ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Методические указания **по выполнению курсовой работы**
Тема: Аппроксимация функций различными методами

по дисциплине

Вычислительная математика

направление подготовки **09.03.01. «Информатика и вычислительная техника»**

Ростов-на-Дону
2019

Методические указания по выполнению курсовой работы по дисциплине
Вычислительная математика

Составитель: П.В. Лобзенко, доцент кафедры **Информатика и вычислительная техника**
Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры Информатика и вычислительная техника Протокол от «26» августа № 1

Выбор варианта

Номера вариантов задач работы определяются двумя последними цифрами номера студенческого билета. Если цифры из студенческого билета превышают номера вариантов, то вариант выбирается по последней цифре студенческого билета.

Требования к оформлению курсовой работы

Работа представляется на проверку в виде пояснительной записки объемом не менее 15 печатных листов формата А4 через 1,5 интервала. Текст пояснительной записки печатается шрифтом Times New Roman размером 14. Правила оформления соответствуют принятым в филиале. Листы пояснительной записки должны иметь рамку.

Введение

Многим из тех, кто сталкивается с научными и инженерными расчётами, часто приходится оперировать наборами значений, полученных экспериментальным путём или методом случайной выборки. Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Такая задача называется аппроксимацией кривой. Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Существует также близкая к интерполяции задача, которая заключается в аппроксимации какой-либо сложной функции другой, более простой функцией. Если некоторая функция слишком сложна для производительных вычислений, можно попытаться вычислить её значение в нескольких точках, а по ним построить, то есть интерполировать, более простую функцию. Разумеется, использование упрощенной функции не позволяет получить такие же точные результаты, какие давала бы первоначальная функция. Но в некоторых классах задач достигнутый выигрыш в простоте и скорости вычислений может перевесить получаемую погрешность в результатах.

Необходимость интерполяции функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция f(x) имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, f(x) является спецфункцией: гаммафункцией, эллиптической функцией и др.).
2. Аналитическое описание функции f(x) неизвестно, т. е. f(x) задана таблично. При этом

необходимо иметь аналитическое описание, приближенно представляющее f(x) (например, для вычисления значений f(x) в произвольных точках, определения интегралов и производных от f(x))

Постановка задачи интерполяции

Простейшая задача *интерполяции* заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы n + 1 точки $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, которые называются *узлами интерполяции,* и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n \qquad (1)$$

Требуется построить функцию F (x) (*интерполяционная функция*), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т. е. такую, что

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1, \ldots, F(x_n) = y_n \qquad (2)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую y = F (x) некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек M(x_i, y_i) (i = 0, 1, ..., n) (Рисунок 1).

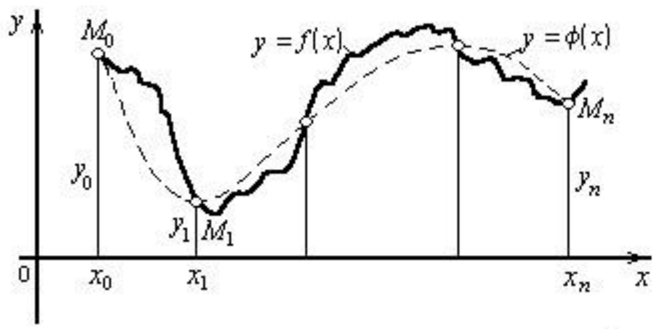


Рис. 1

В такой общей постановке задача может иметь бесконечное множество решений или совсем не иметь решений. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции F(x) искать полином L(x) (*интерполяционный полином*) степени не выше n, удовлетворяющий условиям (2), т. е. такой, что

$$L(x_0) = y_0,\ L(x_1) = y_1, ..., L(x_n) = y_n \qquad (3)$$

Полученную интерполяционную формулу:

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (4)$$

обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции f(x) для значений аргумента *x*, отличных от узлов интерполяции. Такая операция называется *интерполяцией функции*.

Заметим, также, что сам термин *интерполяция* предполагает вычисление неизвестных значений функции на каком – то отрезке. Если же мы хотим узнать, как поведет себя эта функции дальше (за пределами отрезка), то мы должны применить совсем другие методы, объединенные термином *экстраполяция.* В данной работе эти методы не рассматриваются.

Все тестовые вычисления выполнены по функции (*)

$$f(x) = arctgx * \sin x + \sqrt[3]{x}$$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	0	1,015985	1,66089	2,125046	2,266649	2,069564	1,618515	1,064908	0,584019	0,329218

I. Задание (методы Лагранжа и Ньютона):

1. Изучить теоретический материал, необходимую литературу, изучить пример.
2. Дать обзорную характеристику метода, привести формулы и т.п.
3. Выбрать вариант задания из Приложения 1 согласно двум последним цифрам зачетной книжки.
4. Вычислить полиномы всех порядков для заданных точек, оценить точность (метод Ньютона – «вперед» и «назад»).
5. Построить график зависимости погрешности от количества узлов.
6. Провести анализ полученных результатов, определить порядок наиболее точной функции и построить графики этой функции в зависимости от шага.
7. Описать алгоритм решения задачи интерполяции на ЭВМ – написать программу реализации методов, построить блок – схемы (см. Приложение 2).
8. Сделать выводы о целесообразности применения методов к данной функции.

II. Задание (метод наименьших квадратов):

1. Изучить теоретический материал, необходимую литературу, изучить пример.
2. Дать обзорную характеристику метода, привести формулы и т.п.
3. Выбрать вариант задания из Приложения 1 согласно двум последним цифрам зачетной книжки.
4. Провести линейную, квадратичную и кубическую интерполяцию, оценить точность.
5. Построить графики полученных функций, сравнить.
6. Выбрать наиболее подходящую для интерполяции функцию и построить графики этой функции с разным шагом.
7. Описать алгоритм решения задачи интерполяции на ЭВМ – написать программу реализации метода, построить блок – схемы (см. Приложение 2).
8. Сделать выводы о целесообразности применения метода к данной функции.

III. Сравнительная характеристика методов

1. Сравнить точность методов с увеличением порядка (теоретически или графически).
2. Построить сравнительный график всех трех методов, сделать выводы о применимости методов к данной функции и выбрать наиболее подходящий метод.

1. Полином Лагранжа **Теория**.

Интерполяционная формула Лагранжа обеспечивает построение многочлена для произвольно заданных узлов (в отличие от интерполяционной формулы Ньютона).

Пусть на отрезке *[a,b]* даны n+1 различных значений аргумента: $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ и известны для функции $y = f(x)$ соответствующие значения:

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n \quad (1.1)$$

Требуется построить полином $L_n(x)$ степени не выше n, имеющий в заданных узлах те же значения, что и функция f(x), т.е. такой, что

$$L_n(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,2,...,n \qquad j = 0,1,2,...,k;\ k <= n$$

Этот полином имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1.2)$$

где x – точка интерполяции, т.е. точка, в которой вычисляется искомое значение функции, f(x) – значение функции в i – узле. Обратим внимание на то, что $j \neq i$. Если не соблюсти это условие, то появится деление на ноль.

Таким образом, чтобы записать полином очередного порядка n, нужно взять n+1 узлов и последовательно выписать все слагаемые, умножив на соответствующее значение функции. При этом, точка интерполяции должна лежать между известными узлами. Т.е. следует выбирать ближайшие к этой точке узлы.

Приведем полиномы 1 – 3 порядков:

а) полином 1-го порядка (2 узла): $L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} * y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} * y_1; i = 0,1; j = 0,1$

б) полином 2-го порядка (3 узла):

$$L(x)=\frac{(x-x_1)*(x-x_2)}{(x_0-x_1)*(x_0-x_2)}*y_0+\frac{(x-x_0)*(x-x_2)}{(x_1-x_0)*(x_1-x_2)}*y_1+\frac{(x-x_0)*(x-x_1)}{(x_2-x_0)*(x_2-x_1)}*y_2;\quad i=0,1,2;\ j=0,1,2$$

в)полином 3-го порядка (4 узла):

$$L(x)=\frac{(x-x_1)*(x-x_2)*(x-x_3)}{(x_0-x_1)*(x_0-x_2)*(x_0-x_3)}*y_0+\frac{(x-x_0)*(x-x_2)*(x-x_3)}{(x_1-x_0)*(x_1-x_2)*(x_1-x_3)}*y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)*(x-x_1)*(x-x_3)}{(x_2-x_0)*(x_2-x_1)*(x_2-x_3)}*y_2+\frac{(x-x_0)*(x-x_1)*(x-x_2)}{(x_3-x_0)*(x_3-x_1)*(x_3-x_2)}*y_3;\quad i=0,1,2,3;\ j=0,1,$$

и т.д.

Для оценки точности погрешности применим соотношение 1.3:

$|f(x)-L_n(x)|\le|L_{n+1}(x)-L_n(x)|$ или $|L_{n+1}(x)-L_n(x)|\le E$, *где E задается условием*, т.е. разность полиномов следующего и предыдущего порядков не должна превышать определенного значения.

Пример.

Возьмем промежуточную точку $x=$ 4.25, построим полиномы 1 – 3 порядков и оценим погрешность:

а) линейная интерполяция (узлы 4, 4.5)

$$L_1(x)=\frac{4.25-4.5}{4-4.5}*0.584019+\frac{4.25-4}{4.5-4}*0.329218=0.4566185$$

б) квадратичная интерполяция (узлы 3.5, 4, 4.5)

$$L_2(x)=\frac{(4.25-4)*(4.25-4.5)}{(3.5-4)*(3.5-4.5)}*1.064908+\frac{(4.25-3.5)*(4.25-4.5)}{(4-3.5)*(4-4.5)}*0.584019+$$

$$+\frac{(4.25-3.5)*(4.25-4)}{(4.5-3.5)*(4.5-4)}*0.329218 = 0.4283575$$

Погрешность:

$$S_1 = \left|0.4283575 - 0.4566185\right| = 0.028261$$

в) кубическая интерполяция (узлы 3, 3.5, 4, 4.5)

$$L_2(x) = \frac{(4.25-3.5)*(4.25-4)*(4.25-4.5)}{(3-3.5)*(3-4)*(3-4.5)}*1.618515+\frac{(4.25-3)*(4.25-4)*(4.25-4.5)}{(3.5-3)*(3.5-4)*(3.5-4.5)}*1.064908+$$

$$+\frac{(4.25-3)*(4.25-3.5)*(4.25-4.5)}{(4-3)*(4-3.5)*(4-4.5)}*0.584019+\frac{(4.25-3)*(4.25-3.5)*(4.25-4)}{(4.5-3)*(4.5-3.5)*(4.5-4)}*0,329218 =$$

Порядок полинома	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Полином	0,456619	0,428358	0,418772	0,419628	0,420879	0,42094	0,420849	0,420784	0,41557
Погрешность		0,028261	0,009586	0,000856	0,001252	6,08E-05	9,13E-05	6,48E-05	0,00520

0.418

Погрешность:

$$S_2 = \left|0.4187719 - 0.4283575\right| = 0.00958556$$

Далее построим график зависимости погрешности от количества узлов для заданной точки.

