ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра Информатика и вычислительная техника

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Методические указания по лабораторным работам

для студентов очной и заочной форм обучения
Направление подготовки – **09.03.01 «**Информатика и вычислительная техника»

Ростов-на-Дону

2019

Методические указания по
лабораторным работам

по дисциплине
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Составители: Лобзенко П.В. к.т.н., доцент, Щербань И.В. д.т.н., профессор

Рассмотрены и одобрены
на заседании кафедры Информатика и вычислительная техника
Протокол от 26.08.19 №1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Исследование методов решения линейных уравнений

1. Цели занятия:

Исследовать методы прогонки и итераций решения линейных уравнений.

2. Рекомендации:

Изучить справочный материал, приведенный ниже и лекции по этой теме.

Краткая теория

Условимся говорить о численном решении таких СЛАУ, у которых число уравнений совпадает с числом вещественных неизвестных, а решение предполагается существующим и единственным.

Итак, изучается вопрос о численном решении систем вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \quad (I)$$

или иначе, векторно-матричных уравнений

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ - вектор свободных членов,

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ - вектор неизвестных (вектор-решение).

Метод Гаусса

Наиболее известным и популярным способом решения линейных систем вида линейных уравнений является метод Гаусса. Суть его проста – это последовательное исключение неизвестных. Решение получают в два этапа: на певом осуществляется приведение исходной системы уравнений с помощью преобразований к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей (прямо ход); на втором, т.е. в обратном ходе (снизу вверх), находятся последовательно все неизвестные системы.

В предположении, что $a_{11} \neq 0$, первое уравнение системы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = a_{i\,m,+1},\ i = 1,\dots,m$$

делим на коэффициент a_{11}, в результате получаем уравнение

$$x_1 + \sum_{j=2}^{m} a^{1}_{1j} x_j = a^{1}_{1,m+1}$$

Затем из каждого из остальных уравнений вычитается первое уравнение, умноженное на соответствующий коэффициент a_{i1}. В результате эти уравнения преобразуются к виду

$$\sum_{j=2}^{m} a^{1}_{ij} x_j = a^{1}_{i\,m,+1}, i = 2,\dots,m$$

первое неизвестное оказалось исключенным из всех уравнений, кроме первого. Далее в предположении, что $a^{1}_{22} \neq 0$, делим второе уравнение на коэффициент a^{1}_{22} и исключаем неизвестное из всех уравнений, начиная со второго и т.д. В результате последовательного исключения неизвестных система уравнений преобразуется в систему уравнений с треугольной матрицей

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}^{i} x_j = a_{i,m+1}^{i}, i = 1,...,m$$

Совокупность проведенных вычислений называется прямым ходом метода Гаусса.

Из m -го уравнения системы (2) определяем x_m, из $(m-1)$-го уравнения определяем x_{m-1} и т.д. до x_1. Совокупность таких вычислений называют обратным ходом метода Гаусса.

Реализация прямого метода Гаусса требует $N \sim 2m^2/3$ арифметических операций, а обратного - $N \sim m^2$ арифметических операций.

Метод итераций (метод последовательных приближений).

Приближенные методы решения систем линейных уравнений позволяют получать значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов. Процесс построения такой последовательности называется итерационным (повторяющимся).

Эффективность применения приближенных методов зависят от выбора начального вектора и быстроты сходимости процесса.

Рассмотрим метод итераций (метод последовательных приближений). Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$Ax=b, \qquad (1)$$

Предполагая, что диагональные элементы $a_{ii} \neq 0$ (i = 2, ..., n), выразим x_i через первое уравнение систем x_2 - через второе уравнение и т. д. В результате получим систему, эквивалентную системе (1):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим $b_i/a_{ij} = \beta_i$; $-a_{ij}/a_{ii} = \alpha_{ij}$, где i == 1, 2, ...,n; j == 1,2,..., n. Тогда

система (2) запишется таким образом в матричной форме

$$x = \beta + \alpha x \qquad (3)$$

Решим систему (16) методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем столбец свободных членов. Любое (k+1)-е приближение вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (k = 0,1,\dots,n)$$

Если последовательность приближений x(0),...,x(k) имеет предел $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, то этот предел является решением системы (2), поскольку в силу свойства предела $\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, т.е. $x = \beta + \alpha x$

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Решить систему уравнений указанными методами.

