядоченные выборки из таких $n$ элементов по $n$ называются перестановками с повторениями, их число обозначается $C_n(k_1, k_2, ..., k_s)$. Числа $C_n(k_1, k_2, ..., k_s)$ называются полиномиальными коэффициентами.

*Теорема5.* $C_n(k_1, ..., k_s)= \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}$.

*Замечание.* Числа $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ называются биноминальными коэффициентами. Из этой формулы следует, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

*Сочетания с повторениями.*

*Определение:* Пусть имеется $n$ типов элементов, каждый тип содержит не менее $m$ одинаковых элементов. Неупорядоченная выборка объемом m из имеющихся элементов (их число $\geq m\times n$ ) называется сочетанием с повторением. Число сочетаний с повторениями обозначается $C_n^m(n)$.

*Теорема6.* Количество различных сочетаний из m объектов по n

$$C_n^m(n) = \mathrm{C}_{\mathrm{n+m-1}}^{\mathrm{m}} = \frac{(\mathrm{n+m-1})!}{n!(m-1)!}.$$

*Пример 12.* В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Покупатель берет 4 пирожных. Сколькими способами он может это сделать ? (Предполагается, что пирожных каждого вида $\geq 4$).

Число способов будет $C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{7\times 8\times 9\times 10}{1\times 2\times 3\times 4} = 210.$

**Задания**

1. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1680.

2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределять между собой обязанности?

Ответ: 42.

3. В парламент нового независимого государства нужно представить для рассмотрения варианты флагов (для определенности – три горизонтальных полосы). Сколько вариантов флагов можно представить, если каждый флаг должен содержать три разных цвета, а количество цветов имеющегося материала, из которого делаются флаги, равно 12?

Ответ:(12!/9! = 1320)

## Практическое занятие №5.
## Оптимизация графов. Алгоритмы Дейкстры и Краскалла.
## Решение задач по оптимизации графов.

Определение. Если на плоскости задать конечное множество V точек и конечный набор линий X, соединяющих некоторые пары из точек V, то полученная совокупность точек и линий будет называться графом.

При этом элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества X – ребрами.

В множестве V могут встречаться одинаковые элементы, ребра, соединяющие одинаковые элементы называются петлями. Одинаковые пары в множестве X называются кратными (или параллельными) ребрами. Количество одинаковых пар
(v, w) в X называется кратностью ребра (v, w).

Множество V и набор X определяют граф с кратными ребрами – псевдограф.

$$G = (V, X)$$

Псевдограф без петель называется мультиграфом.

Если в наборе X ни одна пара не встречается более одного раза, то мультиграф называется графом.

Если пары в наборе X являются упорядоченными, то граф называется ориентированным или орграфом.

Графу соответствует геометрическая конфигурация. Вершины обозначаются точками (кружочками), а ребра – линиями, соединяющими соответствующие вершины.

Определение. Если $x = \{v, w\}$ – ребро графа, то вершины $v, w$ называются концами ребра $x$.

Если $= (v, w)$ – дуга орграфа, то вершина $v$ – начало, а вершина $w$ – конец дуги $x$.

Определение. Вершины $v, w$ графа $G = (V, X)$ называются смежными, если $\{v,w\} \in X$. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Определение. Степенью вершины графа называется число ребер, которым эта вершина принадлежит. Вершина называется изолированной, если ее степень равна единице и висячей, если ее степень равна нулю.

Определение. Графы $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ называются изоморфмными, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi$: $V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее смежность.

Определение. Маршрутом (путем) для графа $G(V, X)$ называется последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3\ldots x_kv_{k+1}$. Маршрут называется замкнутым, если его начальная и конечная точки совпадают. Число ребер (дуг) маршрута (пути) графа называется длиной маршрута (пути).

Определение. Незамкнутый маршрут (путь) называется цепью. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется простой цепью.

Определение. Замкнутый маршрут (путь) называется циклом (контуром). Цикл, в котором все вершины попарно различны, называется простым циклом.