Табл. 1.1.

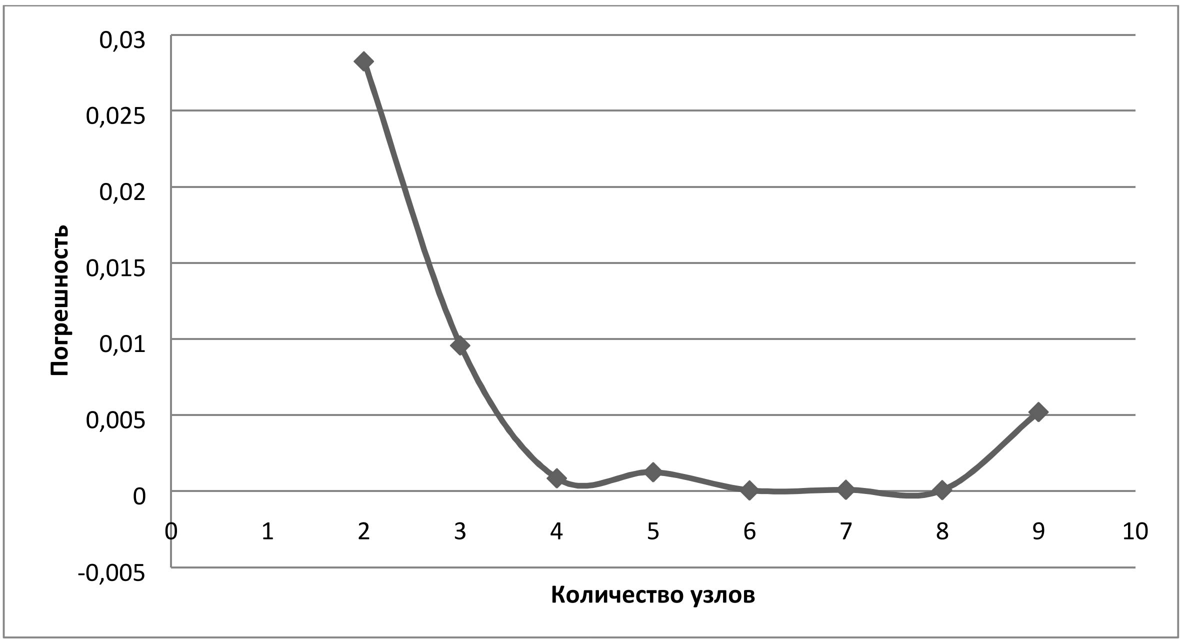


Рис.2

Как видим, уже при интерполяции полиномом 3 – го порядка достигается достаточно высокая точность (погрешность < 0.005), что позволяет не использовать полиномы высоких порядков для интерполяции на всем заданном отрезке [0;4.5]. Т.е. мы должны для каждой точки заданного интервала вычислить полином определенного порядка, взяв определенные узлы. Взяв узлы, находящиеся далеко от точки интерполяции, мы можем получить некорректный результат. График погрешности говорит нам о том, что графики, построенные на 4 – 8 узлах будут примерно одинаковы.

Использование максимально возможного количества узлов позволит выполнить основное условие интерполяции и изучить поведение функции с изменением шага. Построим соответствующие графики.

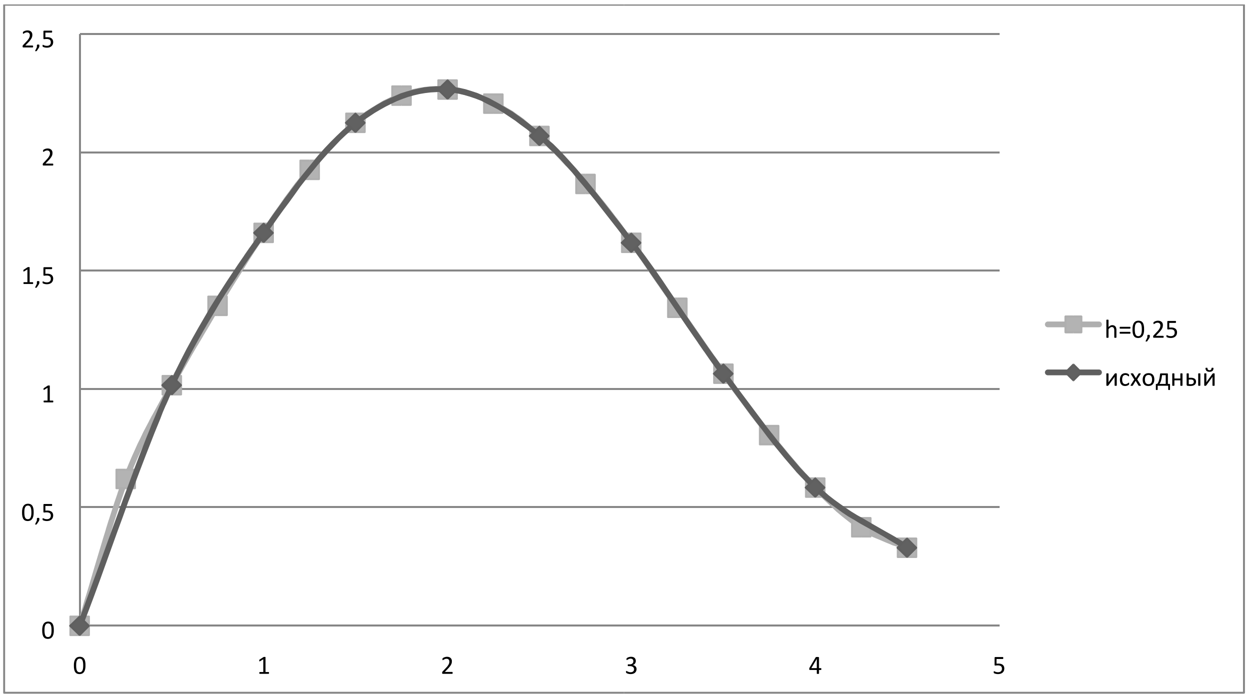


Рис.3

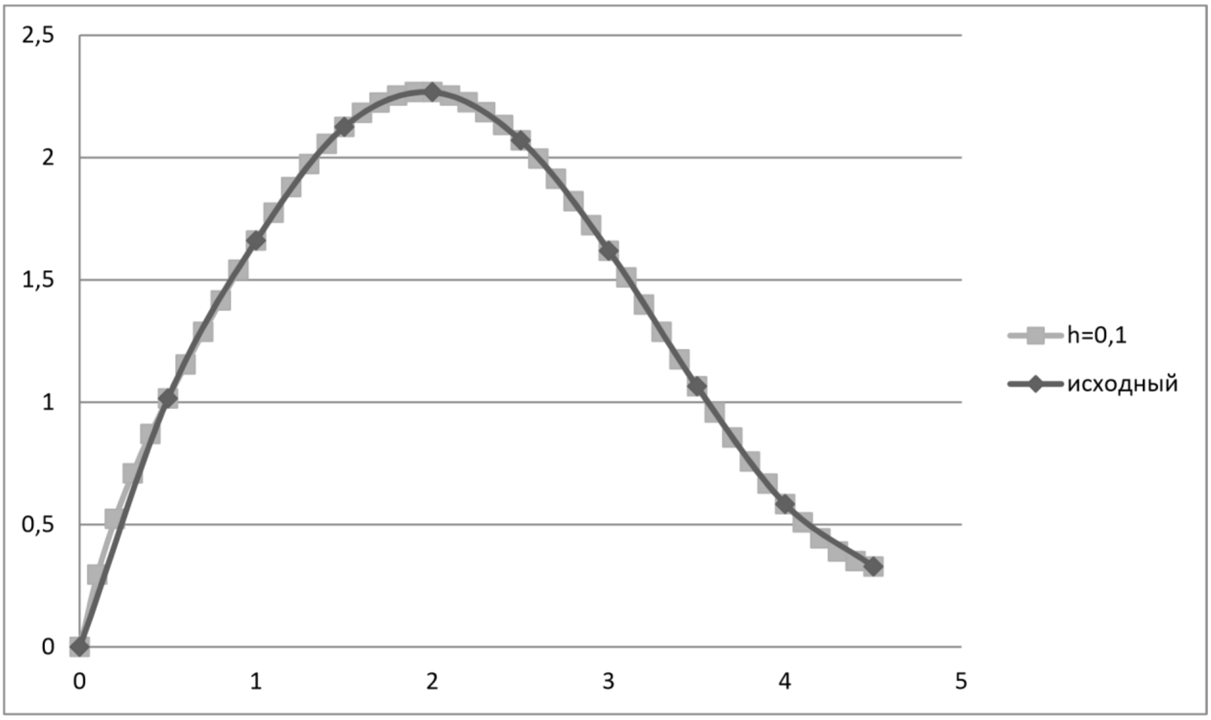


Рис.4

Видим практически идентичные графики, что позволяет сделать вывод о том, что используя полином Лагранжа, мы можем вычислить значение данной функции (не зная ее аналитического описания, т.е. формулы) в любой точке заданного интервала.

2. Полином Ньютона **Теория.**

Если узлы интерполяции – равноотстоящие и упорядочены по величине, так что $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, то есть $x_i = x_0 + ih$, то интерполяционный многочлен можно записать в форме Ньютона.

$$L(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} * \Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)(q-(n-1))}{n!} * \Delta^n y_0, \quad \text{где } q = \frac{x - x_0}{h}, \tag{2.1}$$

где x_0 – ближайший к X узел **слева**, y_0-значение функции в точке x_0, h – шаг, $\Delta^n y_0$ - конечная разность порядка n.

Конечной разностью 1-го порядка называют разность между двумя соседними значения ми *f* в узлах интерполяции, т.е.

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),\ k = \overline{0, n-1}.$$

(2.2)

Конечной разностью 2-го порядка называют разность между двумя соседними конечными разностями 1-го порядка, т.е.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k),\ k = \overline{0, n-2}.$$
(2.3)

Конечной разностью порядка m (для $m \le n$) называют разность между двумя соседними конечными разностями порядка $m - 1$, т.е.

