ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал
ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Методические указания
по выполнению контрольной работы
по дисциплине

Математика

Направление подготовки 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника»

Ростов-на-Дону
2019

Методические указания

по выполнению контрольной работы

по дисциплине

Математика

Направление подготовки 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника»

Составители: С.В. Ефимов, к.ф.-м..н., доцент,

Г.С. Костецкая, к.ф.-м..н., доцент

Рассмотрено и одобрено

на заседании кафедры Общенаучной подготовки

Протокол от «17» июня 2019г. № 11

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания относятся ко второй части курса «Математика», изучаемого студентами-заочниками СКФ МТУСИ во втором семестре. Эта часть посвящена интегральному исчислению функции одной и многих переменных, дифференциальным уравнениям и рядам. По указанной части курса выполняется контрольная работа, задания которой приводятся в конце данных методических указаний.

Методические указания не заменяют учебников, а содержат лишь разъяснения о порядке изучения программного материала, краткий обзор отдельных вопросов, а также решение некоторых типовых задач и вопросы для самоконтроля.

Основная литература, по которой следует изучать курс, приведена ниже.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1. Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная учебная работа студентов заочной формы обучения предполагает изучение материала дисциплины по следующим литературным источникам.

Основная литература

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. (Э1)
2. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум: Учебное пособие. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. (Э2)

Дополнительная литература

1. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. (Э3)
2. Журбенко Л.Н., Никонова Г. А. Математика: Учебное пособие. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. (Э4)
3. Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В. Математика в примерах и задачах: Учебное пособие. М.:НИЦ ИНФРА-М, 2016. (Э5)

Электронные образовательные ресурсы	
Э1	http://znanium.com/catalog.php?item=tbk&code=61&page=10
Э2	http://znanium.com/bookread2.php?book=549273
Э3	http://znanium.com/bookread2.php?book=540488
Э4	http://znanium.com/bookread2.php?book=539549
Э5	http://znanium.com/bookread2.php?book=484735 http://znanium.com/bookread2.php?book=557001

2. Решение задач

Приступая к решению задач, следует после изучения очередного раздела по учебнику внимательно изучить примеры решения типовых задач по данному пособию, а затем переходить к самостоятельному решению рекомендованных задач. В тех случаях, когда это возможно, следует дать чертеж, поясняющий содержание задачи. Решение должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа и по возможности проводиться в общем виде на буквах.

Числовые данные подставляются в формулу в конце решения задачи. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д.

3. Выбор варианта

Выбор варианта для выполнения контрольной работы определяется следующим образом:

- Если две последние цифры номера студенческого билета образуют число меньше 51, то это число и является номером варианта.
- Если две последние цифры номера студенческого билета образуют число больше или равное 51, то для получения номера варианта из этого числа нужно вычесть 50 (например, если номер студенческого билета оканчивается на 68, то номер варианта будет 68–50=18).

4. Порядок представления и защиты контрольной работы

Контрольная работа выкладывается на сайте СКФ МТУСИ в разделе Электронное портфолио студента в личном кабинете студента для рецензирования. Сроки представления контрольной работы устанавливаются планом-графиком. В результате рецензирования работы преподавателем студент получает одну из двух оценок: «Допущен к собеседованию» или «Не допущен к собеседованию». В последнем случае необходимо устранить отмеченные преподавателем недостатки и представить работу для повторного рецензирования.

Работа с оценкой «Допущен к собеседованию» должна быть распечатана в формате А4 и защищена на экзамене. Защита контрольной работы осуществляется устно путем собеседования. К собеседованию допускаются только те студенты, у которых имеются на руках контрольные работы на бумажном носителе с оценкой «Допущен к собеседованию». Целью защиты контрольной работы является подтверждение того, что студент разобрался в предмете контрольной работы и выполнил ее самостоятельно.

Если студент успешно защитил контрольную работу, то преподаватель делает на бумажном носителе запись «зачтено» с указанием даты и сдает работу вместе с рецензией в ЦОКР для передачи на хранение в архив. Если студент не защитил контрольную работу, то работа на бумажном носителе вместе с рецензией остается на руках у студента до даты успешной защиты.

5. Требования к оформлению контрольных работ

А. Требования к оформлению контрольной работы в электронном формате для размещения в личном кабинете студента

1. Работа должна быть оформлена в текстовом редакторе Word.
2. Работа должна иметь титульный лист, выполненный в соответствии с установленными правилами (http://www.skf-mtusi.ru/?page_id=663).
3. Страницы работы должны быть пронумерованы.
4. Задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
5. Перед решением задачи необходимо написать ее условие.
6. Решения задач в контрольных работах должны сопровождаться исчерпывающими, но краткими объяснениями.

7. В конце контрольной работы указывается использованная литература.
8. На рецензию одновременно высылается не более одной работы.
9. Работа, выполненная по другому варианту, с пропуском какого-либо задания или содержащая серьезные ошибки и недостатки не допускается к защите.

Б. Требования к оформлению контрольной работы на бумажном носителе

1. Работа, получившая оценку «Допущен к собеседованию», распечатывается в формате А4 и представляется для защиты на экзамене.
2. Работа на бумажном носителе должна полностью соответствовать электронной версии, размещенной в портфолио и получившей оценку «Допущен к собеседованию».
3. Работа на бумажном носителе должна быть подписана.
4. В работу должен быть вставлен чистый лист для рецензии.

6. Сдача экзамена

К сдаче экзамена допускаются только студенты, защитившие контрольные работы.

Сдача экзамена проводится по билетам.

Студент выбирает билет с вопросами по дисциплине путем случайного отбора. На подготовку отводится 45 минут. Ответы на вопросы билета студент дает в устной форме. Необходимо правильно выполнить более 50% задания билета.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА

РАЗДЕЛ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Изучаемые вопросы

1.1. Комплексные числа, их изображение на плоскости, различные формы записи комплексного числа.

1.2. Алгебраические действия над комплексными числами.

1.1. Комплексные числа, их изображение на плоскости, различные формы записи комплексного числа

Рассмотрим различные формы записи комплексных чисел. Запись комплексного числа z в виде

$$z = x + iy \tag{1.1.1}$$

называется алгебраической формой комплексного числа, при этом x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$.

Комплексное число изображается как точка M на координатной плоскости $0xy$ с координатами x и y, либо как вектор, идущий из начала координат, с проекциями x и y. При этом (1.1.1) рассматривается как разложение вектора z по осям координат (рис.1). Проекции x и y называются соответсвенно действительной и мнимой частью комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Таким образом, $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

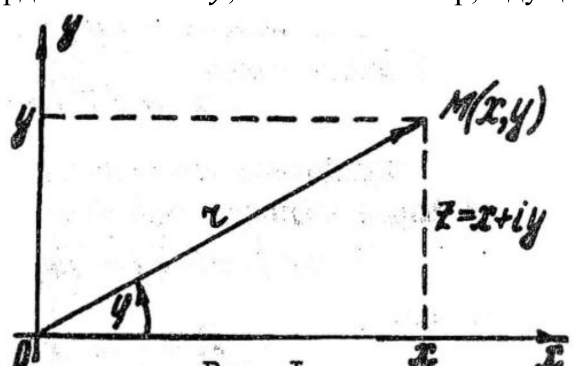

Рис. I

Наряду с представлением комплексного числа в форме (1.1.1) удобно пользоваться его представлением в полярных координатах. Если r и φ – полярные координаты точки $z = x + iy$, то

$$z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi). \tag{1.1.2}$$

Выражние (1.1.2) называется тригонометрической формой комплексного числа, при этом величина r назывется модулем комплексного числа z и равна

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

а величина φ называется аргуметом комплексного числа и обозначается

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

при этом $\arg z = \varphi_0$ – главное значение аргумента такое, что $-\pi < \varphi_0 \le \pi$ и $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y}{x}$.

При нахождении угла φ_0 из последнего соотношение надо учитывать четверть, в которой находится угол φ_0.

При $z = 0$ модуль $|z| = 0$, а величина $\operatorname{Arg} z$ не определена.

Применяя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\ \sin\varphi$, комплексное число можно записать в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Сопряженным комплексным числом числа $z = x + iy$ называется комплексное число $\overline{z} = x - iy$. Заметим, что $|\overline{z}| = |z|$ и $\operatorname{Arg}\overline{z} = -\operatorname{Arg} z$. Тогда в тригонометрической и показательной формах сопряженное комплексное число будет иметь вид:

$$\overline{z} = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = r(\cos\varphi - i\ \sin\varphi),$$

$$\overline{z} = re^{-i\varphi},$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Пример 1.1.1. Записать комплексное число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение. Для заданного числа $z = -1 + i$ имеем $x = -1,\ y = 1$.

Тогда $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{-1} = -1$.

При этом точка z находится во второй четверти. Поэтому $\varphi_0 = \frac{3}{4}\pi$.

В итоге имеем $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi)$.

Необходимо уметь переходить от показательной формы комплексного числа к тригонометрической и алгебраической формам и обратно. При рассмотрении разности двух комплексных чисел $z - z_0$ необходимо иметь в виду, что модуль этой разности $|z - z_0| = \rho$ имеет геометрический смысл окружности с центром в точке z_0 и радиусом ρ, так как по определению $|z - z_0| = |x + iy - (x_0 - iy_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Но $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Полученное уравнение есть уравнение окружности на плоскости $0xy$ с центром в точке (x_0, y_0) и радиуса ρ. Неравенство $|z - z_0| \le \rho$ описывает круг с границей в виде данной окружности, а неравенство $|\mathrm{z} - \mathrm{z}_0| > \rho$ определяет множество точек, лежащих вне указанного круга.