3.2. Использовать MS Excel или любую среду программирования для выполнения расчетов.

3.3. Оформить отчет, включив в него задание, ход его выполнения и результат решения.

4. Варианты заданий

Выполняется решение системы 3-х линейных уравнений вида (I), где коэффициенты выбираются по следующему правилу:

a_{11}=№ по журналу;

a_{12}= a_{11}+12,85*№ по журналу;

a_{13}= a_{12}+85,95*№ по журналу;

a_{21}=№ по журналу-45,6;

a_{22}= a_{21}-12,85*№ по журналу; a_{23}= a_{22}-85,95*№ по журналу;

b_1=№ по журналу/23,25; b_2= b_1*№ по журналу; b_3= b_1/№ по журналу.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Исследование методов решения систем нелинейных уравнений

1. Цели занятия:
Научить студентов методам решения систем нелинейных уравнений. Исследовать особенности этих решений.

2. Рекомендации: Изучить материал лекции №3 и краткую теорию.

Краткая теория

Нелинейные уравнения. Понятия и определения

Уравнение вида: f(x)=0, если f(x) не является многочленом 1-ой степени, называется нелинейным или трансцедентным.

Всякое x=x*, обращающее в 0 уравнение, есть его корень.

Решение состоит из 2-х этапов:

а) отделение корней (изолированные корни);

б) уточнение корней.

Теорема 1

Если, непрерывная на отрезке [a;b] функция f(x) на его краях принимает разные значения, т.е. f(a)f(b)<0, то внутри этого отрезка существует хотя бы один корень уравнения f(x)=0.

Корень единственный, если производная f/(x) сохраняет знак внутри интервала (a;b).

Алгоритм отделения корней:

- определяются граничные точки x=a, x=b области существования f(x);
- вычисляются значения функции f(x) на [a;b] с шагом h до смены знака функции при переходе от f(x) до f(x+h) (шаг выбирается с учетом особенностей функции);

Решение нелинейных уравнений методом итерации.

Уравнение f(x)=0 должно удовлетворять условиям:

$f(x)$ должна быть дифференцируема на $[a,b]$; $f(x)$ должна принимать разные значения на краях интервала: $f(a)f(b)<0$ (тогда внутри интервала имеется хотя бы один корень уравнения); $f(x)=0$ на $[a,b]$ (если производная внутри интервала не меняет знак, то корень один);

Метод заключается в том, что:

а)заменяется уравнение $f(x)=0$ на равносильное ему уравнение вида $x=\varphi(x)$;

б)произвольно выбирается начальное значение $x0 \in [a,b]$;

в)вычисляются итерации:

$x1 =\varphi(x0)$; $x2 =\varphi(x1)$;

………………..   xn+1

$=\varphi(xn)$; n=0,1…..

г)проверяется выполнение условий сходимости:

Теорема: процесс итерации $xn+1=\varphi(xn)$ сходится не зависимо от выбора начального значения $x0 \in [a,b]$ и предельное значение $x^*=\lim_{n\to\infty} xn$ – единственный корень уравнения $x=\varphi(x)$ на $[a,b]$, если:

все значения $\varphi(x)\in[a,b]$ и она дифференцируема на этом отрезке; существует

правильная дробь q, такая, что $|\varphi(x)|\leq q<1$.

Алгоритм метода итераций:

А) исходное уравнение заменяется функцией вида $\varphi(x)=\lambda f(x)+x$, где: (1)

$-1/r<\lambda<0$ при $f(x)>0$;

$0<\lambda<1/r$ при $f(x)<0$;

$r=\max(|f(a)|,|f(b)|)$.

Б) выбирается начальное значение $x0\in[a,b]$.

В) в (1) по условиям после вычисления r выбирается λ и составляется рекурентная формула метода итерации вида:

$Xn+1=\lambda f(xn)+xn$

Г) Проверяются условия сходимости:

$\Delta x=|x^*-xn|\leq m/(1-q)qm$,   (2) где

$m= |xn- \varphi(xn)|$; $q=| \varphi(xn) |$.