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k,\ k = \overline{0, n-m}.$$
(2.4)

Таким образом, чтобы записать полином Ньютона самого высокого из возможных порядков, нужно вычислить n конечных разностей. Чтобы вычислить конечную разность порядка n, нужно вычислить все конечные предыдущие конечные разности. Покажем это на примере ниже.

Погрешность измеряется по формуле: $R_n(x) = \left| \frac{q(q-1)(q-2)(q-n)}{(n+1)!} * \Delta^{(n+1)} y_0 \right|$

(2.5)

Выше мы рассмотрели т.н. полином Ньютона «вперед». Существует также и полином Ньютона «назад». Выпишем его формулу:

$$L(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)(q+2)(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$ где $q = \frac{x - x_n}{h}$,

(2.6)

x_n – ближайший к X узел **справа**, y_n – значение функции в точке x_n, h – шаг.

Пример.

Пусть некоторая функция (*) задана таблично (стр.4).

Возьмем промежуточную точку $x = 0.7$, построим таблицу конечных разностей.

Обратим внимание:

- ближайший узел слева от точки 0.7 это узел 0.5, поэтому вычисления начинаются с этого узла;

- шаг изменения узловых точек h=0.5; $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.7 - 0.5}{0.5} = 0.4$

Табл. 2.1.

x	y	Δy	Δy_2	Δy_3	Δy_4	Δy_5	Δy_6	Δy_7	Δy_8
0,5	1,015985	0,644905	-0,18075	-0,1418	0,125669	-0,02481	-0,009367	0,000732	0,004939
1	1,66089	0,464156	-0,32255	-0,01613	0,100859	-0,034177	-0,008635	0,005671	
1,5	2,125046	0,141603	-0,33869	0,084724	0,066682	-0,042812	-0,002964		
2	2,266649	-0,19709	-0,25396	0,151406	0,02387	-0,045776			
2,5	2,069564	-0,45105	-0,10256	0,175276	-0,02191				
3	1,618515	-0,55361	0,072718	0,15337					
3,5	1,064908	-0,48089	0,226088						
4	0,584019	-0,2548							
4,5	0,329218								

$\Delta y_0 = y_2 - y_1 = 1.66089 - 1.015985 = 0.644905$ $\Delta y_1 = y_3 - y_2 = 2.125046 - 1.66089 = 0464156$ и т.д.

Теперь мы имеем все коэффициенты для построения полинома Ньютона:

$L_1 = 1.015985 + 0.4*0.644905 = 1.273947$ $R_1 = \left| \frac{\Delta y_0^2 * q*(q-1)}{2!} \right| = 0.2169$

$L_2 = 1.015985 + 0.4*0.644905 + \frac{0.4*(0.4-1)}{2!}*(-0.18075) = 1.295637$

$R_2 = \left| \frac{\Delta y_{03} * q*(q-1)*(q-2)}{3!} \right| = 0.009075$

Сравнивая полученные погрешности, можем сделать вывод, что квадратичная интерполяция позволяет вычислить значение функции с большей точностью, т.к. $R_2 << R_1$

Табл. 2.2.

Узлы	1	2	3	4	5	6	7	8
Полиномы	1,273947	1,295637	1,286561	1,281334	1,280590484	1,280805581	1,280819028	1,280744
Погрешности	0,02169	0,009075	0,005228	0,000743	0,000215096	1,34472E-05	7,48541E-05	

Построим график зависимости погрешности от количества узлов

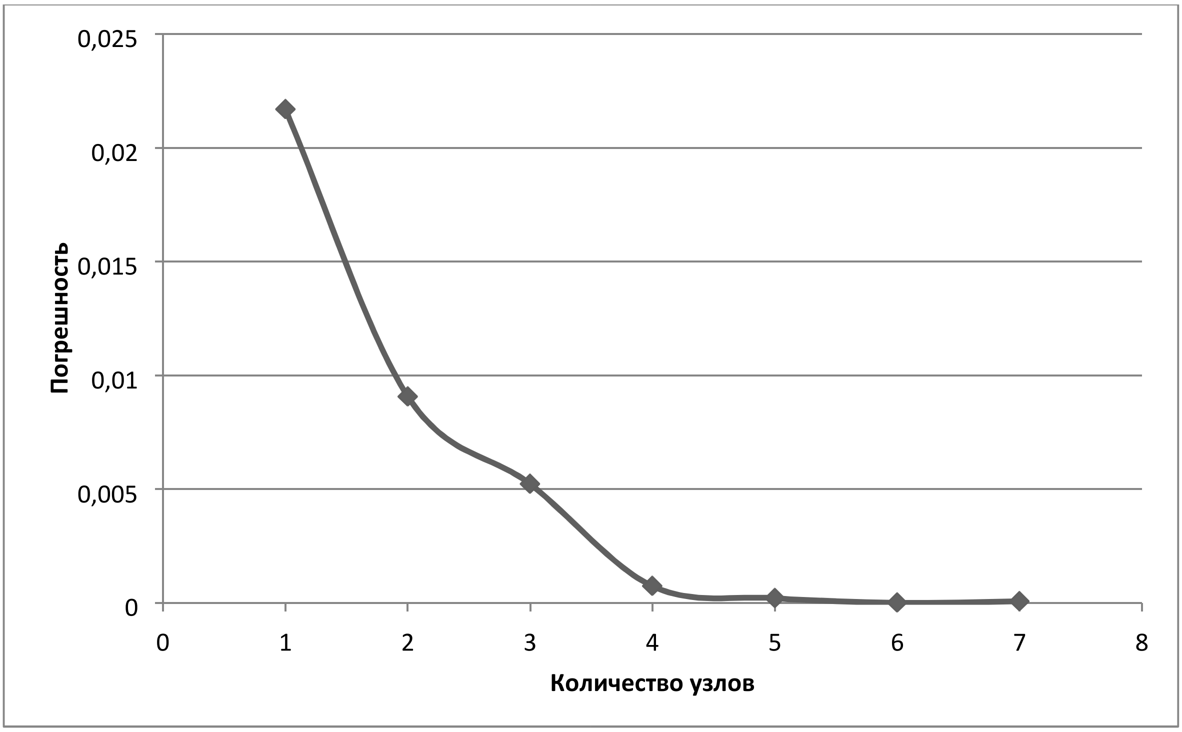


Рис.5

Анализируя этот график, можем сказать, что точность интерполяции увеличивается с повышением порядка полинома.

Далее рассмотрим интерполяцию с помощью полинома Ньютона «назад». Сначала вспомним формулу (2.6), которая гласит, что

$$L(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)(q+2)(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q = \frac{x-x_n}{h}$,

x_n – ближайший к X узел **справа**, h – шаг.

Построим таблицу конечных разностей «назад», возьмем промежуточную точку x = 4.25 и вычислим полиномы всех порядков и погрешность.

Для точки 4.25 ближайший узел справа – узел 4.5.

$$q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{4.25-4.5}{0.5} = 0.5$$

Табл. 2.3.

x	y	Δy_9	Δy_8	Δy_7	Δy_6	Δy_5	Δy_4	Δy_3	Δy_2	Δy
4,5	0,329218	-0,2548	0,22609	0,153372	-0,021903	-0,04577	-0,002951	0,005699	0,005	0,47757
4	0,584019	-0,48089	0,07272	0,175275	0,02387	-0,04282	-0,00865	0,000702	-0,472573	
3,5	1,064908	-0,55361	-0,102557	0,151408	0,06669	-0,03417	-0,009352	0,473275		
3	1,618515	-0,45105	-0,253965	0,084722	0,10085	-0,02482	-0,482627			
2,5	2,069564	-0,19708	-0,338687	-0,01613	0,12567	0,45781				
2	2,266649	0,141602	-0,322554	-0,14181	-0,332137					
1,5	2,125046	0,464156	-0,180748	0,190332						
1	1,66089	0,644905	-0,37108							
0,5	1,015985	1,015985								
0	0									
Полиномы		0,201818	0,286601	0,33453	0,328541	0,317277	0,316612	0,317805	0,318787	0,407362
Погрешности		0,08478	0,047929	0,00599	0,01126	0,00067	0,001194	0,000981	0,088575	

Построим график погрешности

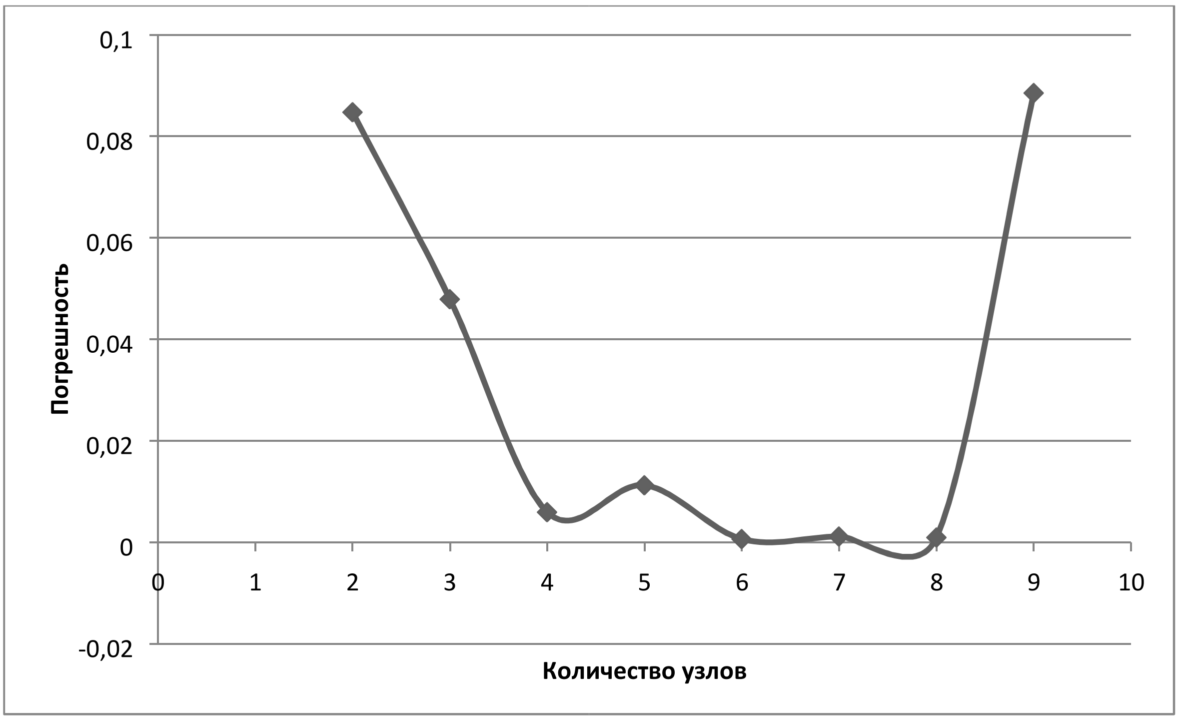


Рис.6

Как видим, точность вычисления с увеличением порядка возрастает, однако в конце происходит резкое увеличение погрешности. Делаем вывод, что в этой ситуации использовать полином самого высокого порядка будет ненадежно.