Пример 1.1.2. На комплексной плоскости начертить область, удовлетворяющую условиям $1 \le |\mathrm{z} + 2 - \mathrm{i}| < 3; |\arg(\mathrm{z} + 2 - \mathrm{i})| \le \frac{\pi}{4}; \operatorname{Re}\mathrm{z} < \frac{1}{2}; \operatorname{Im}\mathrm{z} \le 2$.

Решение. Неравенство $1 \le |z + 2 - i| < 3$ выделяет на плоскости кольцо с центром в точке $z_0 = -2 + i$ с внутренним радиусом 1 и внешним радиусом 3, причем внутренняя окружность принадлежит заданной области, а внешняя – не принадлежит (рис.2а).

Второе условие выделяет сектор с вершиной в точке $z_0 = -2 + i$ с лучами $\arg(z + 2 - i) = \pm\frac{\pi}{4}$, причём оба луча принадлежат области (рис.2б).

Третье условие выделяет из сектора кольца ту его часть, для точек которой справедливо неравенство $x < 0$, причем граница $\operatorname{Re} z = 0{,}5$ области не принадлежит (рис.2в).

Четвертое условие выделяет из сектора кольца ту его часть, для точек которой справедливо неравенство $y \le 2$, причём граница $\operatorname{Im} z = 2$ принадлежит области (рис.2г).

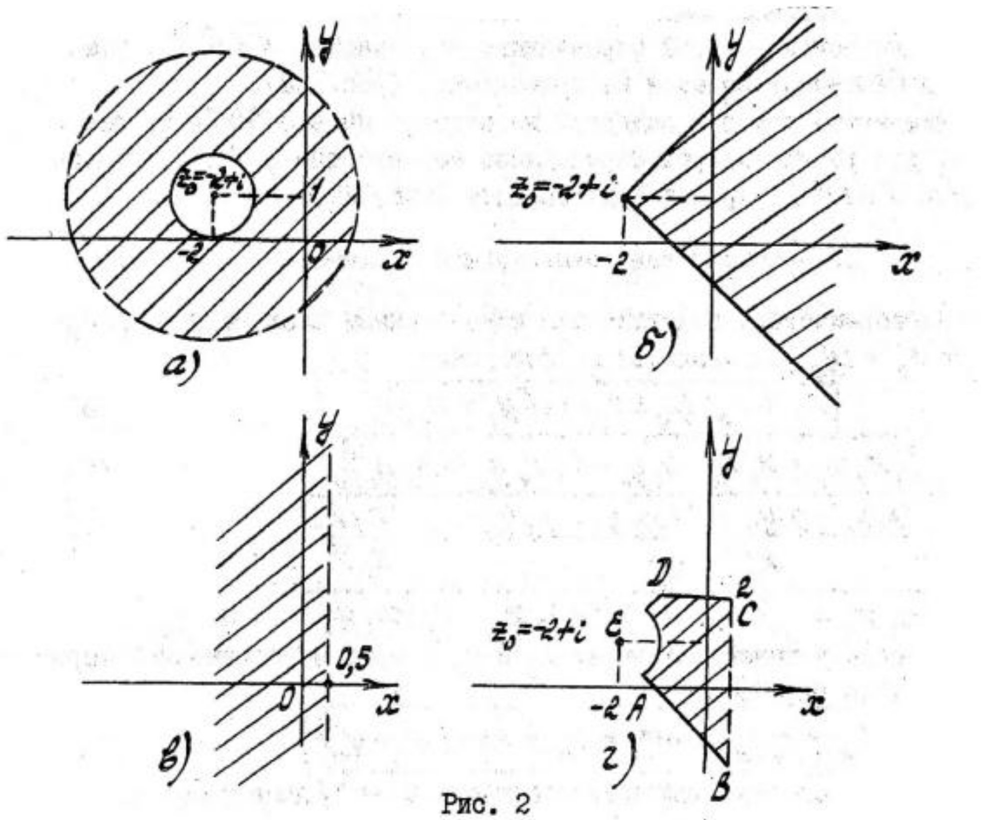

Рис. 2

1.2. Алгебраические действия над комплексными числами

Алгебраические дествия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ выполняются по формулам:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$
$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + i y_2^2}.$$

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то умножение комплексных чисел z_1и z_2 в тригонометрической форме определяется равенством

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Возведение в степень комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ определяется равенством

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

При этом

$$|z^n| = |z|^n = r^n; \ \mathrm{Arg}\, z^n = n\mathrm{Arg}\, z.$$

Корень n-ой степени из комплексного числа $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных комплексных значений z_k , определяемых по формуле Муавра

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,\dots,n-1.$$

Точки $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Пример 1.2.1.

а) решить уравнение $8z^3 + 27 = 0$. Значения корней записать в тригонометрической, алгебраической и показательной формах. Изобразить решение на комплексной плоскости.

б) вычислить сумму двух первых корней $z_0 + z_1$. Результат записать в показательной форме.

Решение. а) перепишем уравнение следующим образом: $z^3 = -\frac{27}{8}$.

Так как $\left|-\frac{27}{8}\right| = \frac{27}{8}$ и $\arg\left(-\frac{27}{8}\right) = \pi$, то число $-\frac{27}{8}$ в тригонометрической форме будет иметь вид $-\frac{27}{8} = \frac{27}{8}(\cos\pi + i\sin\pi)$. Тогда по формуле (9), полагая $n = 3$ и $k = 0{,}1{,}2$, получим

$$\mathrm{z_k} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),$$

Откуда

при $k = 0$: $z_0 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$;

при $k = 1$: $z_1 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = \frac{3}{2}e^{\pi i} = -\frac{3}{2}$;

при $k = 2$: $z_1 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Все три корня z_0, z_1, z_2 расположены на окружности радиуса 3/2 и являются вершинами правильного треугольника (рис.3).

б) Вычислим сумму $z_0 + z_1$. Сложение выполняем в алгебраической форме:

$$z_0 + z_1 = \frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

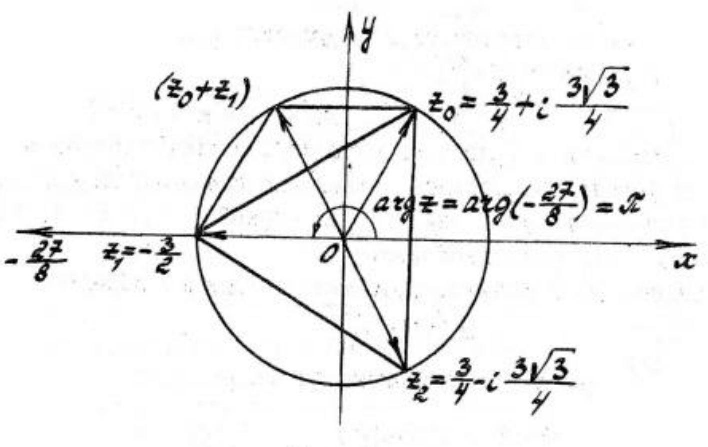

Рис. 3

Чтобы записать результат в показательной форме, найдём модуль $|z_0 + z_1|$ и аргумент φ_0 полученной суммы:

$$|z_0 + z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + 27/16} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\sqrt{3}.$$

Отсюда имеем $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$ или $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$.

Из чертежа видно, что точка $z_0 + z_1$ лежит во второй четверти. Поэтому $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$. В результате имеем $z_0 + z_1 = \frac{3}{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

РАЗДЕЛ 2. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Изучаемые вопросы

2.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Элементарные свойства и таблица неопределенных интегралов.
2.2. Метод замены переменной в неопределенных интегралах.
2.3. Метод интегрирования по частям.
2.4. Интегрирование рациональных функций.
2.5. Интегрирование тригонометрических функций.
2.6. Интегрирование иррациональных функций.

2.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Элементарные свойства и таблица неопределенных интегралов

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором интервале, если на этом интервале

$$F'(x) = f(x).$$

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на данном интервале называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx.$$

В дальнейшем на протяжении раздела 2 мы будем по умолчанию считать, что все условия и свойства имеют место на некотором интервале.

Лемма. Если $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ – любые две первообразные функции $f(x)$, то

$$F_1(x) - F_2(x) = Const.$$

Теорема. Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ (всё равно, какая!), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

В дальнейшем C всегда будет означать произвольную постоянную.

Заметим, что $\int f(x)dx$ определен не для всякой функции $f(x)$. Однако если функция $f(x)$ непрерывна, то неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ существует. В дальнейшем, мы будем иметь дело с неопределенными интегралами только непрерывных функций.

Элементарные свойства неопределенных интегралов:

1) $\int d(F(x)) = F(x) + C$, где $F(x)$ – дифференцируемая функция;

2) $\int \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – интегрируемые функции (аддитивность неопределенного интеграла);

3) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx$, где $\alpha = Const$ и $f(x)$ – интегрируемая функция (однородность неопределенного интеграла);

4) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$ (инвариантность неопределенного интеграла относительно выбора переменной).