Процесс вычисления (пункты в, г) повторяется до тех пор, пока не достигается заданная точность решения Е, т.е. расчеты прекращаются, когда выполнится неравенство (пункт г):

$\Delta x\leq E$.

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Решить уравнения указанными методами.

3.2. Использовать MS Excel или любую среду программирования для выполнения расчетов.

3.3. Оформить отчет, включив в него задание, ход его выполнения и результат решения.

4. Варианты задания:

Выполняется решение 3-х линейных уравнений, номера которых выбираются следующим образом:

− первое = № по журналу; −
второе = № по журналу+25; −
третье = № по журналу+35.

Если получившееся число превышает количество заданий, то отсчет начинается сначала.

Таблица заданий

Nвар	Уравнение	Nвар	Уравнение
1	$2 - x = \ln x$	31	$(x-3)^2 \lg(x-2) = -2$
2	$x^2 + 4\sin x = 0$	32	$x + 3 + \cos x - x^2 = 0$
3	$\mathrm{tg}\,(0{,}36x + 0{,}4) = x^2$	33	$(x-1)^2 \lg(x+11) = 1$
4	$1 + \lg x = 0{,}5$	34	$e^{2x} \cos(2x) + x = 0$
5	$4\lg x - x + 2 = 0$	35	$x + \lg(1 + x) = 1{,}5$
6	$x - \sin x = 0{,}25$	36	$2\sin(x - 0{,}6) = 1{,}5$
7	$\lg\,(0{,}4x + 0{,}4) = x^2$	37	$\lg(1 + 2x) = 2 - x$
8	$\sqrt{x} - \cos 0{,}387x = 0$	38	$\lg(x)/(x + 1)^2 = 0$
9	$\lg x - 7/(2x+6) = 0$	39	$x\sqrt{x+1} = 1$
10	$\mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}2) = x^2$	40	$3x + \cos x + 1 = 0$

11	$x - \cos x - 1 = 0$	41	$2 - x\ \lg(x) = 0$
12	$x + \lg x = 0,5$	42	$(x - 1)^2 = e^x / 2$
13	$1,8x^2 - \sin 10x = 0$	43	$(2 - x)e^x = 0,5$
14	$ctg\ 1,05x - x^2 = 0$	44	$2,2x - 2^x = 0$
15	$x \lg x - 1,2 = 0$	45	$5x - 8\log(x) = 8$
16	$2x - x\ \lg x - 7 = 0$	46	$x - e^x = 0$
17	$x + \cos x = 1$	47	$x = (x + 1)^3$
18	$x = x = \sqrt{\lg(x+2)}$	48	$x^2 \cos 2x = -1$
19	$\sin 0,5x + 2 = (x/2)^2$	49	$(2 - x)\ 2^x = 1$
20	$2 = 0,5x + \log(x - 1)$	50	$(x - 2)^2 - 1 = 2^x$
21	$\sin(0,5 + x) = 2x - 0,5$	51	$e^x + x + 1 = 0$
22	$\lg(2 + x) + x^2 = 3$	52	$0,5^x - 3 = (x + 2)^2$
23	$\lg(1 + 2x) = 2 - x$	53	$(x - 2)^2 \lg(x + 5) = 1$
24	$\ln(x/6) + \sqrt{x} = 0$	54	$(x - 4)^2 \log(x - 3) = 1$
25	$(x+2) \log_2(x) = 1$	55	$2x^2 - 2^x = 20$
26	$e^{-x} = 2 - x^2$	56	$x \log_3(x + 1) = 1$
27	$2e^x = x^2 - 2$	57	$0,5^x - 3 + (x + 1)^2 = 0$
28	$2x^2 - e^{x/2} = 0$	58	$2\ arcctg\ x - x + 3 = 0$
29	$2\ arctg\ x - 3x + 2 = 0$	59	$5^x - 6x - 3 = 0$
30	$\sin(x - 0,5) - x + 0,8 = 0$	60	$2\cos(x) + x^2 = 3x - 2$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Исследование интерполяции функций.

Цели занятия: Исследовать метод Лагранжа для интерполяции функций. Закрепить навыки интерполяции функций этим методом.

