ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра Информатика и вычислительная техника

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Методические указания по практическим занятиям

для студентов очной и заочной форм обучения
Направление подготовки – **09.03.01 «**Информатика и вычислительная техника»

Ростов-на-Дону

2019

Методические указания по
практическим занятиям

по дисциплине
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Составители: Лобзенко П.В. к.т.н., доцент, Щербань И.В. д.т.н., профессор

Рассмотрены и одобрены
на заседании кафедры Информатика и вычислительная техника
Протокол от 26.08.19 № 1

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Численное решение нелинейных уравнений

1. Цели занятия: Практическая наработка навыков решения нелинейных уравнений методами итераций и Ньютона.

2. Рекомендации:
Изучить материалы лекций №№1-3.

Краткая теория.

Метод простой итерации.

При использовании метода простой итерации для уточнения корня уравнение $f(x) = 0$ заменяется эквивалентным уравнением

$$x = \varphi(x) \qquad (1)$$

Это означает, что из $f(x^*) = 0$ следует $x^* = \varphi(x^*)$ и наоборот. Привести уравнение (3.1) к уравнению(1) можно многими способами, например, положив $\varphi(x) = x + \psi(x) f(x)$, где $\psi(x)$ - непрерывная произвольная знакопостоянная функция.

Геометрически на интервале отделения корня уравнение(1) представляется в виде двух пересекающихся линий $y = \varphi(x)$ и $y = x$ (рис. 4). Пологая, что известно начальное приближение $x^{(0)}$ для значения корня x^*, построим итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

изображенный на рис.4 ломаной линией со стрелочками, указывающими направление движения. Для представленного на рис.4 случая взаимного расположения линий $y = x$ и $y = \varphi(x)$ неограниченное повторение вычислений по соотношению(2) позволяет сколь угодно близко подойти к точному значению корня x^*.

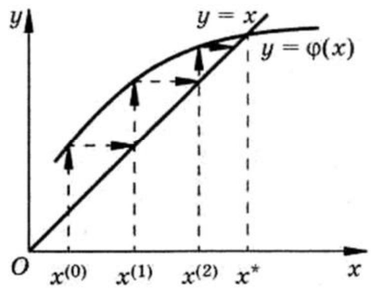

Рисунок 4 – Геометрическая интерпретация метода простой итерации

Исследуем сходимость метода. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, то из теоремы Лагранжа о конечном приращении

$$x^{(k+1)} - x^* = \varphi(x^{(k)}) - \varphi(x^*) \leq (x^{(k)} - x^*)\varphi'(\xi) \qquad (3)$$

следует, что точка ξ лежит между точками $x^{(k)}$ и x^*. Поэтому если всюду $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то отрезки $|x^{(k)} - x^*|$ убывают не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$. Действительно, из (3), которое можно рассматривать как рекуррентное соотношение, следует, что $|x^{(k)} - x^*| = q^k |x^{(0)} - x^*|$ и последовательность $x^{(k)}$ сходится при любом нулевом приближении.

Метод Ньютона

Вновь рассмотрим уравнение (3). Полагая, что погрешность $\varepsilon^{(n)} = x^* - x^{(k)}$ мала, а функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, разложим $f(x^*)$ в ряд Тейлора:

$$f(x^*) = f(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = f(x^{(k)}) + \varepsilon^{(k)} f'(x^{(k)}) + \frac{(\varepsilon^{(k)})^2}{2} f''(\xi) + \ldots,$$

где $\xi \in [x^{(k)}, x^*]$. Учитывая, что $f(x^*) = 0$ и оставляя только линейную часть разложения в ряд (отсюда и другое название метода – МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ), можем записать приближенное, линейное относительно погрешности, уравнение

$$f(x^{(k)}) + \bar{\varepsilon}^{(k)} f'(x^{(k)}) = 0,$$

из которого для погрешности имеем

$$\bar{\varepsilon}^{(k)} = -f(x^{(k)}) / f'(x^{(k)}). \quad (5)$$

Так как использована лишь линейная часть разложения в ряд, то при подстановке (5) в соотношение $x^* = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}$, следующее из соотношения для погрешности, получим вместо x^* лишь приближенное уточненное значение корня, которое обозначим $x^{(k+1)}$. Тогда можем записать основное соотношение метода Ньютона в виде

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}. \quad (6)$$

Это соотношение позволяет построить последовательность приближений $x^{(k)}, k = 0,1,2,\ldots$ к точному значению корня по заданному приближению $x^{(0)}$.