Таблица неопределенных интегралов:

	Интегралы относительно независимой переменной x	Интегралы относительно зависимой переменной $u = u(x)$ (дифференцируемая функция)
1.	$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
2.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \;\; (\alpha = Const \neq -1)$, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \;\; (\alpha = Const \neq -1)$, $\int u du = \frac{u^2}{2} + C$, $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$, $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a = Const, a > 0,\; a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ $(a = Const, a > 0,\; a \neq 1)$, $\int e^u du = e^u + C$
5.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$, $\int \cos u\, du = \sin u + C$, $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}u + C$, $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}u + C$
6.	$\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$, $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$, $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$, $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C$	$\int \mathrm{sh}\, u\, du = \mathrm{ch}\, u + C$, $\int \mathrm{ch}\, u\, du = \mathrm{sh}\, u + C$, $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}u + C$, $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth}u + C$
7.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ $(a = Const > 0)$	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$, $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$, $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$, $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ $(a = Const > 0)$
8.	$\int \frac{xdx}{x^2\pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2 \pm a^2\rvert + C$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$ $(a = Const > 0)$	$\int \frac{udu}{u^2\pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\lvert u^2 \pm a^2\rvert + C$, $\int \frac{udu}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sqrt{a^2 - u^2} + C$, $\int \frac{udu}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \sqrt{u^2 \pm a^2} + C$ $(a = Const > 0)$

Пример 2.1.1. $\int \frac{(5x^{12}+4x^2-2\sqrt[3]{x}+3-x^2e^x)dx}{x^2} = \int (5x^{10} + 4 - 2x^{-5/6} + \frac{3}{x^2} - e^x)dx =$

$\boxed{\text{\textit{применим свойства аддитивности и однородности неопределенного интеграла}}}$

$= 5\int x^{10}dx + 4\int dx - 2\int x^{-5/6}dx + 3\int \frac{dx}{x^2} - \int e^x dx =$

воспользуемся таблицей неопределенных интегралов (п.1,2,4)

$= 5\frac{x^{11}}{11} + 4x - 2\frac{x^{1/6}}{1/6} + 3\left(-\frac{1}{x}\right) - e^x + C = \frac{5}{11}x^{11} + 4x - 12\sqrt[6]{x} - \frac{3}{x} - e^x + C.$

Пример 2.1.2. $\int \frac{dx}{x^2+10x+41} =$

выделим полный квадрат в знаменателе

$= \int \frac{dx}{(x+5)^2+16} = \int \frac{d(x+5)}{(x+5)^2+4^2} =$

воспользуемся таблицей неопределенных интегралов (п.7),
полагая $u = x + 5$ *и* $a = 4$

$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{4} + C.$

Пример 2.1.3. $\int \sin^2 x\, dx =$

воспользуемся формулами понижения степени

$= \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)dx =$

применим свойства аддитивности и однородности неопределенного интеграла

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x) =$

воспользуемся таблицей неопределенных интегралов (п.1,5),
полагая $u = 2x$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2.2. Метод замены переменной в неопределенных интегралах

Наиболее распространенным приемом при интегрировании является метод замены переменной (или подстановки) в неопределенном интеграле:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int f(u)du,$$

где $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция.

Этот метод позволяет сводить интегралы с довольно громоздкими подынтегральными выражениями к табличным или уже известным.

Пример 2.2.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,(1-\operatorname{ctg} x)} = \int \frac{1}{1-\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} =$

сделаем замену переменной $u = 1 - \operatorname{ctg} x \implies du = \frac{dx}{\sin^2 x}$

$= \int \frac{1}{u}du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1 - \operatorname{ctg} x| + C.$

Пример 2.2.2. $\int (2x-3)^{21}\, x\, dx =$

сделаем замену переменной $u = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{u+3}{2}, dx = \frac{du}{2}$

$= \int u^{21} \cdot \frac{u+3}{2} \cdot \frac{du}{2} = \int \left(\frac{1}{4}u^{22} + \frac{3}{4}u^{21}\right) du = \frac{1}{4}\int u^{22}\, du + \frac{3}{4}\int u^{21} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{23}}{23} + \frac{3}{4} \cdot \frac{u^{22}}{22} + C =$
$= \frac{1}{92}(2x-3)^{23} + \frac{3}{88}(2x-3)^{22} + C.$

2.3. Метод интегрирования по частям

Вторым важнейшим приемом интегрирования является метод интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu\ ,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Наиболее распространены два канонических случая интегрирования по частям.

Случай 1. Интегралы вида $\int x^n \varphi(x) dx$, где n – натуральное число, а $\varphi(x)$ – табличная интегрируемая функция a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ или $\operatorname{ch} x$.

В этом случае следует положить $u = x^n$, а $dv = \varphi(x)dx$ и интегрировать по частям n раз.

Метод будет действовать и в более сложном случае, если x^n заменить на многочлен степени n, а $\varphi(x)$ – на функцию $\varphi(kx+b)$.

Случай 2. Интегралы вида $\int x^n \psi(x) dx$, где n – целое число и $n \neq -1$, а $\psi(x)$ – логарифм или обратная тригонометрическая функция: $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

В этом случае следует положить $u = \psi(x)$, а $dv = x^n dx$.

В некоторых случаях метод будет действовать и для $n = m + \frac{1}{2}$, где m – целое число.

Пример 2.3.1. $\int x^2 e^x dx =$

Интеграл относится к случаю 1:		
$u = x^2$	$\Rightarrow$	$du = (x^2)' dx = 2xdx$
$dv = e^x dx$	$\Rightarrow$	$v = \int dv = \int e^x dx = e^x$

$= x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx =$

Новый интеграл снова относится к случаю 1:		
$u = x$	$\Rightarrow$	$du = dx$
$dv = e^x dx$	$\Rightarrow$	$v = \int dv = \int e^x dx = e^x$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

Пример 2.3.2. $\int (4x+5) \sin 2x\, dx =$

Интеграл относится к случаю 1:		
$u = 4x + 5$	$\Rightarrow$	$du = (4x+5)' dx = 4dx$
$dv = \sin 2x\, dx$	$\Rightarrow$	$v = \int dv = \int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$= -\frac{1}{2}(4x+5)\cos 2x - \int(-\frac{1}{2}\cos 2x) 4dx = -\frac{1}{2}(4x+5)\cos 2x + \int \cos 2x\, d(2x) =$
$= -\frac{1}{2}(4x+5)\cos 2x + \sin 2x + C.$

Пример 2.3.3. $\int x^3 \ln x dx =$

Интеграл относится к случаю 2:		
$u = \ln x$	$\Rightarrow$	$du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$
$dv = x^3 dx$	$\Rightarrow$	$v = \int dv = \int x^3 dx = x^4/4$

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$.

Пример 2.3.4. $\int \arcsin x \, dx =$

Интеграл относится к случаю 2 при $n = 0$:		
$u = \arcsin x$	$\Rightarrow$	$du = (\arcsin x)' dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$dv = dx$	$\Rightarrow$	$v = \int dv = \int dx = x$

$= x \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

2.4. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов одной или нескольких переменных. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то рациональная функция называется правильной, в противном случае – неправильной.

Все многочлены являются частным случаем неправильных рациональных функций.

Важными примерами правильных рациональных функций являются простейшие дроби: $\frac{A}{(x-1)^r}$ и $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}$ (где r – натуральное число и $b^2 - 4ac < 0$).

В основе интегрирования рациональных функций одной переменной лежат две теоремы.

Теорема 2.4.1. Всякую неправильную рациональную функцию одной переменной можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции.

На практике в общем случае это делают с помощью алгоритма деления многочленов.

Теорема 2.4.2. Всякую правильную рациональную функцию одной переменной можно представить в виде суммы простейших дробей.

На практике для этого применяется метод неопределенных коэффициентов.

Пример 2.4.1. Найти интеграл $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$.

Под знаком интеграла стоит правильная рациональная функция $R(x) = \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$. Ее можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4},$$

где A, B и C – некоторые числа (неопределенные коэффициенты), которые необходимо найти. Если последнее равенство умножить на знаменатель функции $R(x)$, то мы получим тождество (равенство, которое выполняется для любых значений x):

$$2x^2 + 41x - 91 \equiv A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3),$$

Присваивая переменной x значения корней знаменателя функции $R(x)$, мы найдем A, B и C:

если $x = 1$, то $-48 = -12A \Rightarrow A = 4$,
если $x = -3$, то $-196 = 28B \Rightarrow B = -7$,
если $x = 4$, то $105 = 21C \Rightarrow C = 5$.

Тогда $R(x) = \frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}$, и мы можем найти ее интеграл:

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx = \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}\right) dx = 4\int \frac{d(x-1)}{x-1} - 7\int \frac{d(x+3)}{x+3} + 5\int \frac{d(x-4)}{x-4} =$$

$$= 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C.$$

Пример 2.4.2. Найти интеграл $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$.

Подынтегральная функция является правильной рациональной функцией. Разложим ее на простейшие дроби:

$$R(x) = \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$

Умножим равенство на знаменатель функции $R(x)$:

$$5x^2 + 6x + 9 \equiv A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-3)^2(x+1) + D(x-3)^2. \quad (2.4.1)$$

Присвоим переменной x значения корней знаменателя функции $R(x)$:

если $x = 3$, то $72 = 16B \Rightarrow B = \frac{9}{2}$,

если $x = -1$, то $8 = 16D \Rightarrow D = \frac{1}{2}$.

Присвоим $x = 0$:

$$9 = -3A + B + 9C + 9D \;\Rightarrow\; 9 = -3A + \frac{9}{2} + 9C + \frac{9}{2} \;\Rightarrow$$

$$A - 3C = 0. \quad (2.4.2)$$

Требуется еще одно уравнение для A и C. Его можно получить, присвоив переменной x еще одно значение. Однако проще воспользоваться другим приемом: если правую часть тождества (2.4.1) перегруппировать по степеням переменной x, то коэффициенты левой части должны совпадать с соответствующими коэффициентами правой части. В том числе при x^3:

$$0 = A + C. \quad (2.4.3)$$

Из системы уравнений (2.4.2) и (2.4.3) следует, что $A = C = 0$.

Таким образом, $R(x) = \frac{9/2}{(x-3)^2} + \frac{1/2}{(x+1)^2}$, и мы находим интеграл этой функции:

$$\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx = \frac{9}{2}\int \frac{1}{(x-3)^2} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{9}{2}\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

Пример 2.4.3. Найти $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)} dx$.