2. Рекомендации:

Изучить материалы лекций № 4 и краткую теорию.

Краткая теория

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Исследовать функции указанным методом и построить их графики.

3.3. Использовать MS Excel или любую среду программирования для выполнения расчетов.

3.4. Оформить отчет, включив в него задание, ход его выполнения и результат решения.

4. Варианты заданий:

		Номера вариантов				
i	x	1	2	3	4	5
1	0,01	-1,00005	0	0	1	-7,00005
2	0,51	0,580315	0,420735	0,36923	1,155297	-0,29697
3	1,01	0,536182	0,454649	0,245648	0,9992	0,549146
4	1,51	0,239736	0,07056	0,004991	0,997849	0,776667
5	2,01	-0,12202	-0,3784	0,15747	0,83723	0,787565
6	2,51	-0,40741	-0,47946	0,384118	0,084273	0,791607
7	3,01	-0,51279	-0,13971	0,13831	-0,82916	0,922912
8	3,51	-0,38759	0,328493	-0,30762	-1,17201	1,248326
9	4,01	-0,0429	0,494679	-0,32334	-1,03607	1,766534
10	4,51	0,453166	0,206059	-0,04344	-0,9869	2,415696

		Номера вариантов				
i	x	6	7	8	9	10
1	0,01	0	0	0	99,99667	0
2	0,51	0,201711	0,790439	0,339005	1,787762	0,201711
3	1,01	0,382574	2,287355	0,841471	0,628059	0,382574
4	1,51	0,070383	4,470462	1,221677	0,060871	0,070383
5	2,01	-0,34408	6,71885	1,285941	-0,46981	-0,34408
6	2,51	-0,28694	7,290883	0,946268	-1,36695	-0,28694
7	3,01	-0,01972	2,834471	0,244427	-7,55529	-0,01972
8	3,51	-0,11523	-11,6163	-0,65626	2,590459	-0,11523
9	4,01	-0,37437	-41,32	-1,5136	0,84638	-0,37437
10	4,51	-0,20143	-87,9945	-2,07365	0,205198	-0,20143

		Номера вариантов				
i	x	11	12	13	14	15
1	0,01	0	0	0	-99,9583	0
2	0,51	0,790439	0,339005	0,764426	-8,63946	0,618214
3	1,01	2,287355	0,841471	2,134934	-3,93389	1,046334
4	1,51	4,470462	1,221677	4,404576	-2,08072	1,358009
5	2,01	6,71885	1,285941	8,180784	-1,05576	1,596716
6	2,51	7,290883	0,946268	14,5007	-0,42882	1,788744
7	3,01	2,834471	0,244427	25,08775	-0,04916	1,950213
8	3,51	-11,6163	-0,65626	42,80161	0,157567	2,091123
9	4,01	-41,32	-1,5136	72,38719	0,240367	2,217752
10	4,51	-87,9945	-2,07365	121,7146	0,238339	2,334099

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Исследование метода наименьших квадратов для аппроксимации функций

1. **Цели занятия:** Практически исследовать аппроксимацию функций указанным методом. Закрепить навыки использования метода.

2. Рекомендации:

Изучить материалы лекций по указанной теме и приведенную краткую теоретическую справку.

Краткая теория

Метод наименьших квадратов

Область применения – интерполяция экспериментальных данных, полученных со значительными погрешностями.

$$\phi(x) = C_0\phi_0(x)+C_1\phi_1(x)+\ldots+C_m\phi_m(x)$$

$\phi_0(x), \phi_1(x),\ldots, \phi_m(x)$ - базисные функции

$\overline{C}^T = (C_0, C_1, \ldots, C_m)$ - вектор коэффициентов

Условие минимизации ошибки интерполяции:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [\phi(x_i) - f(x_i)]^2 \to \min$$

Количество базисных функций выбирается из условия, что погрешность интерполяции S меньше погрешности получения экспериментальных данных:

$$\sqrt{S} \approx E$$

Условия минимума ошибок интерполяции приводят к системе линейных уравнений относительно коэффициентов C_i с матрицей Грама. Для степенного базиса имеем систему уравнений:

$$G\overline{C} = \overline{B}$$

$$G=\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2} & \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix}$$ -матрица Грама

$$\bar{B}=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i \end{pmatrix}$$ -столбец свободных членов

Возникающая при интерполяции ошибка (невязка) является наименьшим квадратичным отклонением:

$$\rho=\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[\varphi_m(x_i)-f(x_i)]^2}$$

$(n+1)\geq m$ - количество узлов интерполирования; m

– степень аппроксимирующего полинома;

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Исследовать функции указанным методом и построить их графики.