Построим график полинома Ньютона «вперед» и «назад» с шагом 0.25

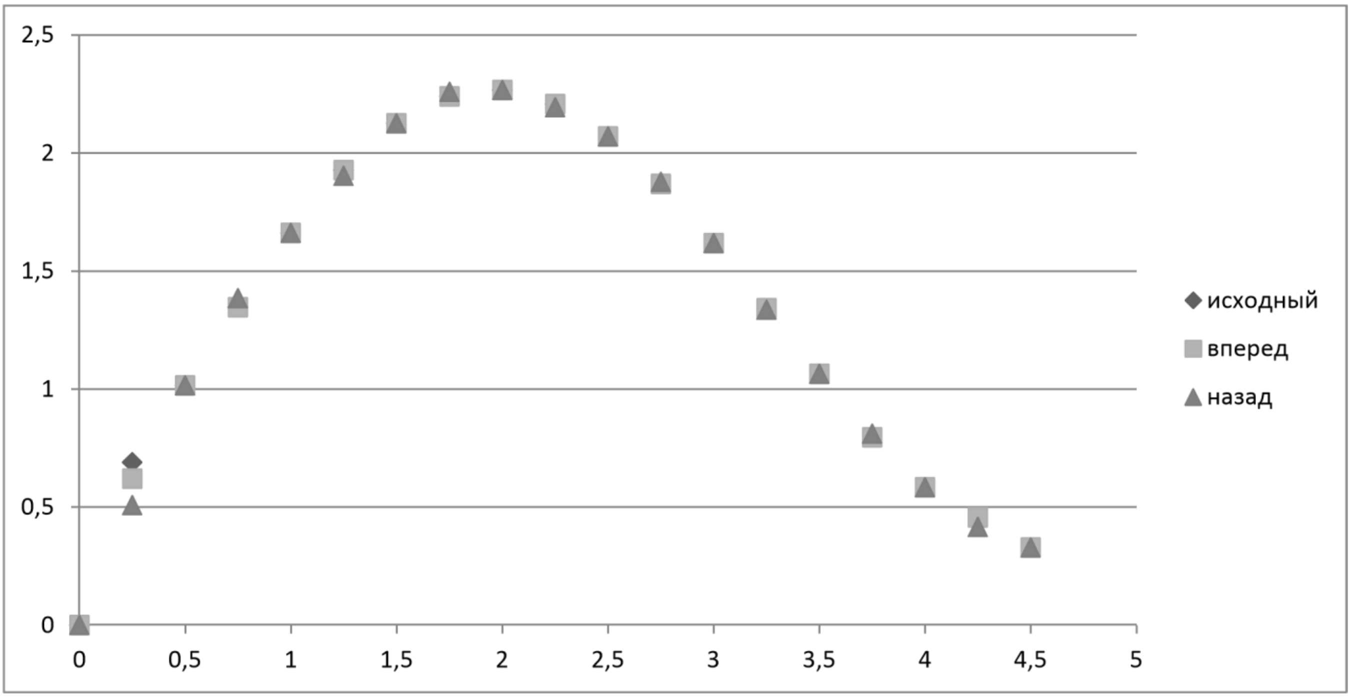


Рис.7

На этом графике отчетливо видно отклонение функции «назад» в начале интервала и функции «вперед» в конце. Чтобы интерполировать всю функцию равномерно, мы должны использовать в равной степени интерполяцию «вперед» и «назад». Т.е. до середины заданного отрезка интерполируем «вперед», после середины – «назад».

В полиноме Ньютона с увеличением порядка полинома уменьшается количество задействованных узлов. Поэтому, чтобы построить полином 10 – го порядка в середине отрезка, нам нужно знать еще 5 узловых точек. То же самое и с интерполяцией «назад». В учебных целях расширим отрезок в обе стороны на 5 узлов и построим таблицу конечных разностей.

На следующем графике построим полиномы Ньютона на 5,7,10 узлах с шагом 0.25 с использованием полиномов «вперед» и «назад».

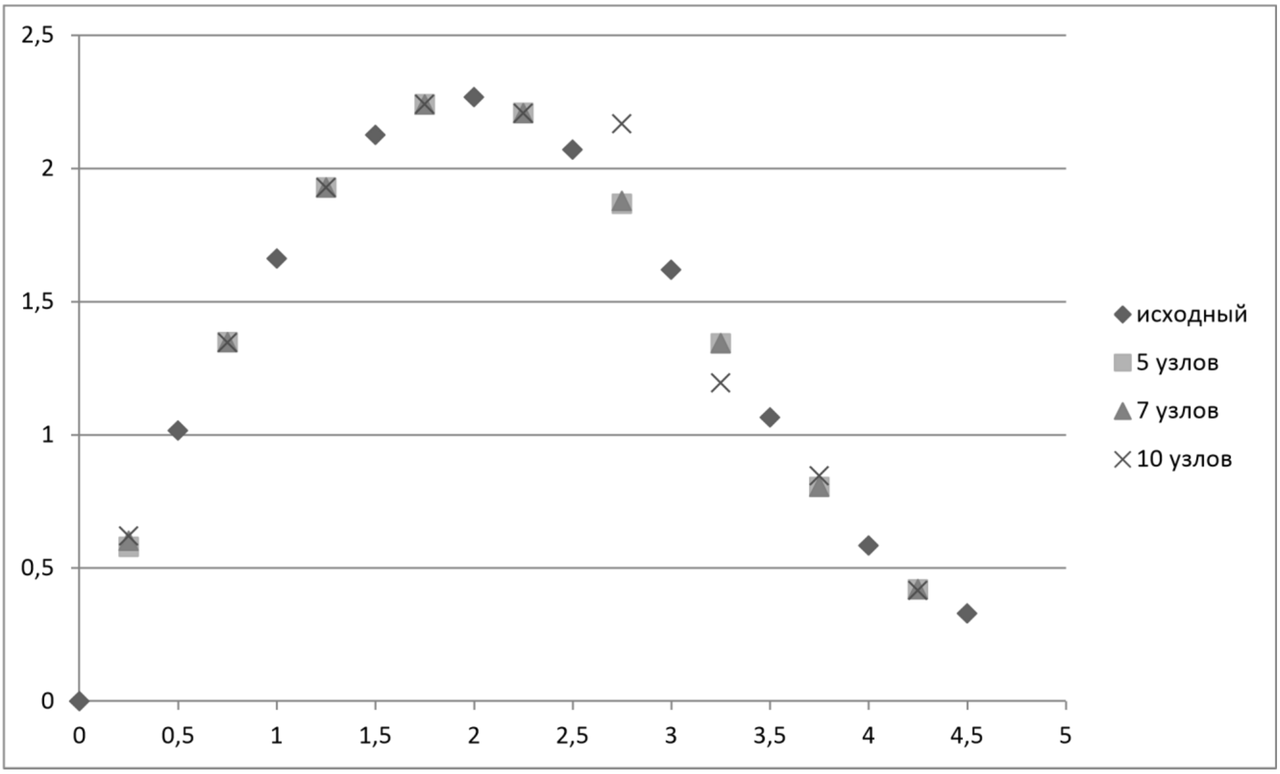


Рис.8

Этот график подтверждает изображенный выше график погрешности (рисунок 5). Использовать полином Ньютона 9 – го порядка в этой ситуации будет некорректно. За самую точную функцию примем полиномы 6,7 порядков.

3. Метод наименьших квадратов

Теория.

При интерполировании используются значения рассматриваемой функции в известных точках. Если набор экспериментальных данных получен со значительной погрешностью или число точек велико, то в таком случае аппроксимирующую функцию можно построить с помощью метода наименьших квадратов.

Наиболее распространен способ выбора функции $\varphi(x)$ в виде линейной комбинации:

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x), \qquad (3.1)$$

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ – базисные функции; m <= n; $c_0, c_1, \ldots, c_m$ – коэффициенты, определяемые при минимизации погрешности Q .Математически условия минимума суммы квадратов отклонений Q запишем, приравнивая нулю частные производные от Q по коэффициентам c_k, 0<=k<=n:

$$\frac{\partial Q}{\partial c_0} = \sum_{i=0}^{n}[c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + \ldots + c_m\varphi_m(x_i) - f_i]\varphi_0(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial c_1} = \sum_{i=0}^{n}[c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + \ldots + c_m\varphi_m(x_i) - f_i]\varphi_1(x_i) = 0$$

(3.2)

$$\frac{\partial Q}{\partial c_m} = \sum_{i=0}^{n}[c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + \ldots + c_m\varphi_m(x_i) - f_i]\varphi_m(x_i) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \end{vmatrix} \qquad (3.3)$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (3.2) определяются все коэффициенты c_k. Система (3.2) называется системой нормальных уравнений. Матрица этой системы имеет следующий вид:

$$(\varphi_0,\varphi_m) \quad (\varphi_1,\varphi_m) \quad \ldots \quad (\varphi_m,\varphi_m)$$

и называется матрицей Грама. Элементы этой матрицы являются скалярными произведениями базисных функций:

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\,\varphi_k(x_i). \qquad (3.4)$$

Расширенная матрица системы уравнений получится добавлением справа к матрице Грама столбца свободных членов:

$$\left|\quad\right| \quad \begin{matrix}(\varphi_0, f)\\(\varphi_1, f)\\ \dots \\ (\varphi_m, f)\end{matrix} \qquad (3.5)$$

где скалярные произведения, являющиеся элементами столбца, определяются аналогично: $(\varphi_k, f)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_k(x_i)\,f_i$.

Доказано, что если функции $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)$ являются линейно независимыми, то единственное решение соответствует наименьшему квадратичному отклонению.

Рассмотрим один из возможных базисов – степенной.