Подынтегральная функция $R(x) = \frac{x^3+1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+1}{x^3+x}$ является неправильной рациональной функцией. Необходимо выполнить деление с остатком:

$$R(x) = \frac{x^3+x-x+1}{x^3+x} = 1 + \frac{1-x}{x^3+x}.$$

Функция $R_0(x) = \frac{1-x}{x^3+x}$ является правильной рациональной функцией. Разложим ее на простейшие дроби:

$$R_0(x) = \frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Умножим равенство на знаменатель функции $R_0(x)$:

$$1 - x \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

В правой части раскроем скобки и перегруппируем ее по степеням переменной x:

$$1 - x \equiv (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Приравняем коэффициенты левой и правой части:

при x^2: $0 = A + B$,

при x^1: $-1 = C$,

при x^0: $1 = A$.

Отсюда получаем, что $A = 1$, $B = C = -1$. Тогда $R(x) = 1 + R_0(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{-x-1}{x^2+1}$, и мы находим интеграл функции $R(x)$:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)} dx = \int (1 + \frac{1}{x} + \frac{-x-1}{x^2+1}) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C.$$

2.5. Интегрирование тригонометрических функций

Для нахождения интегралов тригонометрических функций применяются различные подстановки (замена переменной) и тригонометрические тождества.

1. Все интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(t_1, t_2)$ – некоторая рациональная функция, сводятся к интегралу рациональной функции аргумента t с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

При этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Однако во многих частных случаях проще применять другие подстановки:

1) Если $R(-t_1, -t_2) = R(t_1, t_2)$, то для вычисления интеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ применяют полууниверсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg} x.$$

При этом $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

2) Для вычисления интеграла $\int R(\sin x)\cos x\, dx$ применяют подстановку $t = \sin x$.

3) Для вычисления интеграла $\int R\,(\cos x)\sin x\, dx$ применяют подстановку $t = \cos x$.

4) При вычислении $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$ возможны следующие случаи:

a) если m – нечётное число, то применяется подстановка $t = \cos x$,

b) если n – нечётное число, то применяется подстановка $t = \sin x$,

c) если m и n – чётные неотрицательные числа, то применяют формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

d) если m и n – чётные числа и хотя бы одно из них отрицательно, то применяется полууниверсальная подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

2. Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Пример 2.5.1. $\int \sin 3x \cdot \cos 4x \cdot \cos 5x \cdot dx = \int \sin 3x \cdot \frac{1}{2}(\cos x + \cos 9x)\cdot dx =$
$= \int \frac{1}{2}(\sin 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \cos 9x)dx = \int \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x + \sin(-6x) + \sin 12x)dx =$
$= \frac{1}{8}\int \sin 2x\, d(2x) + \frac{1}{16}\int \sin 4x\, d(4x) - \frac{1}{24}\int \sin 6x\, d(6x) + \frac{1}{48}\int \sin 12x\, d(12x) =$
$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{48}\cos 12x + C.$

Пример 2.5.2. $\int \sin^3\frac{x}{3} \cdot \cos^2\frac{x}{3} \cdot dx =$

Подстановка $t = \cos\frac{x}{3} \implies \sin^2\frac{x}{3} = 1 - t^2,\ dt = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\cdot dx,\ dx = -\frac{3dt}{\sin\frac{x}{3}}$

$$= \int \sin^3\frac{x}{3}\cdot t^2\cdot\left(-\frac{3dt}{\sin\frac{x}{3}}\right) = -3\int \sin^2\frac{x}{3}\cdot t^2\cdot dt = -3\int(1-t^2)\cdot t^2\cdot dt = -3\int(t^2-t^4)\,dt =$$

$$= -3\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)+C = -\cos^3\frac{x}{3}+\frac{3}{5}\cos^5\frac{x}{3}+C.$$

Пример 2.5.3. $\int\frac{dx}{2\sin x+2\cos x+1} =$

Универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ \Longrightarrow$ $\Longrightarrow\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$= \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} = \int\frac{2dt}{4t+2-2t^2+1+t^2} = -2\int\frac{dt}{t^2-4t-3} = -2\int\frac{dt}{(t-2)^2-7} = -2\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-2-\sqrt{7}}{t-2+\sqrt{7}}\right|+C = -\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2-\sqrt{7}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2+\sqrt{7}}\right|+C.$$

Пример 2.5.4. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x} =$

Подынтегральная функция $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)\ \Longrightarrow$ полууниверсальная подстановка $t=\operatorname{tg}x\ \Longrightarrow$ $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$= \int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^2}-2\frac{1}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t^2+t-2} = \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+2}\right|+C.$$

2.6. Интегрирование иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ приводятся к интегралам рациональных функций путем подстановки $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где n – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

2. Для нахождения интегралов функций, содержащих выражения $\sqrt{c\pm x^2}$ часто применяют следующие тригонометрические или гиперболические подстановки:

1) если в подынтегральную функцию входит выражение вида $\sqrt{a^2+x^2}$, то применяют подстановки $x=a\operatorname{tg}t$, $x=a\operatorname{ctg}t$ или $x=a\operatorname{sh}t$,

2) если в подынтегральную функцию входит выражение вида $\sqrt{a^2-x^2}$, то применяют подстановки $x=a\sin t$, $x=a\cos t$ или $x=a\operatorname{th}t$,

3) если в подынтегральную функцию входит выражение вида $\sqrt{x^2-a^2}$, то применяют подстановки $x=a\sec t$, $x=a\operatorname{cosec}t$ или $x=a\operatorname{ch}t$.

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ сводятся к перечисленным выше типам выделением полного квадрата в подкоренном выражении $ax^2+bx+c=a(x+\omega)^2+m$ и подстановкой $t=x+\omega$.

Пример 2.6.1. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx =$

$$\boxed{\text{Подстановка } t = \sqrt[6]{x} \implies x = t^6,\, dx = 6t^5 dt}$$

$$= \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1} dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t\right) + C = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 2.6.2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}} =$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Подстановка } x = \sqrt{5}\sin t \implies \\ dx = \sqrt{5}\cos t\, dt,\ \left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2 = 5 - 5\sin^2 t = 5(1 - \sin^2 t) = 5\cos^2 t\end{array}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}\cos t dt}{5\sin^2 t \cdot \sqrt{5\cos^2 t}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + C = -\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2/5}}{x/\sqrt{5}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C.$$

РАЗДЕЛ 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Изучаемые вопросы

3.1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
3.2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3.3. Необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Достаточное условие интегрируемости функции на отрезке.
3.4. Простейшие свойства интеграла. Интегральная теорема о среднем.
3.5. Определённый интеграл с переменным верхним пределом.
3.6. Формула Ньютона-Лейбница.
3.7. Замена переменной в определенном интеграле.
3.8. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
3.9. Геометрические приложения определенного интеграла.
3.10. Несобственные интегралы.

3.1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Разобъём отрезок $[a, b]$на n частей точками x_i $(i = 0, 1, 2, \ \dots \ , n)$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ \dots \ , n)$. Наибольшее из чисел Δx_i назовем мелкостью разбиения и обозначим λ. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i и вычислим в ней значение функции $f(\xi_i)$ (рис.4). Затем составим интегральную сумму

$$\sigma_f = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \, .$$

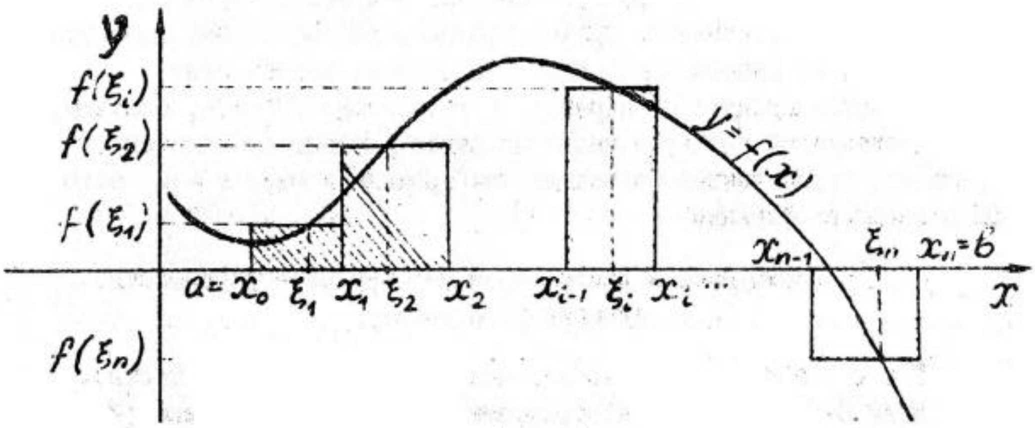

Рис. 4

Если существует конечный предел $\lim_{\lambda \to 0} \sigma_f$, не зависящий от способов выбора точек x_i и ξ_i, то этот предел называется определённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а функция $f(x)$ – интегрируемой (или суммируемой) на отрезке $[a, b]$. Определённый интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обозначают

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно.

Замечание. Мы ввели понятие определённого интеграла для случая $a < b$. В случае $a > b$ положим по определению $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

В случае $a = b$ примем по определению $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$.