3.3. Использовать MS Excel или любую среду программирования для выполнения расчетов.

3.4. Оформить отчет, включив в него задание, ход его выполнения и результат решения.

4. Варианты заданий:

№вар	X	Y	№вар	X	Y
1	2,3,4,6,7	8,3,1,2,5	31	5,6,7,8	8,3,1,2 5
2	1,3,5,8,9	6,3,1,2,4	32	3,4,7,9,10	6,3,1,2,4
3	3,4,6,8,9	4,2,1,1,2	33	4,6,8,9,10	4,2,1,1,2
4	1,4,6,8,9	0,6,7,5,3	34	3,5,7,9,11	0,6,7,5,3
5	0,2,3,5,7	6,8,8,7,4	35	2,4,5,7,8	6,8,8,7,4
6	0,2,4,6,8	4,2,1,2,5	36	2,3,5,7,9	4,2,1,2,5
7	3,4,5,8,9	5,3,2,2,4	37	4,5,7,9,11	5,3,2,2,4
8	0,1,3,5,6	0,4,8,4,1	38	1,3,4,6,7	0,4,8,4,1
9	3,4,5,6,7	3,1,0,2,5	39	5,6,7,8,9	3,1,0,2,5
10	2,3,5,8,9	3,5,6,5,3	40	3,4,6,9,11	3,5,6,5,3
11	2,3,4,6,7	6,3,1,3,7	41	3,4,6,7,8	6,3,1,3,7
12	1,2,4,6,7	5,3,0,2,4	42	2,3,5,8,9	5,3,0,2,4
13	0,2,4,7,9	5,3,1,3,5	43	1,3,6,8,11	5,3,1,3,5
14	1,2,4,5,6	6,4,2,3,5	44	2,4,5,7,9	6,4,2,3,5
15	0,1,3,4,5	9,5,2,3,6	45	2,3,5,7,10	9,5,2,3,6
16	1,2,3,5,6	6,4,2,3,7	46	3,4,5,6,8	6,4,2,3,7
17	3,4,6,8,9	3,5,6,5,4	47	5,6,7,10,11	3,5,6,5,4
18	3,4,6,7,9	9,4,1,2,9	48	2,4,5,8,11	9,4,1,2,9
19	0,2,5,8,9	0,4,7,6,4	49	1,3,6,10,11	0,4,7,6,4
20	2,3,5,7,9	5,4,3,4,7	50	3,4,7,9,10	5,4,3,4,7
21	2,3,4,5,6	4,7,8,7,3	51	4,5,6,7,8	4,7,8,7,3
22	1,3,5,8,9	4,1,0,2,4	52	2,5,6,9,10	4,1,0,2,4
23	2,3,4,5,6	7,5,4,5,8	53	3,5,7,8,11	7,5,4,5,8
24	0,2,4,6,9	8,7,2,1,4	54	2,3,5,8,10	8,7,2,1,4
25	0,1,2,3,4	3,1,1,3,8	55	1,3,3,4,7	3,1,1,3,8
26	3,5,6,9,9	0,4,5,1,0	56	4,6,8,10,11	0,4,5,1,0
27	2,3,4,6,7	0,3,4,2,1	57	4,5,6,7,8	0,3,4,2,1
28	4,5,6,7,9	8,4,1,0,4	58	6,7,8,8,10	8,4,1,0,4
29	0,2,4,6,8	6,3,2,3,7	59	1,4,5,8,10	6,3,2,3,7
30	0,2,4,7,9	2,5,7,5,1	60	2,4,6,9,11	2,5,7,5,1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 Численное интегрирование функций методом Ньютона-Котеса

1. Цель занятия:

Исследовать методы численного интегрирования функций. Закрепить навыки применения указанных методов.