Степенной базис.

Выберем базисные функции $\varphi_k(x)$ в виде последовательности степеней аргумента x, которые линейно независимы,

$$\varphi_0(x)=x^0=1,\quad \varphi_1(x)=x^1=x,\dots,\varphi_m(x)=x^m. \qquad (3.6)$$

В этом случае мы будем аппроксимировать экспериментальную зависимость полиномом степени m<<n. Аппроксимирующая кривая в МНК не проходит через значения исходной функции в узлах, но проведена из условия наименьшего суммарного квадратичного отклонения. Экспериментальные данные «сглаживаются» с помощью функции φ(x). Если же выбрать m=n, то на основании единственности интерполяционного полинома получим функцию φ(x), совпадающую с каноническим интерполяционным полиномом степени n, аппроксимирующая кривая пройдет через все экспериментальные точки и величина Q будет равна нулю. Последнее обстоятельство используется для отладки и тестирования программ, реализующих алгоритмы МНК.

Запишем расширенную матрицу системы нормальных уравнений для базиса (3.6):

$$n \quad =0 \quad n \qquad n \quad =0 \quad n \qquad n \qquad n$$

$$G=\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^m & \sum_{i=0}^{n} f_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^{n} x_i f_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} & \sum_{i=0}^{n} x_i^m f_i \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Где n+1 – количество узловых точек.

Пример.

Построим вспомогательную таблицу для составления системы уравнений.

Табл. 3.1.

i	x	y	x_2	x^3	x^4	xy	x^2y
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,5	1,015985	0,25	0,125	0,0625	0,507993	0,253996
2	1	1,66089	1	1	1	1,66089	1,66089
3	1,5	2,125046	2,25	3,375	5,0625	3,187569	4,781354
4	2	2,266649	4	8	16	4,533297	9,066594
5	2,5	2,069564	6,25	15,625	39,0625	5,17391	12,93478
6	3	1,618515	9	27	81	4,855545	14,56663
7	3,5	1,064908	12,25	42,875	150,0625	3,727179	13,04513
8	4	0,584019	16	64	256	2,336076	9,344303
9	4,5	0,329218	20,25	91,125	410,0625	1,481483	6,666672
Σ	22,5	12,73479	71,25	253,125	958,3125	27,46394	72,32035

Проведем линейную и квадратичную аппроксимацию этой функции:

а) линейная аппроксимация

При линейной аппроксимации наша система уравнений будет выглядеть так

$$\begin{cases} C_0 * (n+1) + C_1 * \sum x_i = \sum y_i \\ C_0 * \sum x_i + C_1 * \sum x_i^2 = \sum (x_i * y_i) \end{cases}$$

Составим матрицу Грама и выпишем столбец свободных членов

$$G = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22.5 \\ 22.5 & 71.25 \end{pmatrix}; \Delta = 206.25 \qquad B = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} f_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i f_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.73 \\ 27.46 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти коэффициенты c_0 и c_1, нужно найти частные определители Δ_0, Δ_1.

$$G_0 = \begin{pmatrix} 12.73 & 22.5 \\ 27.46 & 71.25 \end{pmatrix}; \Delta^0 = 289.163 \qquad G^1 = \begin{pmatrix} 10 & 12.73 \\ 22.5 & 27.46 \end{pmatrix}; \Delta^1 = -11.825$$

$$c_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{289.163}{206.25} = 1.40323 \qquad c_1 = \frac{\Delta^1}{\Delta} = \frac{-11.825}{206.65} = -0.0576625$$

Таким образом, мы можем записать полином 1 – го порядка (линейный): $P_1 = 1.40323 - 0.0576625x$

Погрешность вычислим по формуле: $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=0}^{n}(y_{si} - y_i)^2}{n+1}}$, где $y_{s\,i}$ - рассчитанное значение y;

y_i - экспериментальное

Построим таблицу значений полинома в узловых точках Табл. 3.2.

x	y	$\varphi(x)$	$y-\varphi(x)$	$(y-\varphi(x))^2$
0	0	1,40323	-1,40323	1,969054
0,5	1,015985	1,374397	-0,35841	0,128459
1	1,66089	1,345565	0,315325	0,09943
1,5	2,125046	1,316732	0,808314	0,653371
2	2,266649	1,2879	0,978749	0,957949
2,5	2,069564	1,259067	0,810497	0,656906
3	1,618515	1,230234	0,388281	0,150762
3,5	1,064908	1,201402	-0,13649	0,01863
4	0,584019	1,172569	-0,58855	0,346391

4,5	0,329218	1,143737	-0,81452	0,66344
Σ				5,644394

Таким образом, погрешность вычисляется:

$$S_1 = \sqrt{\frac{5.644394}{10}} = 0.751291$$

б) квадратичная аппроксимация

Система нормальных уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} (n+1)C_0 + (\Sigma x_i)C_1 + (\Sigma x_i^2)C_2 = \Sigma y_i \\ (\Sigma x_i)C_0 + (\Sigma x_i^2)C_1 + (\Sigma x_i^3)C_2 = \Sigma x_i y_i \\ (\Sigma x_i^2)C_0 + (\Sigma x_i^3)C_1 + (\Sigma x_i^4)C_2 = \Sigma x_i^2 y_i \end{cases}$$

$$G = \begin{vmatrix} 10 & 22.5 & 71.25 \\ 22.5 & 71.25 & 253.125 \\ 71.25 & 253.125 & 958.32 \end{vmatrix}; \Delta = 6807.8 \qquad B = \begin{vmatrix} 12.73 \\ 27.46 \\ 73.32 \end{vmatrix};$$

$$G_0 = \begin{vmatrix} 12.73 & 22.5 & 71.25 \\ 27.46 & 71.25 & 253.125 \\ 73.32 & 253.125 & 958.32 \end{vmatrix}; \Delta_0 = 2082.41$$

$$G_1 = \begin{vmatrix} 10 & 12.73 & 71.25 \\ 22.5 & 27.46 & 253.125 \\ 71.25 & 73.32 & 958.32 \end{vmatrix}; \Delta_1 = 10802.87$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} 10 & 22.5 & 12.73 \\ 22.5 & 71.25 & 27.46 \\ 71.25 & 253.125 & 73.32 \end{vmatrix}; \Delta_2 = -2487.38$$

$$C_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{2082.41}{6807.8} = 0.215679 \qquad C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10802.87}{6807.8} = 1.72365$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2487.38}{6807.4} = -0.395849$$

$$P_2 = 0.215679 + 1.72365x - 0.395849x^2$$

Построим таблицу значений полинома в узловых точках

Табл. 3.3.

x	y	$\varphi(x)$	$y-\varphi(x)$	$(y-\varphi(x))^2$
0	0	0,215679	-0,21568	0,046517
0,5	1,015985	0,978542	0,037443	0,001402
1	1,66089	1,54348	0,11741	0,013785
1,5	2,125046	1,910494	0,214552	0,046033
2	2,266649	2,079583	0,187066	0,034994
2,5	2,069564	2,050748	0,018816	0,000354
3	1,618515	1,823988	-0,20547	0,042219
3,5	1,064908	1,399304	-0,3344	0,11182
4	0,584019	0,776695	-0,19268	0,037124
4,5	0,329218	-0,04384	0,373057	0,139171
Σ				0,47342

Таким образом, погрешность вычисляется:

$$S_2 = \sqrt{\frac{0.47342}{10}} = 0.21758$$

Выпишем полином 3 – го порядка

$$P_3 = -0.0721594 + 2.77679x - 1.01265x^2 + 0.0913773x^3 \; (S_3 = 0.0839247).$$

Сравнивая полученные погрешности, можно сказать, что с увеличением порядка полинома, увеличивается и точность интерполяции.

Построим сравнительный график исходной и всех трех полученных функций в узловых точках.

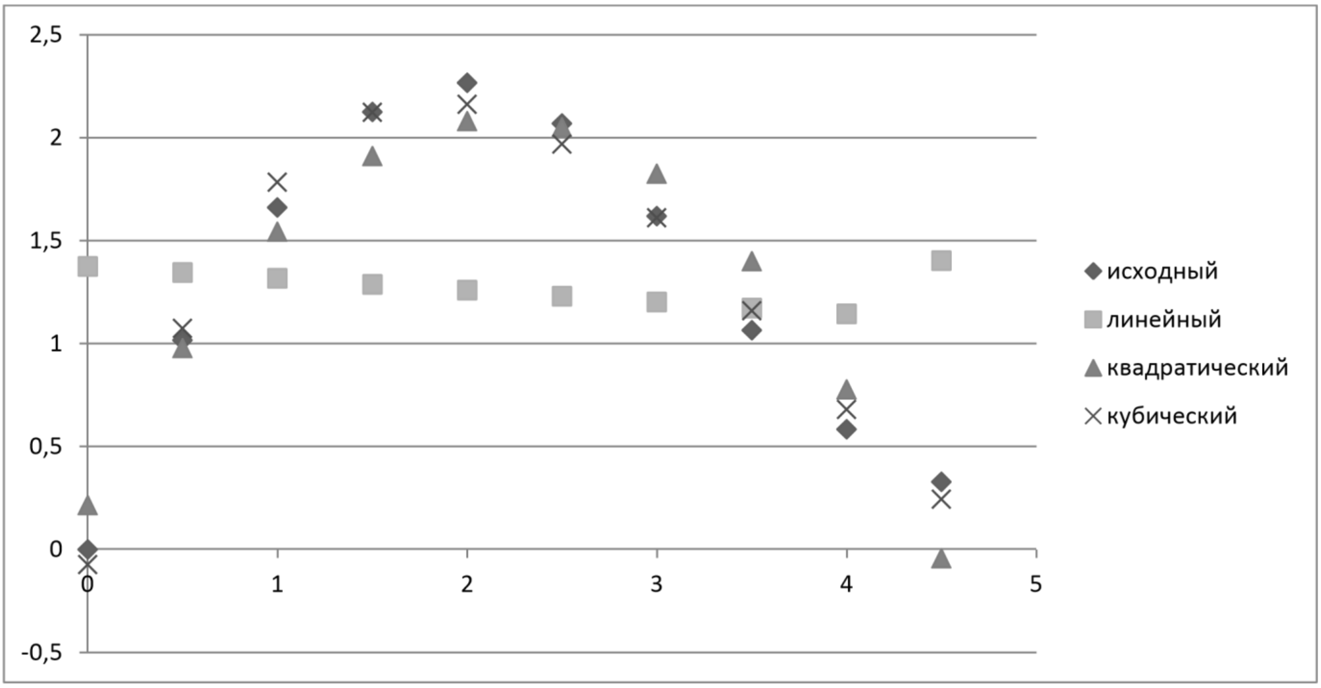


Рис. 9

На этом графике видим, что кубическое приближение дает наибольшую точность.