2.Матрицы графов.Пусть D = (V, X) – орграф, где V = $\{v_1, \ldots, v_n\}$, X = $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

Определение. Матрицей смежности орграфа D называется квадратичная матрица A(D) = $[a_{ij}]$ порядка $n$, у которой

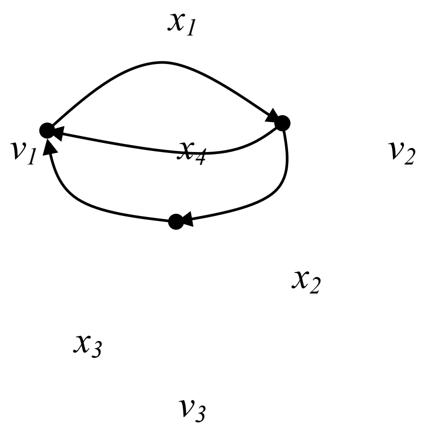
$$a_{ij} = ¿\{1,\ \text{если}\ (v_i, v_j) \in X ¿¿¿¿$$

Определение. Если вершина $v$ является концом ребра $x$, то говорят, что $v$ и $x$ – инцидентны.

Определение. Матрицей инцидентности оргафа D называется матрица размерности $n \times m$ B(D) = $[b_{ij}]$, у которой

$$b_{ij} = ¿\{1,\ \text{если вершина}\ v_i\ \text{является концом дуги}\ x_j ¿\{-1,\ \text{если вершина}\ v_i\ \text{является началом дуги}\ x_j ¿¿¿¿$$

Пример. Записать матрицы смежности и инцидентности для графа, изображенного на рисунке.




Составим матрицу смежности:

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 0 |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 |
| $v_3$ | 1 | 0 | 0 |

Т.е. $A(D)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ - матрица смежности.

Матрица инцидентности:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 1 | -1 | 0 | -1 |
| $v_3$ | 0 | 1 | -1 | 0 |

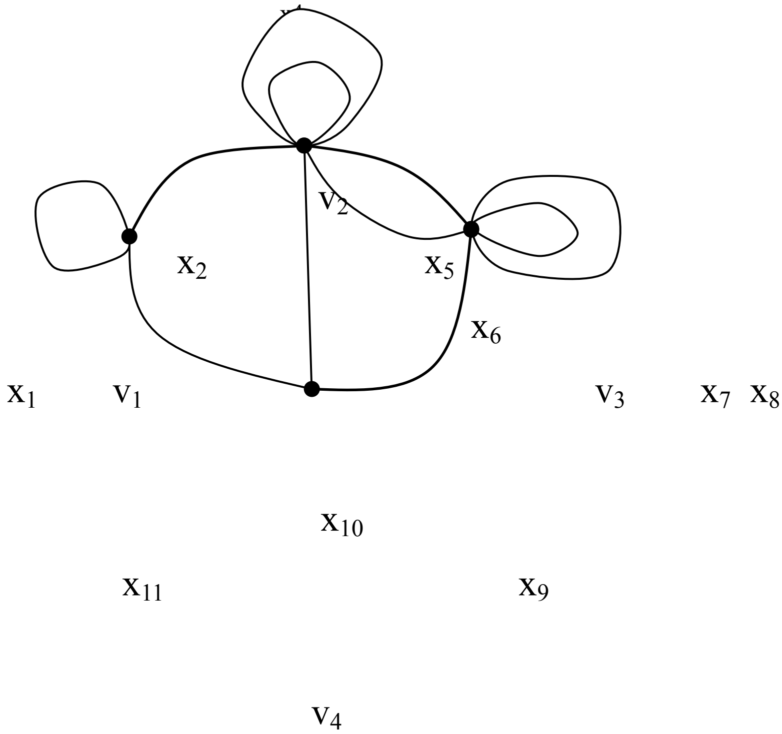
Т.е. $B(D)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Если граф имеет кратные дуги (ребра), то в матрице смежности принимается $a_{ij}=k$, где $k$ – кратность дуги (ребра).

С помощью матриц смежности и инцидентности всегда можно полностью определить граф и все его компоненты. Такой метод задания графов очень удобен для обработки данных на ЭВМ.

Пример. Задана симметрическая матрица Q неотрицательных чисел. Нарисовать на плоскости граф G(V, X), имеющий заданную матицу Q своей матрицей смежности. Найти матрицу инцидентности R графа G. Нарисовать также орграф $\vec{G}(N,A)$, имеющий матрицу смежности Q, определить его матрицу инцидентности C.

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$




Составим матрицу инцидентности:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v_2$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $v_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $v_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Итого: $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

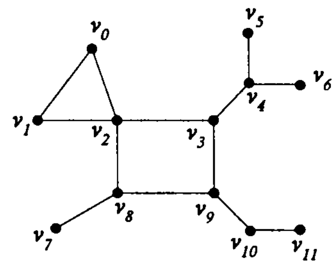
**Задания**

1. Для заданной матрицы смежности

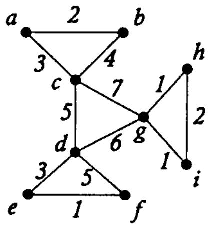
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

найдите соответствующий граф и матрицу инцидентности.