Геометрически процесс (6) означает замену на каждой итерации кривой $y = f(x)$ на касательную к ней в точке $[x^{(k)}, f(x^{(k)})]$ и определение значения $x^{(k+1)}$ как координаты точки пересечения касательной и оси абсцисс (рис. 7). С рассмотренной интерпретацией соотношения (6) связано еще одно название метода – МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ.

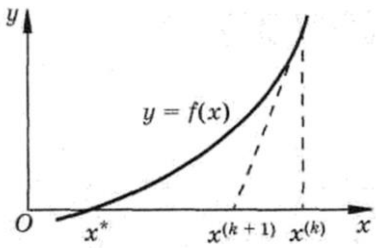

Рисунок 7 – Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Достаточное условие сходимости метода Ньютона получим из соответствующего условия для метода простой итерации. Сопоставляя соотношения (3.2) и (6), можно заключить, что метод простой итерации, в котором $\varphi(x) = x - f(x) / f'(x)$.

Используя условие сходимости метода итераций $|\varphi'(x)| < 1$ и выражение

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

Нетрудно получить достаточное условие сходимости метода Ньютона в форме

$$|f(x) f''(x)| < [f'(x)]^2. \quad (7)$$

Поскольку $f(x^*) = 0$, то $\varphi'(x^*) = 0$, и итерации по соотношению (6) сходятся к точному значению корня при произвольном начальном приближении, но вдали от корня сходимость может быть немонотонной.

Для оценки скорости сходимости метода Ньютона запишем соотношение

$$x^{(k+1)} - x^* = \varphi(x^{(k)}) - \varphi(x^*).$$

Далее разложим $\varphi(x^{(k)})$ в ряд Тейлора:

$$\varphi(x^{(k)} - x^* + x^*) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x^{(k)} - x^*) + \frac{1}{2}\varphi''(x^*)(x^{(k)} - x^*)^2 + \dots$$

Подставляя это разложение в предыдущую формулу и учитывая, что $\varphi'(x) = 0$, получаем

$$\varepsilon^{(k+1)} \approx (1/2)\varphi''(x)(\varepsilon^{(k)})^2 .$$

Из этого соотношения следует, что метод Ньютона имеет вблизи корня второй порядок сходимости: на каждой итерации ошибка меняется пропорционально квадрату ошибки на предыдущей итерации. Нетрудно видеть, что метод Ньютона является одношаговым. Достоинства метода Ньютона состоят в его квадратичной сходимости, возможности обобщения на случай систем уравнений, а также в том, что он является одношаговым. Однако метод Ньютона расходится в тех областях, где $f'(x) \cong 0$. Кроме того, если функция $f(x)$ задана таб-

лично, то вычисление $f'(x)$ затруднено.

Указанная трудность устраняется в МЕТОДЕ СЕКУЩИХ (методе хорд).

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Ознакомиться с условием задания, уяснить его и решить уравнения методами итераций и Ньютона.

3.3. Составить решение задания в среде Excel.

3. 4.Оформить отчет для каждой из 3 задач, включив в него задание и ход решения задания в виде таблиц Excel, представить его на проверку.

4. **Варианты заданий:**

Таблица 1

Nвар	Уравнение	Nвар	Уравнение
1	$2 - x = \ln x$	31	$(x-3)^2 \lg(x-2) = -2$
2	$x^2 + 4\sin x = 0$	32	$x + 3 + \cos x - x^2 = 0$
3	$tg\,(0{,}36x + 0{,}4) = x^2$	33	$(x-1)^2 \lg(x+11) = 1$
4	$1 + \lg x = 0{,}5$	34	$e^{2x}\cos(2x) + x = 0$
5	$4\lg x - x + 2 = 0$	35	$x + \lg(1+x) = 1{,}5$
6	$x - \sin x = 0{,}25$	36	$2\sin(x - 0{,}6) = 1{,}5$
7	$\lg\,(0{,}4x + 0{,}4) = x^2$	37	$\lg(1+2x) = 2 - x$
8	$\sqrt{x} - \cos 0{,}387x = 0$	38	$\lg(x)/(x+1)^2 = 0$
9	$\lg x - 7/(2x+6) = 0$	39	$x\sqrt{x+1} = 1$
10	$tg(0{,}5x + 0{,}2) = x^2$	40	$3x + \cos x + 1 = 0$