Далее построим кубический полином на заданном интервале с шагом 0.1.

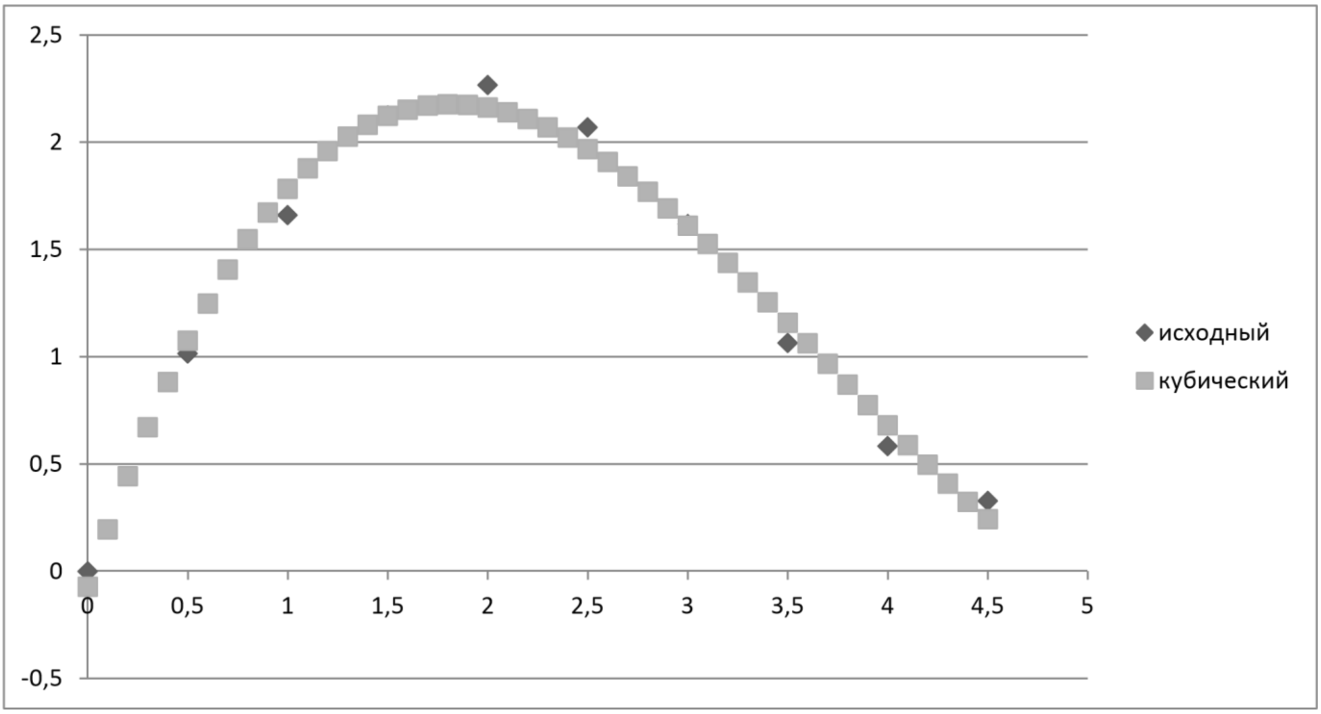


Рис.10

В заключение проведем сравнительный анализ всех изученных методов аппроксимации.

На следующем графике изобразим полином Лагранжа 9-го порядка, полином Ньютона 6го порядка и аппроксимирующую функцию 4-го порядка, полученную с помощью метода наименьших квадратов.

X	y	МНК	Лагранж	Ньютон
0	0	0,0138511	0	0
0,25	0,690569216	0,513547079	0,620684	0,601663258
0,5	1,015985031	0,970644013	1,015985	1,015985031
0,75	1,347195594	1,371307954	1,3519291	1,346772224
1	1,660889766	1,7046917	1,66089	1,660889766
1,25	1,927560123	1,962934791	1,9265665	1,92758225
1,5	2,125046054	2,141163513	2,125046	2,125046054
1,75	2,239880162	2,237490891	2,2402711	2,239763044
2	2,26664853	2,2530167	2,266649	2,26664853
2,25	2,207156076	2,191827454	2,2069049	2,206992029
2,5	2,069564187	2,060996413	2,0695641	2,069564187
2,75	1,867419062	1,870583579	1,8676723	1,877126632

3	1,61851492	1,6336357	1,618515	1,61851492
3,25	1,343591646	1,366186266	1,3431928	1,343589503
3,5	1,064908333	1,087255513	1,064908	1,064908333
3,75	0,80476008	0,818850416	0,8057997	0,804835239
4	0,584018936	0,5859647	0,584019	0,584018936
4,25	0,420783592	0,416578829	0,4155746	0,420939441
4,5	0,329218387	0,341660013	0,329218	0,329218387

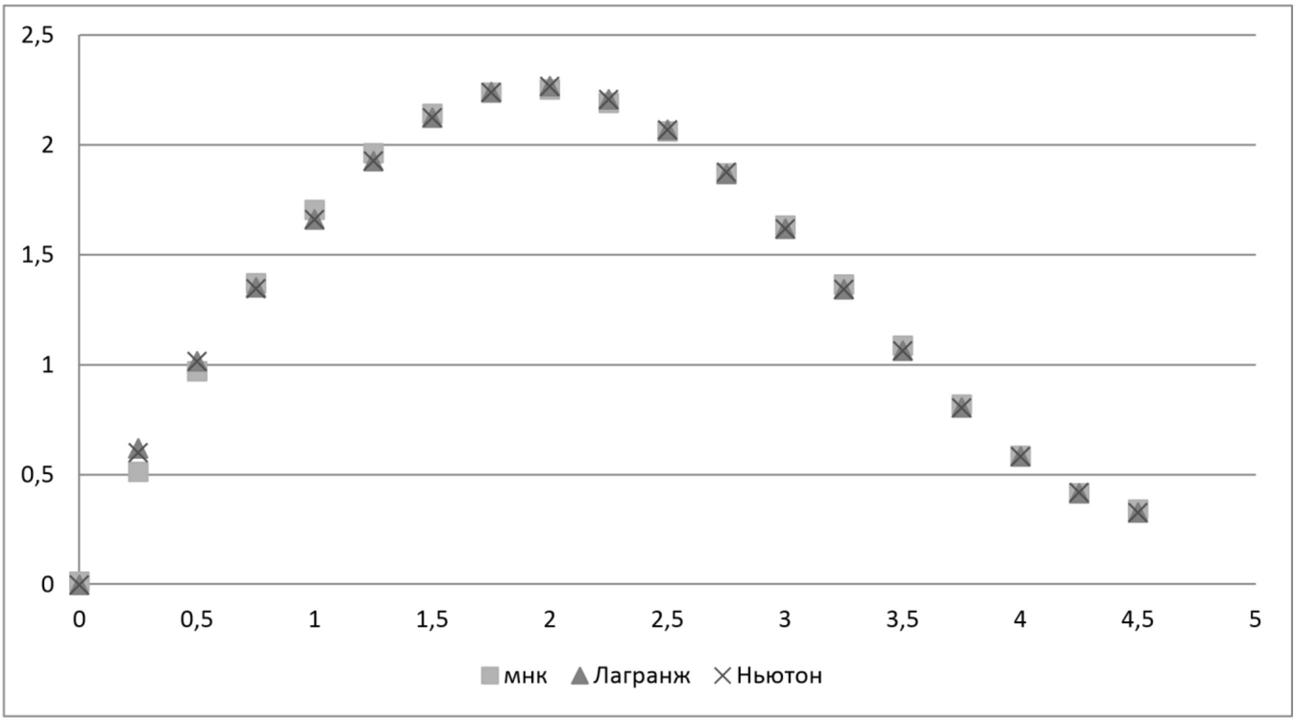


Рис.11

Приложение 1. Задание

(по последней цифре зачетной книжки)

Вариант	1	2	3	4
x				
0	1	1	0,616850275	1
0,5	-0,418548771	1,23056044	1,652248438	1,711976984
1	-2,099088806	1,233449486	1,839263495	1,645473224
1,5	-2,98498247	1,064428635	0,733069005	1,400705407
2	-2,472238475	0,845827292	0,126874515	1,122724209
2,5	-0,913282103	0,703580596	0,020680025	0,94154699
3	0,677930271	0,73695728	0,414485534	0,956840789
3,5	1,45546871	0,995884423	1,308291044	1,218105747

4	1,368104957	1,470022436	2,243366328	1,714480474
4,5	1,043929973	2,092250749	0,995579184	2,378430571

Вариант	5	6	7	8
x				
0	0	0	-2	0,698970004
0,5	0,054233707	0,250935294	-1,332046078	0,579870177
1	1,216486744	0,579736354	-1,040302306	0,430609651
1,5	0,726343465	0,66506611	-0,677569053	0,111989711
2	-0,413033734	0,254696642	-0,326839789	-1,302956905
2,5	-3,508783948	-0,565438708	-0,095786578	-1,371343834
3	-1,954042931	-0,67441226	-0,073029851	-1,328631449
3,5	0,283768429	0,238538178	-0,301575818	-1,204233169
4	2,536919522	0,756645913	-0,766273755	-1,013016961
4,5	1,474783267	-0,117629303	-1,396497118	-0,742091092

Вариант	9	10	11	12
x				
0	1	0	1	1
0,5	0,987777969	0,722961077	1,341230171	1,056756741
1	1,136125542	1,112576605	1,32570046	0,812198927
1,5	1,063240971	1,251105082	1,053530925	0,405059111
2	0,335680108	1,216411867	0,691001881	-0,03415823
2,5	-0,586789502	1,149426139	0,389146334	-0,380200136
3	-0,987182112	1,143509677	0,259053276	-0,535887828
3,5	-0,893293207	1,24815472	0,35603998	-0,453356853
4	-0,220184979	1,500260103	0,672174043	-0,14470987
4,5	0,723297895	1,931589014	1,141331581	0,321478191

Вариант	13	14	15	16
x				
-4,5	-2,866190497	-1,99643512	0,328339524	-1,263496684
-4	-1,659105024	-2,208888213	0,005330341	-1,717710367
-3,5	0,052335799	-2,236095944	0,182321158	-2,006380728
-3	1,242410303	-2,000193357	0,859311975	-2,058437257
-2,5	1,480606474	-1,473311812	2,036302792	-1,858138898