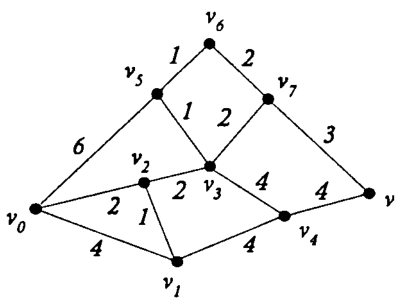
2. Найти остовное дерево алгоритмом ПВГ




3. Найти минимальное остовное дерево алгоритмом Краскала



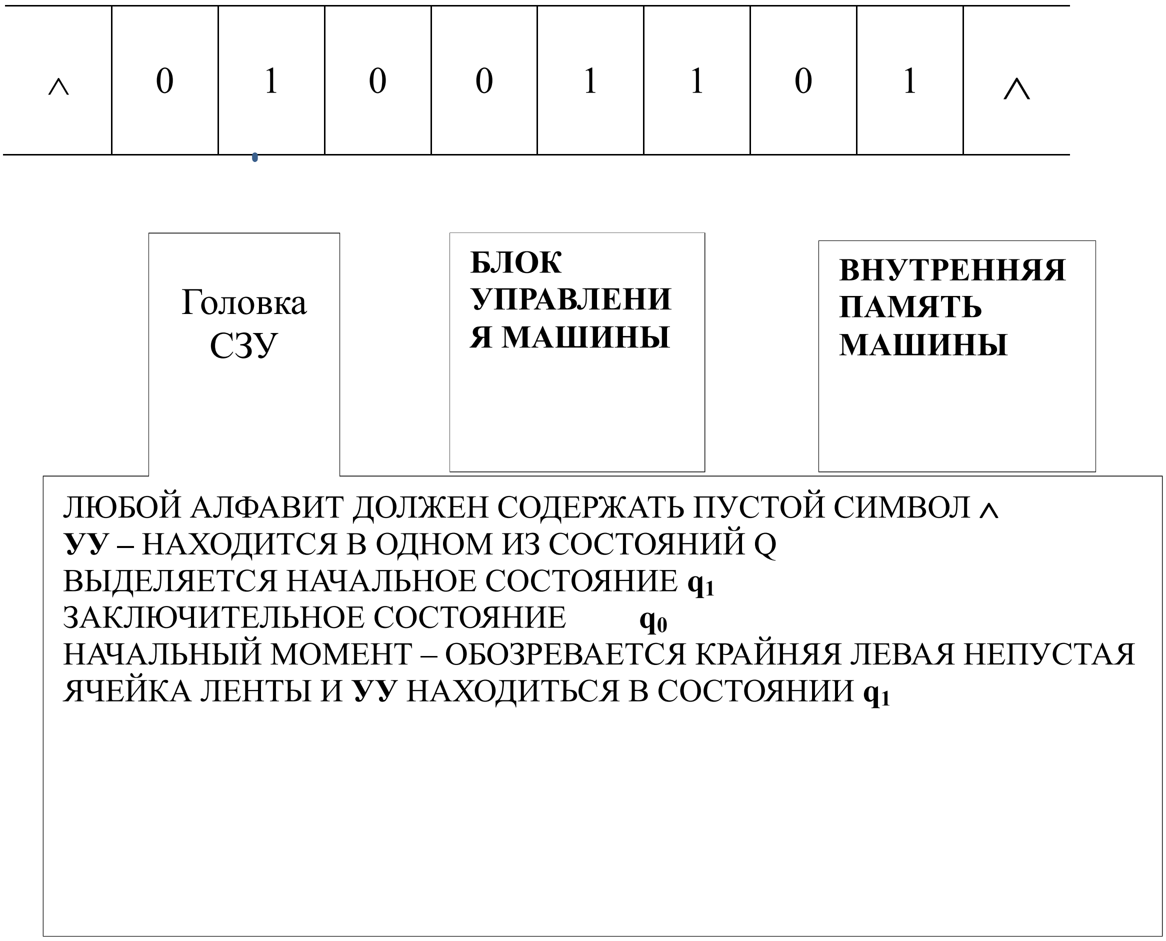

1. Найти кратчайшего расстояния между вершинами $v_0$ и v




**Практическое занятие №6.**

**Машина Тьюринга. Решение задач на применимость машины Тьюринга**
**(работающей по заданной программе P) к заданному слову S.**

Лента




Правила преобразования, которые выполняет МТ, определяются системой команд. Работа МТ может быть описана следующим образом: системой команд, таблицей, диаграммой (графом) переходов.