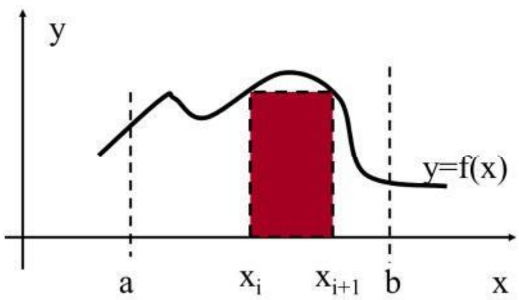
2. Рекомендации:

Изучить материалы лекций по указанной теме и краткую теорию.

Краткая теория

1. Метод прямоугольников

Интерполяционный многочлен 1-го порядка, т.е. линейная интерполяция.



$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(\alpha + kh)$$

1. Если узел α=a- левому краю отрезка интегрирования, то (1) – формула «левых» прямоугольников;
2. Если узел α=$\mathbf{x_{i+1}}$ –правому краю отрезка, то (1) – формула «правых» прямоугольников;
3. Если узел α=$\mathbf{(x_{i+1}+x_i)/2}$ – середине отрезка то (1) – формула «средних» прямоугольников; Погрешности:

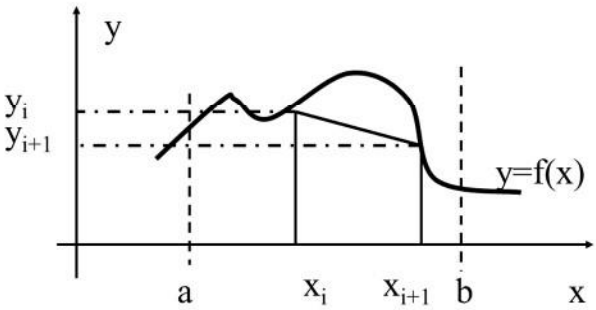
$$R_n(f,a) = \frac{(b-a)^2}{2n}\max\{f'(x)\};$$

$$R_n(f,a+h) = -\frac{(b-a)^2}{2n}\max\{f'(x)\};$$

$$R_n(f,a+h/2) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max\{f''(x)\};$$

2. Метод трапеций

Интерполяционный многочлен 1-го порядка, т.е. линейная интерполяция.



$$\int_a^b f(x)dx = h/2[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n]$$

Погрешность:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max\{f''(x)\}$$

Метод Симпсона. Описание метода.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]$$

где шаг определяется: $h = \frac{b-a}{2n}$

При этом, необходимым условием является то, что количество интервалов разбиения отрезка интегрирования должно быть **четным**.

3. Порядок выполнения задания

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Исследовать интегрирование функций указанными методами.

3.3. Использовать MS Excel или любую среду программирования для выполнения расчетов.

3.4. Оформить отчет, включив в него задание, ход его выполнения и результат решения.

4. Варианты заданий:

На интервале 0<x< 5 найти интегралы функций

№ варианта	Интегрируемая функция
1	f(x)=1/(1+x)^1/2*5/exp(x)
2	f(x)=x**0,5*sin(x)
3	f(x)=x**0,33*sin(x)
4	f(x)=cos(x)**3+sin(x)
5	f(x)=1/(1+x)^1/2-1/exp(x)
6	f(x)=exp(x)*sin(x)
7	f(x)=cos(x)**2*sin(x)
8	f(x)=-1/(x)^2*sin(x)*5
9	f(x)=cos(x)*sin(x)**6
10	f(x)=cos(x)*sin(x)**2
11	f(x)=cos(x)*sin(x)
12	f(x)=arctg(x)*exp(x)
13	f(x)=cos(x)/sin(x)
14	f(x)=cos(x)+lg(x**4)
15	f(x)=cos(x)+lg(x)
16	f(x)=cos(x)**3+sin(x)
17	f(x)=x**0,5*sin(x)
18	f(x)=cos(x)*sin(x)**2
19	f(x)=1/(1+x)^1/2*5/exp(x)
20	f(x)=cos(x)*sin(x)**6

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6 Исследование методов решения дифференциальных уравнений

1. Цель занятия:

Исследовать решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Закрепить навыки применения метода.