-2	1,164951233	-0,672471467	1,475257621	-1,447682947
-1,5	1,004997477	0,382720288	0,510655785	-0,914527478
-1	1,266795133	1,926596667	0,046053948	-0,364535112
-0,5	1,499153383	2,084421899	0,081452112	0,122591267
0	1	1	0,616850275	1

Вариант	17	18	19	20
x				
-4,5	0,370359935	4,414204201	0,109835761	-1,206296731
-4	-0,916294057	7,346356379	0,33413571	-1,358882484
-3,5	-2,074618492	7,938543313	0,40172153	-1,35816801
-3	-0,108320547	7,010007503	0,244261557	-1,267241792
-2,5	1,565582558	5,323856384	-0,149980818	-1,103227502
-2	3,76745874	3,583853163	-0,732551518	-0,87687512
-1,5	0,523955387	2,445737202	-1,405208973	0,587661623
-1	-0,134518706	2,540302306	-2,040302306	0,820245961
-0,5	-0,197023266	4,502582562	-2,498133125	0,792213555
0	0	9	-2	0,698970004

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Вариант	21	22	23	24
x				
-4,5	0,723297895	-0,256047671	-1,263257643	0,16859516
-4	-0,220184979	-0,567933488	-0,471317697	-0,466800531
-3,5	-0,893293207	-0,434152033	0,461405587	-0,902929106
-3	-0,987182112	-0,009530229	0,711124514	-1,166090983
-2,5	-0,586789502	0,27470869	0,093372236	-1,641922267
-2	0,335680108	0,109365257	-0,760792339	-0,805132677
-1,5	1,063240971	-0,39986099	-0,97278622	0,023054454
-1	1,136125542	-0,807162135	-0,201545	0,668047309
-0,5	0,987777969	-0,693339304	1,076654697	1,093549444
0	1	0	2	1,28219823

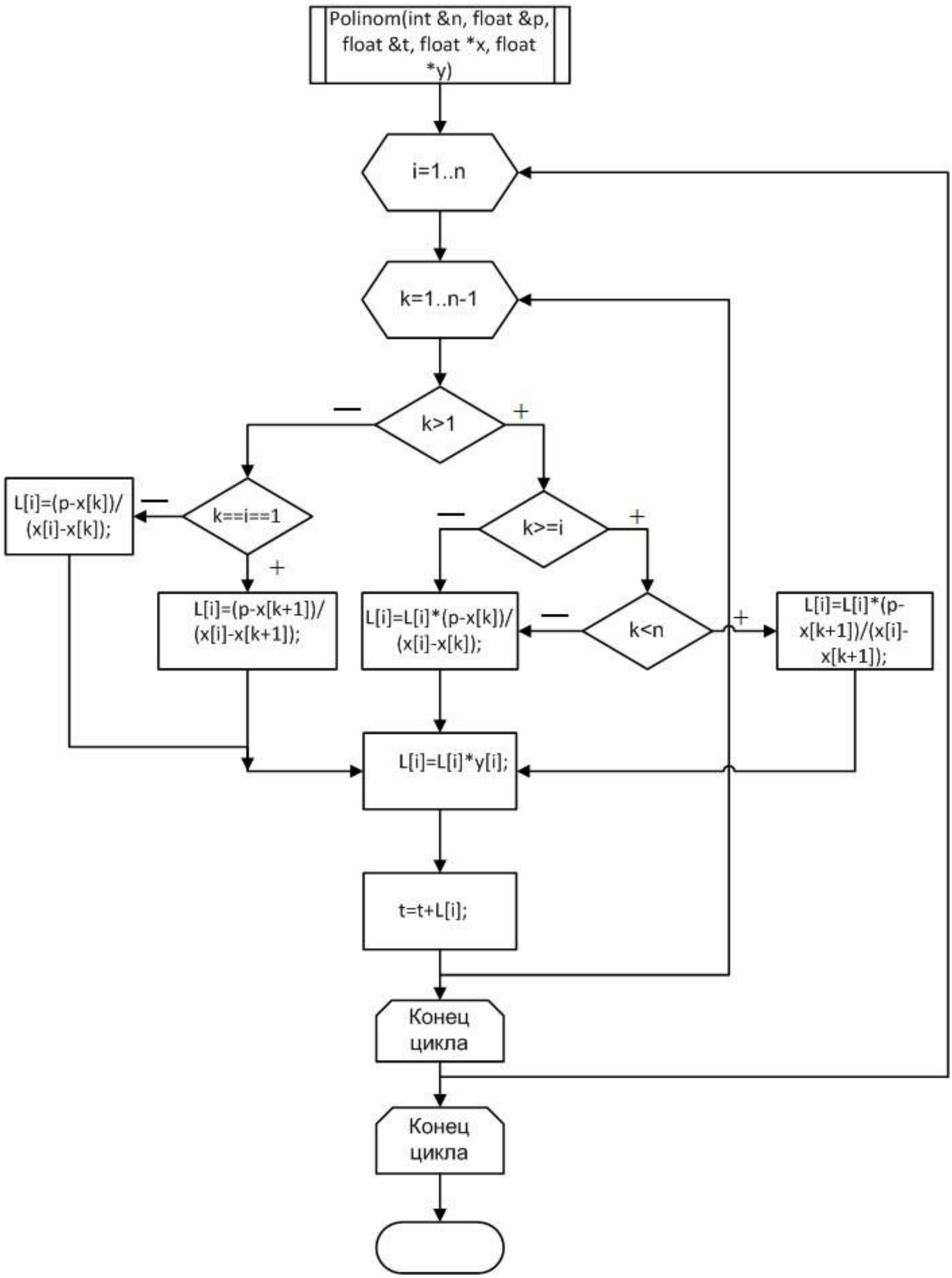
Точки интерполяции

Лагранж	4,34	3,86	3,58	4,22	3,94	4,4	4,15	3,71	3,8	4,12
Ньютон (вперед)	0,63	0,42	0,35	0,74	0,87	0,59	0,24	0,15	0,64	0,39
Ньютон (назад)	4,4	3,58	3,94	4,12	3,71	3,86	3,8	4,34	4,22	4,15

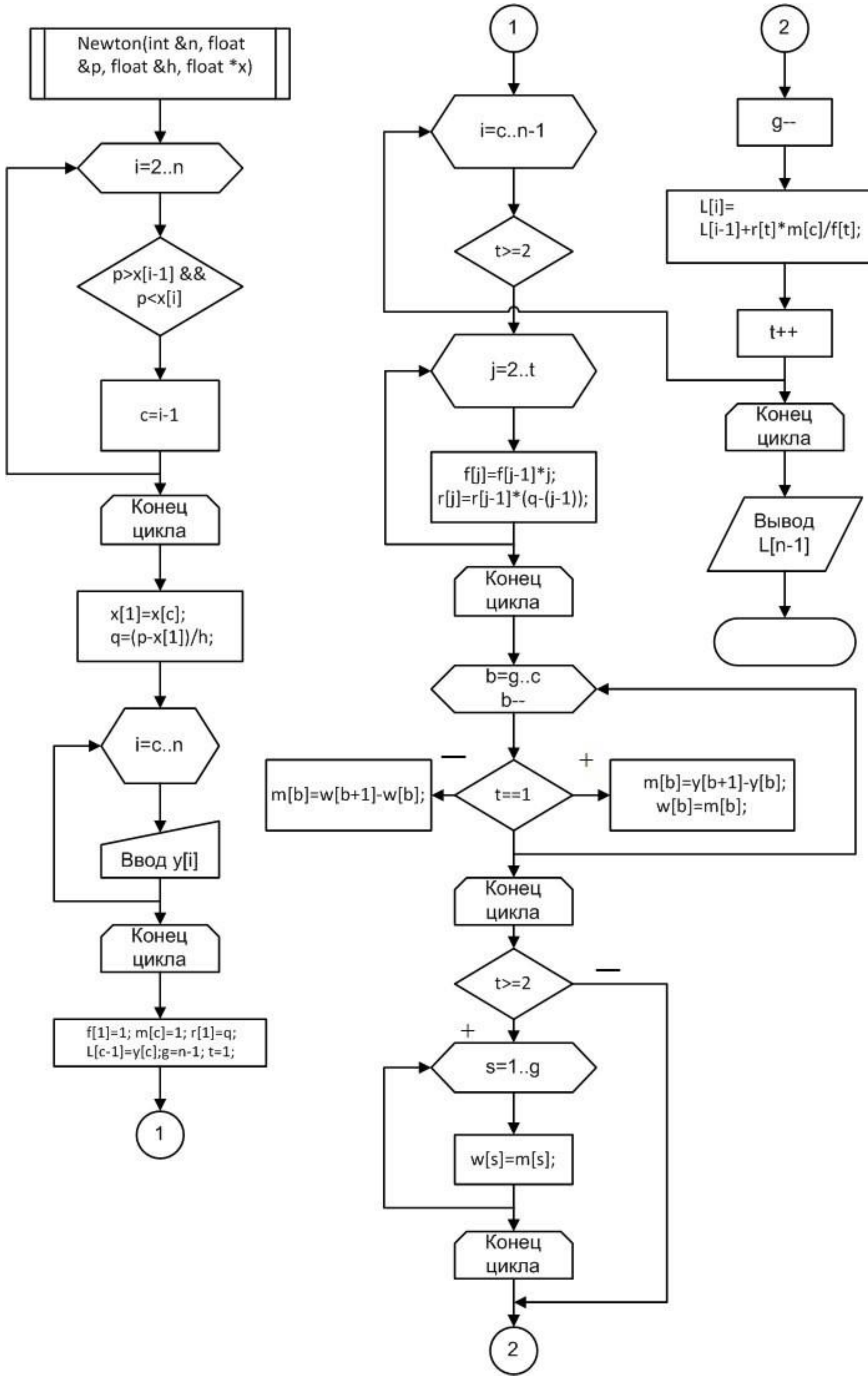
(по предпоследней цифре зачетной книжки)