Практическое занятие №2

Численная аппроксимация функций методом Ньютона

1. Цель занятия:

Практическая наработка навыков составления математических моделей информационных систем и реализация их на ПК..

2. Рекомендации:

Изучить материалы лекций №№4,5.

Краткая теория

Если узлы интерполяции – равноотстоящие и упорядочены по величине, так что $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, то есть $x_i = x_0 + ih$, то интерполяционный многочлен можно записать в форме Ньютона.

$L(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} * \Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)(q-(n-1))}{n!} * \Delta^n y_0$, где $q = \frac{x - x_0}{h}$, (2.1)

где x_0 – ближайший к X узел **слева**, y_0-значение функции в точке x_0, h – шаг, $\Delta^n y_0$ - конечная разность порядка n.

Конечной разностью 1-го порядка называют разность между двумя соседними значения ми f в узлах интерполяции, т.е.

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),\ k = \overline{0, n-1}.$$
(2.2)

Конечной разностью 2-го порядка называют разность между двумя соседними конечными разностями 1-го порядка, т.е.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k),\ k = \overline{0, n-2}.$$
(2.3)

Конечной разностью порядка m (для $m \leq n$) называют разность между двумя соседними конечными разностями порядка m – 1, т.е.

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k,\ k = \overline{0, n-m}.$$
(2.4)

Таким образом, чтобы записать полином Ньютона самого высокого из возможных порядков, нужно вычислить n конечных разностей. Чтобы вычислить конечную разность порядка n, нужно вычислить все конечные предыдущие конечные разности. Покажем это на примере ниже.

Погрешность измеряется по формуле: $R_n(x) = \left| \frac{q(q-1)(q-2)(q-n)}{(n+1)!} * \Delta^{(n+1)} y_0 \right|$ (2.5)

Выше мы рассмотрели т.н. полином Ньютона «вперед». Существует также и полином Ньютона «назад». Выпишем его формулу:

$L(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{\quad} \Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)(q+2)(q+n-1)}{\quad} \Delta^n y_0$,

где $q = \frac{x - x_n}{\quad}$,

2! $n!$ h

(2.6)

x_n – ближайший к X узел **справа**, y_n – значение функции в точке x_n, h – шаг.

Пример.

Пусть некоторая функция (*) задана таблично (стр.4).

Возьмем промежуточную точку $x = 0.7$, построим таблицу конечных разностей.

Обратим внимание:

- ближайший узел слева от точки 0.7 это узел 0.5, поэтому вычисления начинаются с этого узла;
- шаг изменения узловых точек h=0.5; $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.7 - 0.5}{0.5} = 0.4$

Табл. 2.1.

x	y	Δy	Δy_2	Δy_3	Δy_4	Δy_5	Δy_6	Δy_7	Δy_8
0,5	1,015985	0,644905	-0,18075	-0,1418	0,125669	-0,02481	-0,009367	0,000732	0,004939
1	1,66089	0,464156	-0,32255	-0,01613	0,100859	-0,034177	-0,008635	0,005671	
1,5	2,125046	0,141603	-0,33869	0,084724	0,066682	-0,042812	-0,002964		
2	2,266649	-0,19709	-0,25396	0,151406	0,02387	-0,045776			
2,5	2,069564	-0,45105	-0,10256	0,175276	-0,02191				
3	1,618515	-0,55361	0,072718	0,15337					
3,5	1,064908	-0,48089	0,226088						
4	0,584019	-0,2548							
4,5	0,329218								

$\Delta y_0 = y_2 - y_1 = 1.66089 - 1.015985 = 0.644905$ $\Delta y_1 = y_3 - y_2 = 2.125046 - 1.66089 = 0464156$ и т.д.