2. Рекомендации:

Изучить материалы лекций по указанной теме и краткую теорию.

Краткая теория

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Задача
Коши:

$$y' = f(x, y)$$

Решение должно удовлетворять начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \qquad \text{при } x = x_0$$

Где для i = 0,1,..... : k_0

$$= hf(x_i, y_i),$$

$$k_1 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}),$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),$$

$k_3 =$

$$hf(x_i + h, y_i + k_2).$$

3. Порядок выполнения задания

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Исследовать дифференцирование функций указанным методом.

3.3. Использовать MS Excel или любую среду программирования для выполнения расчетов.

3.4. Оформить отчет, включив в него задание, ход его выполнения и результат решения.

4. Варианты заданий:

Для начальных значений x_0 и y_0 на отрезке $[x_0;b]$ решить дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

где вид функции выбрать из таблицы заданий.

N	$f(x)$	X_0	Y_0	b	N	$f(x)$	X_0	Y_0	
1	$Y^2 \sin x$	0	1	1	31	$3 (\sin x)\, y$	0	1	1
2	$\cos(x)\; y$	0	1	1	32	$(\cos x) / y$	0	1	1
3	$2x\sqrt{y}$	0	1	1	33	$x\sqrt{y+1}$	0	1	1
4	$(x-1)^2 y^2$	0	1	1	34	$(x-1)^2 y^2/2$	0	1	1
5	$y^2 \cos(x)$	0	-1	1	35	$.5\, y^2 \cos(x)$	1	1	2
6	$0.5\, y^2$	1	1	2	36	$y^2/4$	1	1	2
7	$y^2 x$	0	-2	1	37	$2\, y^2 x^3$	0	-2	1
8	$\sqrt{xy}$	3	3	4	38	$1.7\sqrt{xy}$	3	3	4
9	$y^2 e^x$	1	-1	1	39	$y^2 e^{x/2}$	0	-1	1
10	e^{-y}	1	0	2	40	ye^{-y+x}	1	0	2
11	$y\,(x-1)$	0	1	1	41	$y\,(x-1)/2$	0	1	1
12	$3\, y^2 x^2$	0	-4	1	42	$3\,(x+1)\, y^2$	0	-1	1
13	$(x+1)\, e^y$	0	1	1	43	$2\, e^y x$	0	-1	1
14	$y \cos(x$	0	1	1	44	$0.5\, y \cos(x)$	0	1	1
15	$2y\sqrt{x}$	0	1	1	45	$y\sqrt{x}/5$	0	1	1
16	$\sqrt{1-y^2}$	0	0	1	46	$\sqrt{4-y^2}\; x$	0	1	1
17	$x^2\sqrt{y}$	0	1	1	47	$2\, y^2/x$	0	1	1
18	y^2/x	1	1	2	48	$(4-x^2) \cos(y)$	0	1	1
19	y/x^2	1	1	2	49	$(2+y) \sin(x)$	0	1	1
20	$(1-x^2)/\cos(y)$	1	1	2	50	$y\, tg(x)$	0	1	1
21	$(1+y) \sin(x)$	0	2	1	51	$y\, e^x$	0	1	1
22	$y\, e^{-2x}$	0	1	1	52	$2\sqrt{x}\, y$	0	1	1
23	$x \cos^2(y)$	0	1	1	53	$x \sin^2(y)$	1	1	2
24	$\cos(y)/(1+x)$	0	0	1	54	$3\, x^2 y$	0	1	1
25	$0.5\,(x+2)\, y^2$	0	1	1	55	$y'=0.5\, e^{x-y}$	1	1	2
26	$x \cos(x)$	1	2	2	56	$\sqrt{e^x}\; y$	1	1	2
27	$x^2 \sin(y)$	1	$\pi/2$	2	57	$y'=\sin(x)\, e^{-y}$	1	1	2
28	$y^2 e^{-x}$	0	1	1	58	$(x/\sqrt{2})\, y^2$	0	1	1
29	$y^2\sqrt{x}$	0	1	1	59	$x^2 y^3/4$	0	1	1
30	$e^{-y/x}$	0	1	1	60	$\sqrt{x(y-1)}$	1	2	2