3.3. Необходимое условие интегрируемости функции на отрезке. Достаточное условие интегрируемости функции на отрезке

Теорема 3.3.1 (*Необходимое условие интегрируемости*). Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 3.3.2 (*Достаточное условие интегрируемости*). Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

3.4. Простейшие свойства определенного интеграла. Интегральная теорема о среднем

Простейшие свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b dx = b - a$.
2. *Аддитивность*: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
3. *Однородность*: Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то
$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \quad (A = \text{const}).$$
4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
5. Если функция $f(x)$ интегрируема и $m \leq f(x) \leq M$ на отрезке $[a, b]$, то
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$
6. Если $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема 3.4.1 (*Интегральная теорема о среднем*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка ξ из интервала (a, b), что
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

В условиях теоремы 3.4.1 значение $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3.5. Определённый интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по теореме 3.3.2 на отрезке $[a, b]$ определена функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, которая называется определённым интегралом с переменным верхним пределом. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5.1. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, то
$$F'(x) = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Замечание. Теорема 3.5.1 говорит о том, что определённый интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных подынтегральной функции.

3.6. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.6.1. Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Данная формула называется формулой Ньютона-Лейбница. Она позволяет вычислить определённый интеграл с помощью неопределённого интеграла.

Пример 3.6.1. $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$.

3.7. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть на отрезке $[a,b]$ выполнены следующие условия:

1) функция $u = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема,

2) $\varphi'(x) \neq 0$.

Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Замечание. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к исходной переменной, как это делалось при вычислении неопределенного интеграла, надо лишь обратить внимание на нахождение новых пределов интегрирования для новой переменной.

Пример 3.7.1. $\int_1^e \sin\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right)\frac{dx}{x} =$

сделаем замену переменной $u = \frac{\pi}{2}\ln x \Longrightarrow\ du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{dx}{x} \Longrightarrow\ \frac{dx}{x} = \frac{2du}{\pi}$,
новые пределы интегрирования: нижний $u_1 = \frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$, *верхний* $u_2 = \frac{\pi}{2}\ln e = \frac{\pi}{2}$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin u \cdot \frac{2du}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin u \cdot du = -\frac{2}{\pi}\cos u\,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{2}{\pi}(0-1) = \frac{2}{\pi}.$$

3.8. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 3.8.1. $\int_1^e x^2 \ln x\, dx =$

Применим интегрирование по частям:
$u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$
$dv = x^2 dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2e^3+1).$$

3.9. Геометрические приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно находить площади плоских областей, длины дуг плоских кривых, вычислять объем и площадь поверхности вращения. Для решения задач такого типа необходимо выполнить грамотный чертеж фигуры или тела.

3.9.1. Вычисление площади плоской области в декартовых координатах

Для вычисления площади плоской области в декартовой системе координат применяется известная формула для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком неотрицательной непрерывной или кусочно-непрерывной функции $y = f(x)$ (рис.5):

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

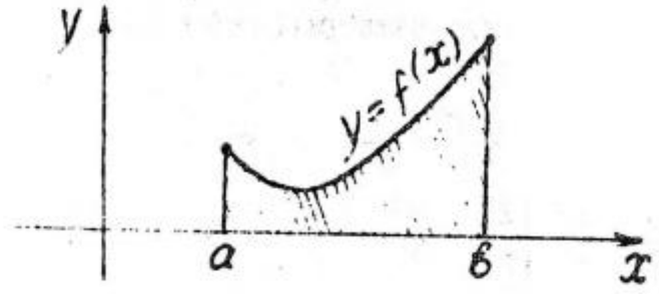

Рис. 5

Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a, b]$ (рис.6), то $S = -\int_a^b f(x)dx$.

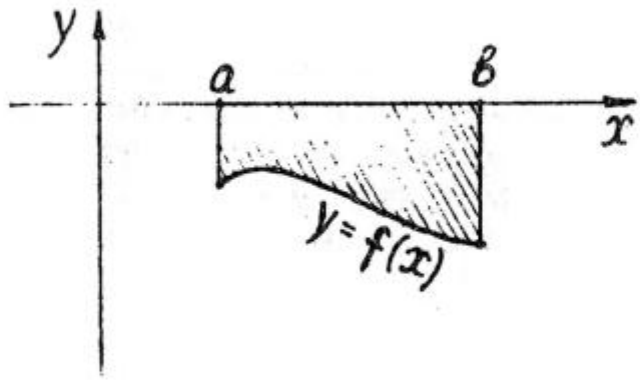

Рис. 6

В более общем случае, если криволинейная трапеция ограничена вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками двух непрерывных или кусочно-непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис.7), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

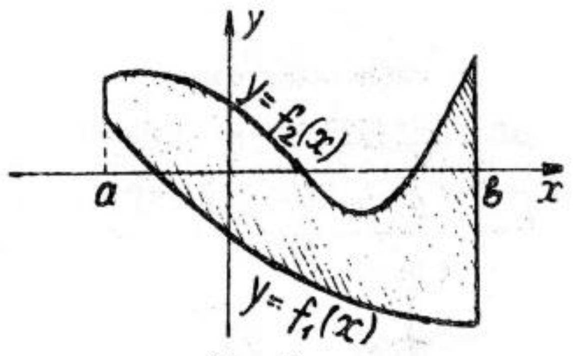

Рис. 7

Пример 3.9.1. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 2x$.

Решение. Построим графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 2x$. Определим точки пересечения этих линий:

$$x^2 - 4 = -x^2 + 2x,$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0,$$
$$x^2 - x - 2 = 0,$$
$$x_1 = -1, x_2 = 2,$$
$$y_1 = -3, y_2 = 0.$$

Изобразим линии на рисунке (рис.8):

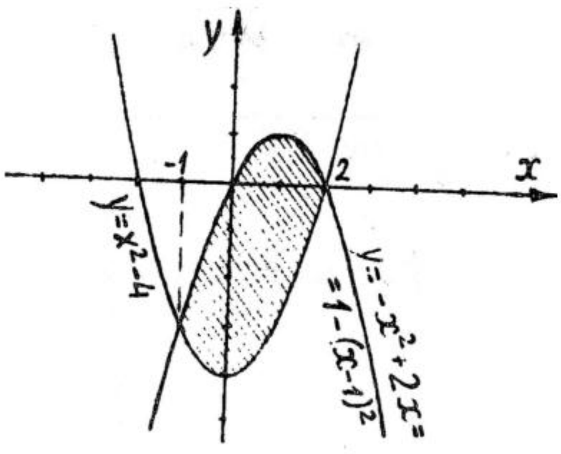

Рис. 8

Вычислим площадь:

$S = \int_{-1}^{2}((-x^2 + 2x) - (x^2 - 4))dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx =$

$= -\frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + x^2\Big|_{-1}^{2} + 4x\Big|_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 4 - 1 + 8 + 4 = 9$ (кв. ед.).

3.9.2. Вычисление площади плоской области в полярных координатах

Для вычисления площади плоской области в полярной системе координат (φ, ρ) за основу берется формула площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = f(\varphi)$, где функция $f(\varphi)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ (рис.9):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\varphi))^2 d\varphi.$$

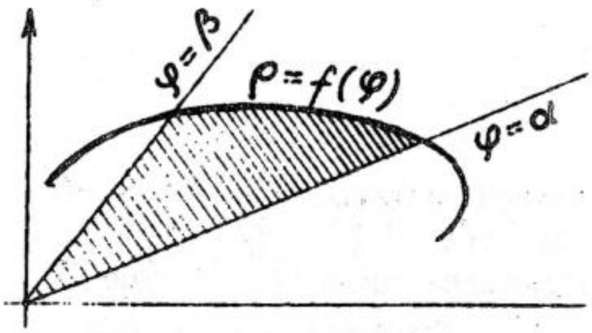

Рис. 9

В более общем случае (рис.10) применяется формула

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}((f_2(\varphi))^2-(f_1(\varphi))^2)d\varphi.$$

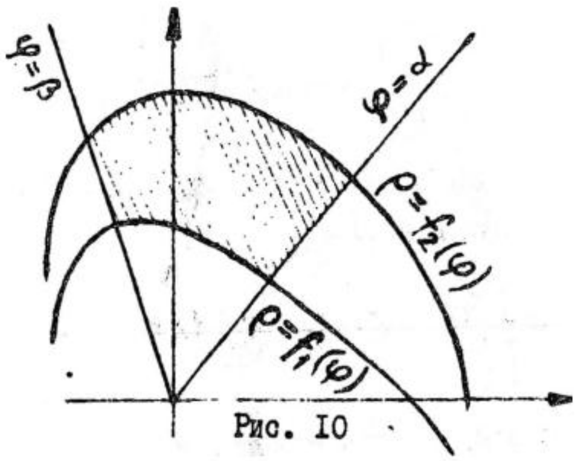

Рис. 10

Пример **3.9.2.** Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската Бернулли).

Решение. Построим чертёж (рис.11):

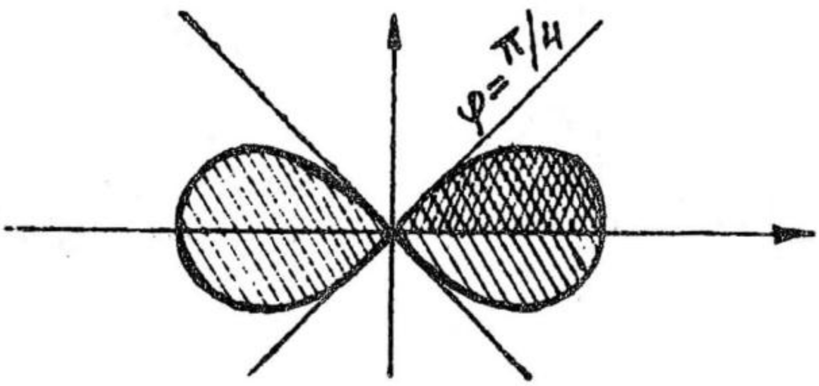

Рис. 11

Вычислим $\frac{1}{4}$ часть площади, находящуюся в секторе $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$:

$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2d\varphi=\frac{1}{4}a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\, d(2\varphi)=\frac{1}{4}a^2\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=$

$= \frac{1}{4} a^2$ (кв.ед.).
Тогда вся площадь $S = a^2$ (кв.ед.).