Теперь мы имеем все коэффициенты для построения полинома Ньютона:

$L_1 = 1.015985 + 0.4 * 0.644905 = 1.273947$ $R_1 = \frac{\Delta y_{02} * q * (q - 1)}{2!} = 0.2169$

$L_2 = 1.015985 + 0.4 * 0.644905 + \frac{0.4*(0.4 - 1)}{2!} *(-0.18075)$

$$R_2 = = \left|\frac{\Delta y_0^3 * q * (q-1) *(q-2)}{3!}\right| \; 0.009075$$

Сравнивая полученные погрешности, можем сделать вывод, что квадратичная интерполяция позволяет вычислить значение функции с большей точностью, т.к. $R_2 << R_1$

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Ознакомиться с условием задания, уяснить его и аппроксимировать функции методом Ньютона.

3.3. Составить решение задания в среде Excel.

3. 4.Оформить отчет для каждой из 3 задач, включив в него задание и ход решения задания в виде таблиц Excel, представить его на проверку.

4. **Варианты заданий:**

№ 1	f(x)=1/(1+x)^1/2*5/exp(x)	x
1	5,00	0,00
2	3,71	0,50
3	2,60	1,00
4	1,76	1,50
5	1,17	2,00
6	0,77	2,50
7	0,50	3,00
8	0,32	3,50
9	0,20	4,00
10	0,13	4,50
№ 2	f(x)=cos(x)**3+sin(x)	x
1	1,00	0,00
2	1,16	0,50

3	1,00	1,00
4	1,00	1,50
5	0,84	2,00
6	0,08	2,50
7	-0,83	3,00
8	-1,17	3,50
9	-1,04	4,00
10	-0,99	4,50
№ 3	f(x)=exp(x)*sin(x)	x
1	0,00	0,00
2	0,79	0,50
3	2,29	1,00
4	4,47	1,50
5	6,72	2,00
6	7,29	2,50
7	2,83	3,00
8	-11,62	3,50
9	-41,32	4,00
10	-87,99	4,50

№ 4	f(x)=cos(x)*sin(x)**6	x
1	0,00	0,00
2	0,20	0,50
3	0,38	1,00
4	0,07	1,50
5	-0,34	2,00
6	-0,29	2,50
7	-0,02	3,00
8	-0,12	3,50
9	-0,37	4,00

10	-0,20	4,50
№ 5	f(x)=arctg(x)*exp(x)	x
1	0,00	0,00
2	0,76	0,50
3	2,13	1,00
4	4,40	1,50
5	8,18	2,00
6	14,50	2,50
7	25,09	3,00
8	42,80	3,50
9	72,39	4,00
10	121,71	4,50
№ 6	f(x)=cos(x)+lg(x)	x
1	-1,00	0,01
2	0,58	0,51
3	0,54	1,01
4	0,24	1,51
5	-0,12	2,01
6	-0,41	2,51
7	-0,51	3,01
8	-0,39	3,51
9	-0,04	4,01
10	0,45	4,51
№ 7	f(x)=1/(1+x)^1/2-1/exp(x)	x
1	0,00	0,00
2	0,62	0,50
3	1,05	1,00
4	1,36	1,50
5	1,60	2,00
6	1,79	2,50
7	1,95	3,00

8	2,09	3,50
9	2,22	4,00
10	2,33	4,50
№ 8	f(x)=1/(1+x)^1/2*5/exp(x)	x
1	5,00	0,00
2	3,71	0,50
3	2,60	1,00
4	1,76	1,50
5	1,17	2,00
6	0,77	2,50
7	0,50	3,00
8	0,32	3,50
9	0,20	4,00
10	0,13	4,50
№ 9	f(x)=cos(x)*sin(x)**6	x
1	0,00	0,00
2	0,20	0,50
3	0,38	1,00
4	0,07	1,50
5	-0,34	2,00
6	-0,29	2,50
7	-0,02	3,00
8	-0,12	3,50
9	-0,37	4,00
10	-0,20	4,50

Практические занятия № 3 Численное интегрирование функций методом Симпсона

1. Цель занятия:

Практическая наработка навыков решения задач интегрирования функций методом Симпсона.