<u>Пример реализации МТ с помощью системы команд</u>.

Выяснить, применима ли машина Тьюринга, заданная программой P к слову S и, если применима, то указать результат применения машины Тьюринга к заданному слову.

При решении задачи следует учесть, что в начальный момент времени головка машины обозревает самую левую ячейку на ленте и устройство управления (УУ) находится в начальном состоянии $q_1$.

$q_1 0 \rightarrow 0 q_3$

$q_1 1 \rightarrow 1 R q_1$

$q_2 0 \rightarrow 0 L q_3$

$P = \quad q_2 1 \rightarrow 1Rq_3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad S = 111101$

$q_3 0 \rightarrow 0Rq_0$

$q_3 1 \rightarrow 1Lq_3$

Решение.

Машина Тьюринга, заданная программой P, применима к слову, если она закончит работу за конечное число шагов. Предполагается, что слово S записывается с левого конца ленты, начиная с первой ячейки. Все правые ячейки после окончания слова заполняются пустыми символами. Начальное состояние машины, при котором головкой обозревается первая ячейка и УУ находится в начальном состоянии q1 изображено далее в виде двух строк: на первой строке – лента с содержимым в её ячейках, а на второй строке – головка с текущим состояниям УУ.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | $q_1$ | | | | | | | | |

Из приведённого рисунка первый шаг работы машины определяет адрес $q_1 1$. По этому адресу следует выполнить команду $1Rq_1$ . В обозреваемую ячейку записывается 1, головка сдвигается на одну ячейку вправо и УУ переходит в состояние $q_1$ .

Результаты выполнения этой и последующих команд отражены ниже.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | | $q_1$ | | | | | | | |
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | | | $q_1$ | | | | | | |
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | | | | $q_1$ | | | | | |
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | | | | | $q_1$ | | | | |
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | | | | | $q_3$ | | | | |
| $\wedge$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\wedge$ | $\wedge$ | $\wedge$ |
| | | | | | | $q_0$ | | | |

$q_3 0 \rightarrow 0Rq_0$. В текущую ячейку записывается 0, головка сдвигается на одну ячейку вправо. УУ переходит в состояние $q_0$ (заключительное состояние машины).

Машина применима к данному слову и результат её работы 111101

Контрольные вопросы к выполнению заданий практического занятия.

1. Определение алгоритма и основные требования, применяемые к алгоритму?
2. Уточнение понятия алгоритма с помощью машины Тьюринга (МТ)?
3. Элементарные операторы – сингулярный и бинарный?
4. Способы описания алгоритмов (словесное, линейная форма записи, в виде структурной схемы)?
5. Рекурсивные функции?
6. Частично рекурсивная функция?
7. Управляющее устройство машины Тьюринга, лента, устройство обращения к ленте?
8. Два варианта работы МТ?
9. Правила преобразования, выполняемые МТ?
10. Описание работы МТ таблицей?
11. Описание работы МТ диаграммой (графом) переходов?

**Задания.**

Выяснить, применима ли машина Тьюринга, заданная программой P к слову S и, если применима, то указать результат применения машины Тьюринга к заданному слову.

**0**.

$q_1 0 \to 0Rq_2$

$q_1 1 \to 1Rq_1$

$q_2 0 \to 0Rq_2$

P= $q_2 1 \to 1Rq_3$ S= 110101

$q_3 0 \to 0Lq_0$

$q_3 1 \to 1Rq_3$

**1.**

$q_1 0 \to 1q_2$

$q_1 1 \to 1Rq_1$

$q_2 0 \to 0Lq_3$

P= $q_2 1 \to 0Rq_3$ S= 111101

$q_3 0 \to 0Rq_0$

$q_3 1 \to 1Lq_3$

**2**.

$q_1 0 \to 1Rq_2$

$q_1 1 \to 1Rq_1$

$q_2 0 \to 0Lq_3$

$q_2 1 \to 0q_2$ S= 101111

$q_3 0 \to 0Rq_2$

$q_3 1 \to 1Lq_0$