3.9.3. Вычисление площади плоской области, ограниченной параметризованной кривой

Пусть плоская область ограничена замкнутой непрерывной кривой, не имеющей самопересечений и заданной параметрическими уравнениями: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, где $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ и функции $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ непрерывны или кусочно-непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь области вычисляется по формулам:

$$S = \left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)\psi'(t)dt\right| = \left|\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\psi(t)dt\right|.$$

Пример 3.9.3. Найти площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0$, $b > 0)$.

Решение. Уравнение кривой является каноническим уравнением эллипса с полуосями a и b. Заметим, что этому уравнению удовлетворяют $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. При изменении t от 0 до 2π точка (x, y) совершает ровно один оборот по кривой. Таким образом, мы получили параметрические уравнения данного эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$. Площадь, ограниченная этим эллипсом, будет равна

$$S = \left|\int_0^{2\pi} a\cos t\,(b\sin t)'dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} a\cos t\, b\cos t\,dt\right| = ab\left|\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt\right| =$$

$$= \frac{ab}{2}\left|\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)dt\right| = \frac{ab}{2}\left|\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,d(2t)\right| = \frac{ab}{2}\left|\ t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\ \right| =$$

$$= \frac{ab}{2}\left|\ 2\pi - 0 + \frac{1}{2}(\sin 4\pi - \sin 0)\right| = \pi ab.$$

3.9.4. Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах

Длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Пример 3.9.4. Найти длину дуги кривой $y = x^{3/2}$ на отрезке $[0; 1]$ (рис.13).

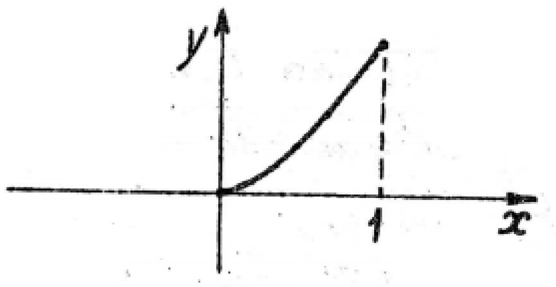

Рис. 13

Решение. У нас $f(x) = x^{3/2}$, откуда $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Поэтому

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (\tfrac{3}{2}x^{1/2})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right).$$

3.9.5. Вычисление длины дуги плоской кривой в полярных координатах

Длина дуги кривой, заданной уравнением $\rho = f(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$ и функция $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример 3.9.5. Найти длину кардиоиды $r = a(1 - cos\,\varphi)$, где $a = \text{const} > 0$ (рис.14).

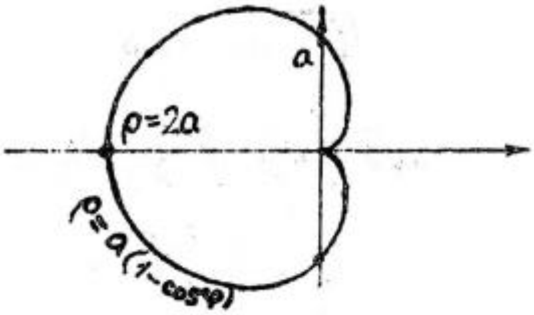

Рис. I4

Решение. Один оборот по кривой происходит при изменении φ от 0 до π. Поэтому

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos\varphi))^2 + ((a(1-\cos\varphi))')^2}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$

$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi =$

$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$

$= 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$

3.9.6. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданой параметрически

Пусть кривая задана параметричекими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

Пример 3.9.6. Найти длину первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где $a = \text{const} > 0$ (рис.15).

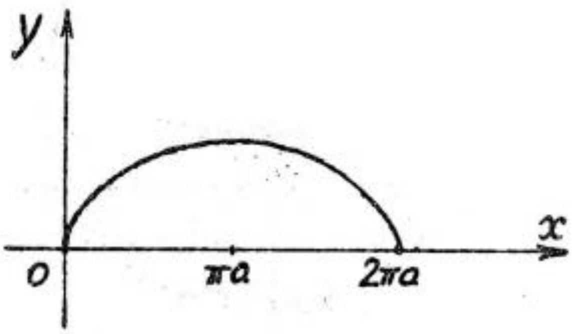

Рис. I5

Решение. Для первой арки циклоиды $t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left((a(t-\sin t))'\right)^2 + \left((a(1-\cos t))'\right)^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt =$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a+4a = 8a.$$

3.9.7. Вычисление объёмов тел вращения

Пусть тело получено вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, осью *Ox* и графиком непрерывной или кусочно-непрерывной функции $y = f(x)$ (рис.16). Тогда объём этого тела вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

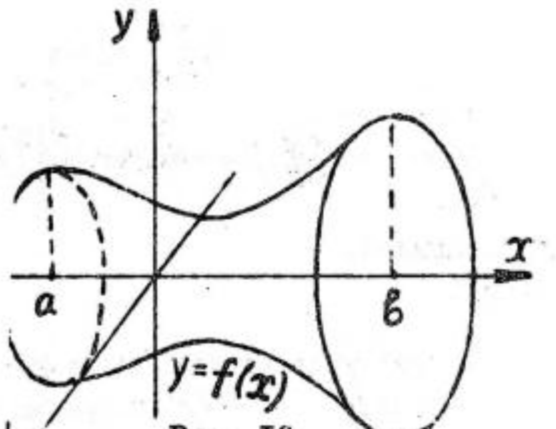

Рис. 16

Если же тело получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = a, y = b$ $(a < b)$, осью *Oy* и графиком непрерывной или кусочно-непрерывной функции $x = f(y)$ (рис.17), то объём этого тела вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dy.$$

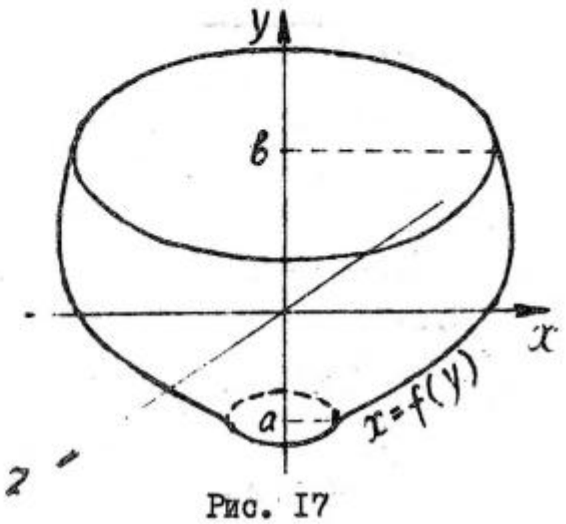

Рис. 17

Пример 3.9.7. Плоская область, ограниченная кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, вращается вокруг оси *Ox*. Определить объём тела вращения (рис.18).

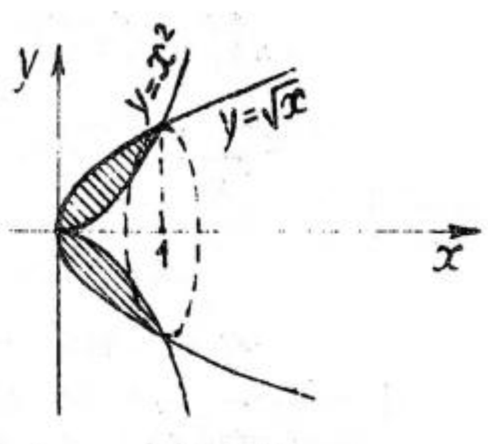

Рис. 18

Решение. Для нахождения требуемого объёма вычтем из объёма тела, образованного вращением кривой $y = \sqrt{x}$ вокруг отрезка $[0; 1]$, объём тела, образованного вращением кривой $y = x^2$ вокруг отрезка $[0; 1]$:

$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 =$
$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$ (куб.ед.).

3.9.8. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Тогда площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вокруг оси *Ox* (рис.15) вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Пример 3.9.8. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = ch\, x$ вокруг отрезка $[0; \pi]$ оси *Ox* (рис.19).

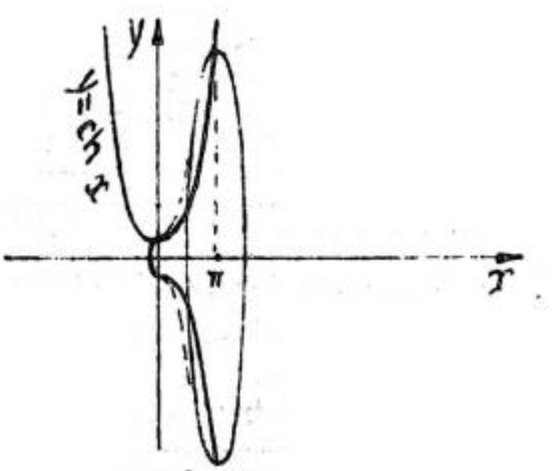

Рис. 19

Решение. Напомним основное гиперболическое тождество $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ и формулы понижения степени: $\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2x + 1)$, $\mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2x - 1)$. Тогда

$S = 2\pi \int_0^\pi \operatorname{ch} x \sqrt{1 + ((\operatorname{ch} x)')^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = 2\pi \int_0^\pi \operatorname{ch}^2 x \, dx =$
$= 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \operatorname{ch} 2x \, d(2x) + \pi \int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} 2x \Big|_0^\pi + \pi x \Big|_0^\pi =$
$= \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} 2\pi + \pi^2$ (кв.ед.).