2. Рекомендации:

Изучить материалы лекции №7.

Краткая теория

На каждом элементарном отрезке подынтегральная функция f(x) заменяется квадратичной параболой, построенной по трем точкам: концам элементарного отрезка (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) и его середине ($x_i + \frac{h}{2}, \tilde{f}_i$).

Площадь полученной криволинейной трапеции служит оценкой элементарной площади S_i:

$$S_i \approx \frac{h}{6}\cdot\left(f_i + 4\tilde{f}_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{6}\cdot\left[f(x_i) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_{i+1})\right]$$

Тогда значение интеграла:

$$I^* \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left(f_i + 4\tilde{f}_i + f_{i+1}\right) =$$

$$\frac{h}{6}\left(f_0 + 4\tilde{f}_0 + f_1 + f_1 + 4\tilde{f}_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2} + 4\tilde{f}_{n-2} + f_{n-1} + f_{n-1} + 4\tilde{f}_{n-1} + f_n\right)$$

Добавим в скобки $-f_0 + f_0$, вынесем общий множитель за скобки:

$$I^* \approx \frac{h}{3}\cdot\left[\frac{f_n - f_0}{2} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(f_i + 2\tilde{f}_i\right)\right] =$$

$$\frac{h}{3}\cdot\left[\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a + ih) + 2f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right)\right)\right] \qquad (1)$$

Формула Симпсона имеет высокую точность, так как погрешность метода $\delta_м = O(h^3)$

3. Порядок выполнения задания:

3.1. Выбрать 3 варианта задания из перечня вариантов, приведенных ниже по следующему правилу: №по журналу- первое задание; №по журналу +3 – второе задание и №по журналу +5 – третье задание (если достигнуто окончание списка вариантов зданий, то перейти в его начало).

3.2. Ознакомиться с условием задания, уяснить его и выполнить численное интегрирование функций методом Симпсона.

3.3. Составить решение задания в среде Excel.

3.4.Оформить отчет для каждой из 3 задач, включив в него задание и ход решения задания в виде таблиц Excel, представить его на проверку. **4. Варианты заданий:**

Вариант	1	2	3	4
x	ln(abs(0,5tgx)+0,1)	sin(abs(tgx))	sin(exp(x+0,1)^0,5)	sin(exp(abs(x)+0,1))
0	-2,302585093	0	0,868054985	0,893540943
0,5	-0,985771459	0,519531445	0,975692426	0,968584389
1	-0,129307341	0,999910374	0,986832909	0,136994463
1,5	1,967211649	0,999361144	0,79320348	-0,971184825
2	0,176068658	0,817209661	0,280141526	0,951663737
2,5	-0,747579822	0,679456989	-0,503551018	0,78168776
3	-1,764494919	0,142064287	-0,999999578	-0,205331788
3,5	-1,247253304	0,365886933	-0,231420768	-0,891605002
4	-0,387265764	0,915930885	0,996297359	-0,605208042
4,5	0,88321616	-0,997184551	-0,522179453	-0,865751135

Вариант	5	6	7	8	9
x	sin(x^1,5)	cos(x^1,5)	cos(x^1,5)-sin(x^1,5)	ln(abs(0,5cosx))	ln(abs(0,5sinx)+0,1)
0	0	1	1	-0,693147181	-2,302585093
0,5	0,346233594	0,938148335	0,591914741	-0,823731421	-1,079654815
1	0,841470985	0,540302306	-0,301168679	-1,308773651	-0,652513058
1,5	0,964745682	-0,263183907	-1,227929589	-3,341930835	-0,512915317

2	0,308071742	-0,951363128	-1,25943487	-1,569864289	-0,589420314
2,5	-0,725151526	-0,688589329	0,036562197	-0,914862233	-0,918202378
3	-0,885250766	0,465114052	1,350364818	-0,703205096	-1,768668114
3,5	0,261634322	0,965167075	0,703532753	-0,758799188	-1,289561144
4	0,989358247	-0,145500034	-1,13485828	-1,118340179	-0,737305468
4,5	-0,120867343	-0,992668668	-0,871801325	-2,25001257	-0,529728056