Приложение 2. Примеры блок – схем

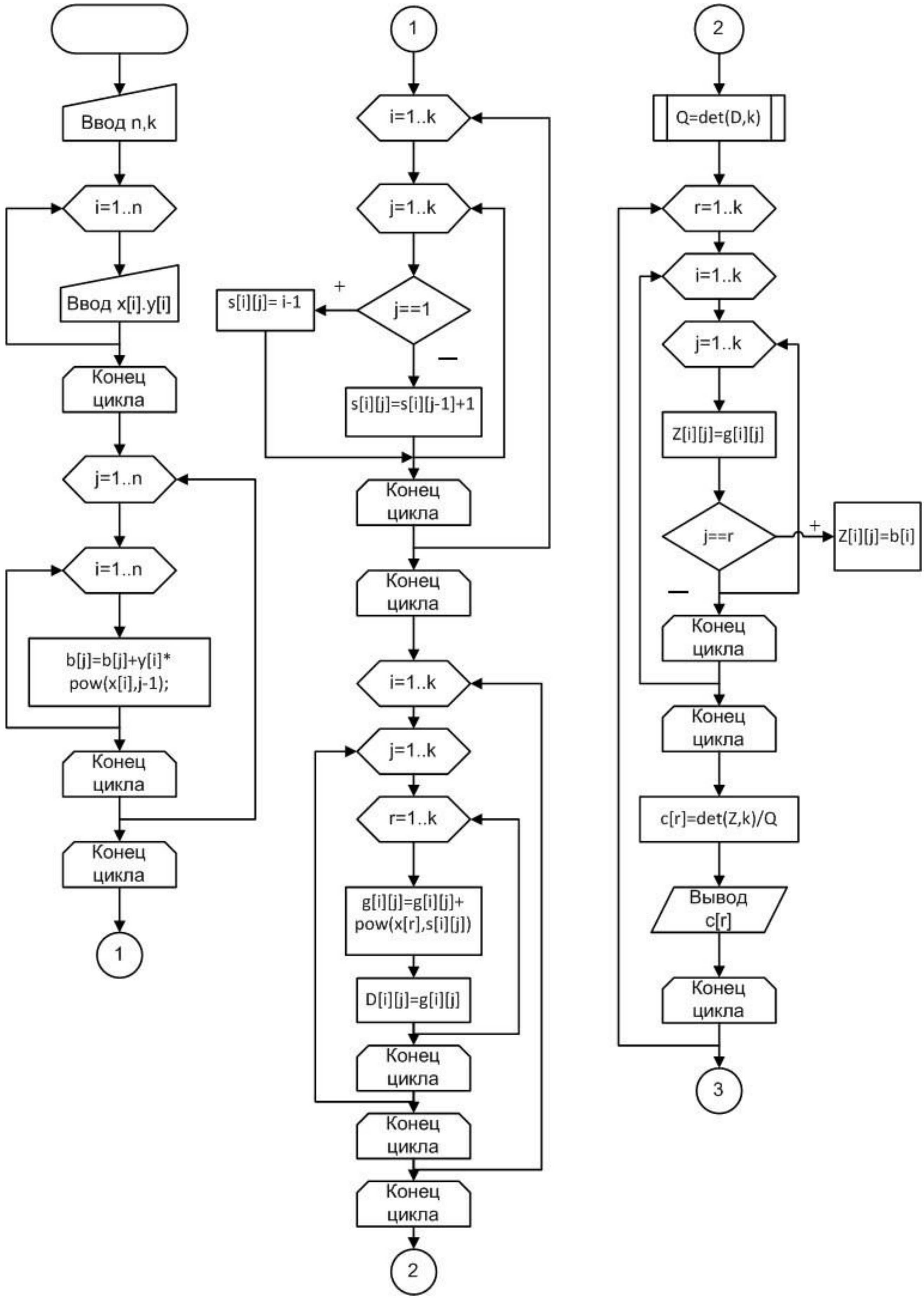
1. Полином Лагранжа – функция вычисления полинома

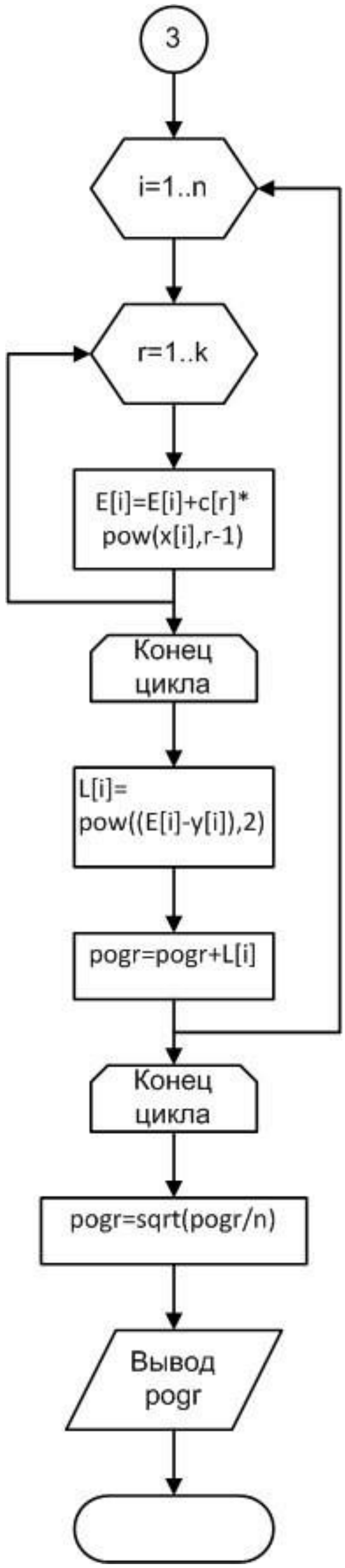


2. Полином Ньютона – функция вычисления полинома «вперед»

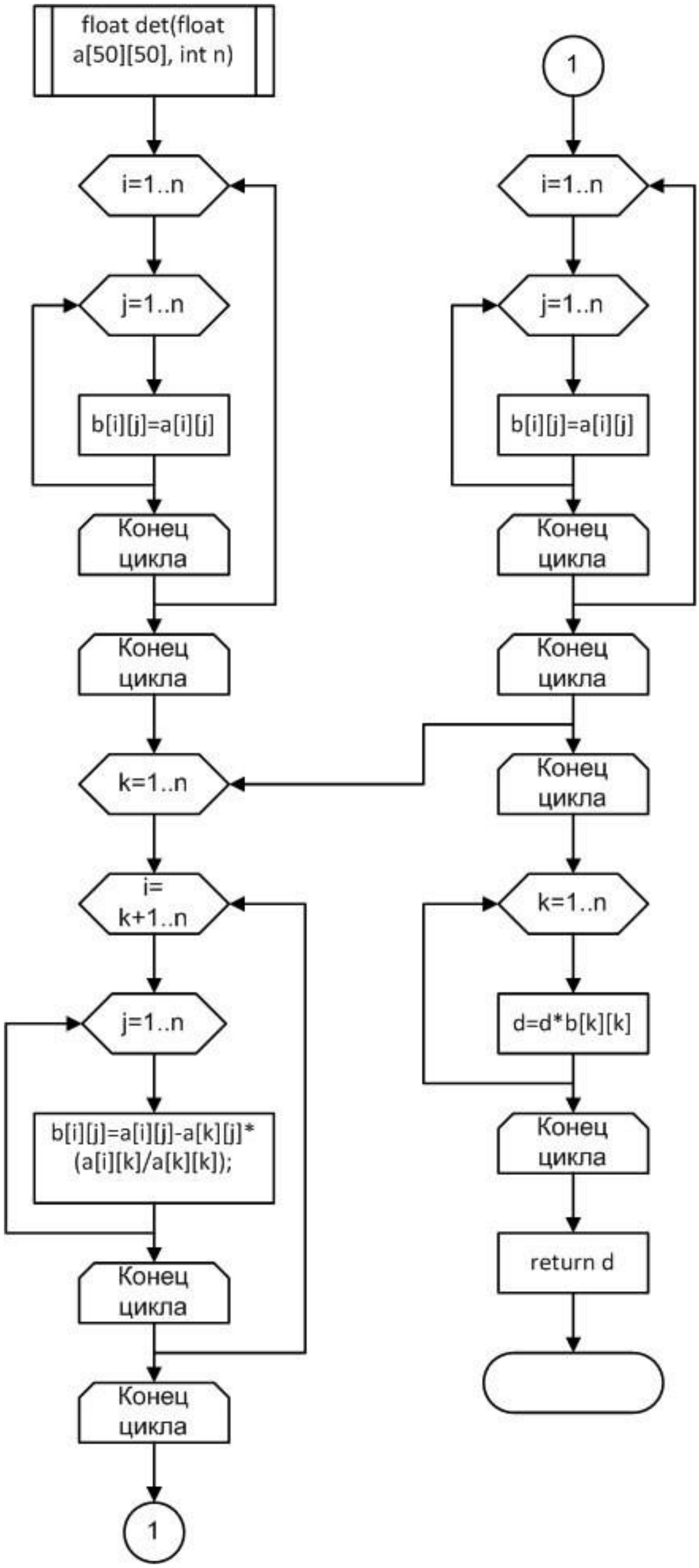


3. 1.Метод наименьших квадратов – основная функция вычисления коэффициентов С.


Ввод n,k
i=1..n
Ввод x[i].y[i]
Конец цикла
j=1..n
i=1..n
b[j]=b[j]+y[i]*
pow(x[i],j-1);
Конец цикла
Конец цикла
1
1
i=1..k
j=1..k
+
s[i][j]= i-1
j==1
—
s[i][j]=s[i][j-1]+1
Конец цикла
Конец цикла
i=1..k
j=1..k
r=1..k
g[i][j]=g[i][j]+
pow(x[r],s[i][j])
D[i][j]=g[i][j]
Конец цикла
Конец цикла
Конец цикла
2
2
Q=det(D,k)
r=1..k
i=1..k
j=1..k
Z[i][j]=g[i][j]
j==r
+
Z[i][j]=b[i]
—
Конец цикла
Конец цикла
c[r]=det(Z,k)/Q
Вывод
c[r]
Конец цикла
3



3.2.Метод наименьших квадратов – функция вычисления определителя


float det(float a[50][50], int n)
i=1..n
j=1..n
b[i][j]=a[i][j]
Конец цикла
Конец цикла
k=1..n
i= k+1..n
j=1..n
b[i][j]=a[i][j]-a[k][j]* (a[i][k]/a[k][k]);
Конец цикла
Конец цикла
1
1
i=1..n
j=1..n
b[i][j]=a[i][j]
Конец цикла
Конец цикла
Конец цикла
k=1..n
d=d*b[k][k]
Конец цикла
return d

Список использованных источников

1. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие. –СПб.: Издательство «Лань», 2008.-368с.