3.10. Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ был введен для конечного отрезка $[a, b]$. При этом в случае разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определенный интеграл может не существовать. Если нарушено условие конечности отрезка $[a, b]$ или функция $f(x)$ терпит разрыв на этом отрезке, то требуется более общее определение интеграла, и такой интеграл называется несобственным. Если нарушено условие конечности границ отрезка $[a, b]$, то получим интеграл с бесконечными пределами интегрирования (несобственный интеграл 1 рода), если же нарушено условие непрерывности функции на отрезке $[a, b]$, то получим интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл 2 рода).

3.10.1. Несобственные интегралы 1 рода (с бесконечными пределами интегрирования)

Определение. Несобственными интегралами 1 рода называются интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Пример 3.10.1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_2^b =$
$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$
Таким образом, несобственный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{8}$.

Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что

a) при $p > 1$ несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится и равен $\frac{1}{p-1}$;
b) при $p \leq 1$ несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится.

3.10.2. Несобственный интеграл 2 рода (от разрывной функции)

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, за исключением точки c ($a < c < b$), в которой $f(x)$ имеет разрыв. Тогда несобственным интегралом 2 рода функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \delta \to +0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right).$$

Если $c = a$, то несобственный интеграл 2 рода определяется как

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \to +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx,$$

а если $c = b$, то несобственный интеграл 2 рода определяется как

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Пример 3.10.2. $\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\delta\to+0} \int_{2+\delta}^5 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\delta\to+0} \int_{2+\delta}^5 (x-2)^{-3} dx =$
$= \lim_{\delta\to+0} (x-2)^{-2} \Big|_{2+\delta}^5 = \lim_{\delta\to+0} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{\delta^2}\right) = -\infty.$
Таким образом, несобственный интеграл расходится.

Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что

a) при $p < 1$ несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится и равен $\frac{1}{1-p}$;

b) при $p \geq 1$ несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ расходится.

РАЗДЕЛ 4. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Изучаемые вопросы

4.1. Двойной интеграл как предел интегральных сумм по прямоугольной области.
4.2. Двойной интеграл по измеримой области.
4.3. Геометрический смысл двойного интеграла.
4.4. Необходимое условие существования двойного интеграла. Достаточное условие существования двойного интеграла.
4.5. Простейшие свойства двойного интеграла.
4.6. Повторное интегрирование.
4.7. Двойной интеграл в полярных координатах.

4.1. Двойной интеграл как предел интегральных сумм по прямоугольной области

Пусть функция $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Разобъём отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ точками x_i $(i = 0, 1, 2, \dots, m)$ и y_j $(j = 0, 1, 2, \dots, n)$ соответственно:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d.$$

и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Наибольшее из чисел Δx_i, Δy_j назовем мелкостью разбиения и обозначим λ. На каждом из прямоугольников $\Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right]$ $(i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n)$ выберем произвольно точку M_{ij} и вычислим в ней значение функции $f\left(M_{ij}\right)$. Затем составим интегральную сумму

$$\sigma_f = \sum_{i,j=1}^{m,n} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j .$$

Если существует конечный предел $\lim_{\lambda \to 0} \sigma_f$, не зависящий от способов выбора точек x_i, y_j и M_{ij}, то этот предел называется двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области Π, а функция $f(x,y)$ – интегрируемой (или суммируемой) по области Π. Двойной интеграл функции $f(x,y)$ по области Π обозначают

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy.$$

4.2. Двойной интеграл по измеримой области

Пусть D – ограниченное множество на плоскости Oxy, у которого определена площадь S_D. В этом случае множество D называют измеримым по Жордану. Пусть на множестве D определена функция $f(x,y)$. Так как множество D ограничено, то оно содержится в некотором прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$. Доопределим функцию $f(x,y)$ в тех точках, которые принадлежат Π и не принадлежат D, нулевыми значениями: если $(x,y) \in \Pi$ и $(x,y) \notin D$, то $f(x,y) = 0$. Тогда двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области D называется

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Pi} f(x,y)dxdy.$$

Если данный интеграл существует, то функция $f(x,y)$ называется интегрируемой (или суммируемой) по области D.

4.3. Геометрический смысл двойного интеграла

Если $f(x,y) \ge 0$ на области D, то двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ численно равен объему цилиндрического тела, определяемого условиями $(x,y) \in D$, $0 \le z \le f(x,y)$.

4.4. Необходимое условие существования двойного интеграла. Достаточное условие существования двойного интеграла

Теорема 4.4.1 (*Необходимое условие интегрируемости*). Если функция $f(x, y)$ интегрируема по области D, то она ограничена на области D.

Теорема 4.4.2 (*Достаточное условие интегрируемости*). Если измеримое множество D содержит свою границу и функция $f(x, y)$ непрерывна на D, то она интегрируема по области D.

4.5. Простейшие свойства двойного интеграла

Простейшие свойства двойного интеграла:

1. $\iint_D dxdy = S_D$.
2. *Аддитивность*: Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по области D, то
$$\iint_D \big(f(x,y) + g(x,y)\big)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy.$$
3. *Однородность*: Если функция $f(x, y)$ интегрируема по области D, то
$$\iint_D Af(x,y)dxdy = A\iint_D f(x,y)dxdy \quad (A = \text{const}).$$
4. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы и $f(x, y) \le g(x, y)$ на области D, то
$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy.$$
5. Если функция $f(x, y)$ интегрируема и $m \le f(x, y) \le M$ на области D, то
$$mS_D \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS_D.$$
6. Если D_1 и D_2 – измеримые множества и функция $f(x, y)$ интегрируема по областям D_1 и D_2, то $f(x, y)$ интегрируема по области D и
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4.6. Повторное интегрирование

Повторное интегрирование является основным средством нахождения двойных интегралов и состоит в последовательном нахождении двух интегралов функций одной переменной.

Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $\Pi = [a, b] \times [c, d]$. Рассмотрим две функции $F_1(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ $(a \le x \le b)$ и $F_2(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ $(c \le y \le d)$. Повторными интегралами функции $f(x, y)$ называются
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^b F_1(x)dx$$
и
$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_c^d F_2(y)dy.$$

Теорема 4.6 (*Теорема Фубини*). Если функция $f(x, y)$ интегрируема по прямоугольной области $\Pi = [a, b] \times [c, d]$, то существуют оба повторных интеграла и
$$\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Двойные интегралы по криволинейным трапециям также можно вычислить с помощью повторных интегралов:

а) если область D определяется условиями $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b F_1(x)dx\,,$$

где $F_1(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\ (a \le x \le b)$,

b) если область D определяется условиями $c \le y \le d$, $\varphi(y) \le x \le \psi(y)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int_c^d F_2(y)dy\,,$$

где $F_2(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\ (c \le y \le d)$.

Пример 4.6.1. Вычислить $\iint_D x^2ydxdy$, где область интегрирования D ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$:

$$x^2 = 1,$$
$$x_1 = -1,\, x_2 = 1,$$
$$y_1 = 1,\quad y_2 = 1.$$

Изобразим множество D на плоскости Oxy (рис.25):

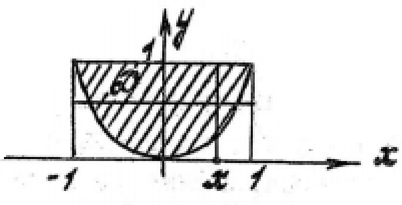

Рис. 25

Множество D определяется условиями $-1 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$ и является криволинейной трапецией (случай а). Тогда

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2y\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 x^2y\,dy\right)dx = \int_{-1}^1 x^2\left(\int_{x^2}^1 ydy\right)dx =$$
$$= \int_{-1}^1 x^2\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=1}\right)dx = \int_{-1}^1 x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x^2 - x^6)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{21}.$$

Пример 4.6.2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{4x} f(x,y)\,dy.$$

Область интегрирования изобразить на рисунке.

Решение. Пусть D – область интегрирования. По границам интегрирования в повторном интеграле запишем условия, определяющие область D: $0 \le x \le 1$, $\frac{x}{2} \le y \le 4x$. Область D является криволинейной трапецией, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = \frac{x}{2}$ и $y = 4x$. Изобразим область D на рисунке (рис.29):

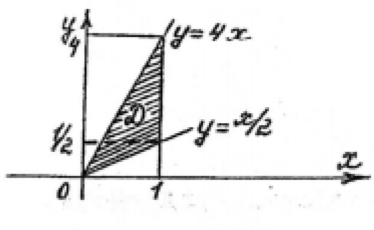

Рис. 29

Прямая $y=\frac{1}{2}$ разбивает область D на две области

$$D_1:\quad 0\le y\le \frac{1}{2},\ \frac{y}{4}\le x\le 2y$$

и

$$D_2:\quad \frac{1}{2}\le y\le 4,\ \frac{y}{4}\le x\le 1.$$

Тогда

$$\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{4x} f(x,y)\,dy=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=$$
$$=\int_0^{1/2} dy\int_{y/4}^{2y} f(x,y)\,dx+\int_{1/2}^{4} dy\int_{y/4}^{1} f(x,y)\,dx.$$

4.7. Двойной интеграл в полярных координатах

На плоскости часто используется переход от декартовых координат x, y к полярным координатам φ, r по правилам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $dxdy=rd\varphi dr$ (рис.1).

Пусть дан двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$, где область интегрирования D определена условиями в полярных координатах:

$$\alpha\le\varphi\le\beta,\ H(\varphi)\le r\le R(\varphi), \qquad (4.7.1)$$

т.е. D представляет из себя разность криволинейных секторов (рис.31). Если φ и r рассматривать как декартовы координаты, то те же самые условия (4.7) определяют на плоскости $O\varphi r$ криволинейную трапецию $\widetilde{D}$ (рис.32):

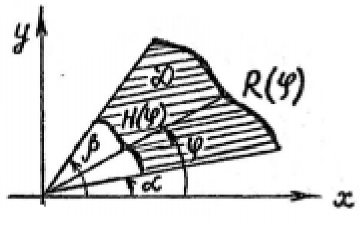

Рис. 31

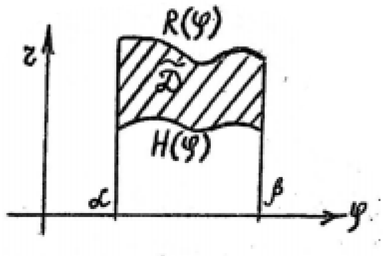

Рис. 32

Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\widetilde{D}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{H(\varphi)}^{R(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr. \qquad (4.7.2)$$

Пример 4.7. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=y^2$ и $x^2+y^2=4$.

Поверхности, ограничивающие данное тело представляют из себя:

$z=0$ – плоскость Oxy,

$z=y^2$ – параболический цилиндр,

$x^2+y^2=4$ – круговой цилиндр.

Изобразим это тело на рисунке (рис.33):

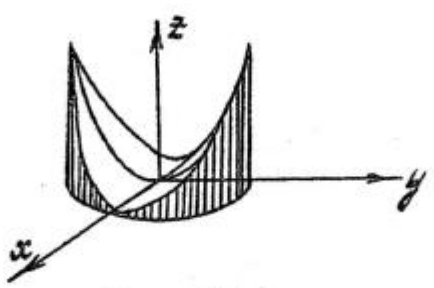

Рис. 33

Данное тело является цилиндрическим телом, определяемым условиями

$$(x, y) \in D,\ 0 \le z \le f(x, y),$$

где D – круг радиуса 2 с центром в начале координат на плоскости Oxy: $x^2 + y^2 \le 4$. Тогда, согласно п.4.3, объем тела можно найти по формуле

$$V = \iint_D \ y^2 dxdy.$$

Заметим, что область D можно определить условиями в полярных координатах:

$$-\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2.$$

Тогда по формуле (4.7.2)

$V = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^2 (r \sin\varphi)^2\, r dr = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \sin^2\varphi\, dr = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^2 r^3 dr =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\cos 2\varphi)}{2} d\varphi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = 2\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) =$

$= 2\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} - \sin 2\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi - (-2\pi) - \sin 2\pi + \sin(-2\pi) = 4\pi$ (куб.ед.).

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изучаемые вопросы

5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка: основные понятия.
5.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
5.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли.
5.5. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
5.6. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия.
5.7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие непосредственное интегрирование.
5.8. Неполные дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка до первого.
5.9. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
5.10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
5.11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с правой частью специального вида.
5.12. Метод вариации произвольных постоянных.

5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка: основные понятия.

Определение 5.1.1. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производную y':

$$F(x, y, y') = 0.$$

Иногда дифференциальное уравнение первого порядка удается записать в виде уравнения, разрешенного относительно производной:

$$y' = f(x, y).$$

Поскольку $y' = \frac{dy}{dx}$, то дифференциальное уравнение первого порядка может быть представлено в симметрической форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть неполным, но в его записи обязательно должна присутствовать производная y' либо дифференциал dy.

Определение 5.1.2. Решением (или интегралом) дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График решения называется интегральной кривой.

Определение 5.1.3. Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения первого порядка в плоской области D называется семейство решений, которое можно записать в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (5.1.1)$$

где C – произвольная постоянная и выполнены следующие условия:

a) при любом фиксированном значении постоянной C зависимость y от x по формуле (5.1.1) является решением дифференциального уравнения,

b) для любой точки $A(x_0, y_0)$ из области D существует единственное значение $C = C_0$ такое, что решение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$ (т.е. справедливо равенство $\Phi(x_0, y_0, C_0) = 0$).

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения первого порядка удается записать в явной форме:

$$y = \varphi(x, C).$$

Присваивая произвольной постоянной C определенные значения, мы будем получать решения, которые называются частными решениями (или частными интегралами).

Геометрическим образом частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, является интегральная кривая, проходящая через точку $A(x_0, y_0)$.

Задача Коши: Найти частное решение дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. Если функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области D и точка $A(x_0, y_0)$ принадлежит области D, то существует и при том единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Следует заметить, что не всякое решение дифференциального уравнения первого порядка является частным решением, т.е. получается из общего решения при некотором значении постоянной C (даже при $C = \pm\infty$). Такие решения называют особыми решениями. Характерной особенностью особого решения является то, что в любой точке его интегральной кривой нарушается условие единственности, т.е. через эту точку проходит еще одна интегральная кривая. Интегральная кривая особого решения является огибающей семейства интегральных кривых частных решений.

5.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 5.2.1. Дифференциальным уравнением с разделёнными переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$q(y)dy = p(x)dx. \tag{5.2.1}$$

Такое дифференциальное уравнение решается путем почленного интегрирования:

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx,$$

$Q(y) = P(x) + C.$

Определение 5.2.2. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение, которое приводится к виду (5.2.1) с помощью арифметических действий.

Примерами дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными являются все уравнения вида

$$y' = a(x)b(y)$$

и

$$a(x)b(y)dx + \varphi(x)\psi(y)dy = 0.$$

Пример 5.2.1. Найти решение дифференциального уравнения $xy' = -y$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Сначала найдем общее решение с помощью разделения переменных:

$$x\frac{dy}{dx} = -y,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C.$$

Полученное общее решение можно упростить, если произвольную постоянную представить в виде $\ln|C|$:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$
$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$
$$y = \frac{C}{x}.$$

Найдем теперь частное решение по начальному условию. Для этого подставим в общее решение $x = 1$ и $y = 2$:

$$2 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 2.$$

Тогда искомое частное решение будет

$$y = \frac{2}{x}.$$

5.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 5.3.1. Дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка, если оно приводится к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3.1}$$

с помощью арифметических действий.

Стоит отметить, что для проверки однородности дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, вовсе не обязательно приводить его к виду (5.3.1). Достаточно выполнить следующие элементарные действия. Заменить x на αx и y на αy, где $\alpha = \text{const} > 0$ (это не касается значка y'). Если α можно полностью исключить из уравнения, то оно является однородным.

Для решения однородного дифференциального уравнения первого порядка применяется подстановка $y = xv$, где $v = v(x) = \frac{y(x)}{x}$ – вспомогательная функция. После этой подстановки мы получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $v = v(x)$.

Пример 5.3.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xyy' - x^2 - y^2 = 0.$$

Решение. Заменим x на αx и y на αy, где $\alpha = \text{const} > 0$:

$$\alpha x \alpha y y' - (\alpha x)^2 - (\alpha y)^2 = 0,$$
$$\alpha^2 x y y' - \alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = 0.$$

Если уравнение разделить на α^2, то мы полностью избавимся от α. Следовательно, данное дифференциальное уравнение является однородным.

Применим подстановку $y = xv$:

$$xxv(xv)' - x^2 - (xv)^2 = 0,$$
$$x^2 v(v + xv') - x^2 - x^2 v^2 = 0,$$
$$v(v + xv') - 1 - v^2 = 0,$$
$$v^2 + vxv' - 1 - v^2 = 0,$$
$$vxv' - 1 = 0,$$
$$vx\frac{dv}{dx} = 1,$$
$$vdv = \frac{dx}{x},$$
$$\int vdv = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln|x| + C,$$
$$v^2 = 2\ln|x| + C.$$

Так как $v = \frac{y}{x}$, то получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\ln|x| + C,$$
$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x| + C,$$
$$y^2 = x^2(2\ln|x| + C).$$

5.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Определение 5.4.1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение 5.4.2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha = \text{const}$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется уравнением Бернулли.

Оба вида уравнений можно решить одной и той же подставкой Бернулли $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – вспомогательные функции. После подставки Бернулли получаются два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными относительно неизвестных функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

Пример 5.4.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - 2xy = e^{-2x^2}y^3.$$

Решение. Данное уравнение – уравнение Бернулли. Поэтому применяем подстановку $y = uv$:

$$(uv)' - 2xuv = e^{-2x^2}(uv)^3,$$
$$u'v + uv' - 2xuv = e^{-2x^2}u^3v^3,$$
$$(u' - 2xu)v + uv' = e^{-2x^2}u^3v^3. \qquad (5.4.1)$$

В качестве функции $u = u(x)$ подберем любую ненулевую функцию, удовлетворяющую условию $u' - 2xu = 0$:

$$\frac{du}{dx} = 2xu,$$
$$\frac{du}{u} = 2xdx,$$
$$\int \frac{du}{u} = \int 2xdx,$$
$$\ln|u| = x^2 + C;$$

можем присвоить $C = 0$, тогда

$$\ln|u| = x^2,$$
$$|u| = e^{x^2},$$
$$u = \pm e^{x^2};$$

из двух функций выберем

$$u = e^{x^2}.$$

Подставим найденную функцию u в уравнение (5.4.1), учитывая, что $u' - 2xu = 0$:

$$e^{x^2}v' = e^{-2x^2}e^{3x^2}v^3,$$
$$\frac{dv}{dx} = v^3,$$

$$\frac{dv}{v^3} = dx,$$
$$\int v^{-3}dv = \int dx,$$
$$\frac{v^{-2}}{-2} = x + C,$$
$$\frac{1}{v^2} = C - 2x,$$
$$v^2 = \frac{1}{C-2x}.$$

Так как $v = \frac{y}{u} = ye^{-x^2}$, то получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$\left(ye^{-x^2}\right)^2 = \frac{1}{C-2x},$$
$$y^2e^{-2x^2} = \frac{1}{C-2x},$$
$$y^2 = \frac{e^{2x^2}}{C-2x}.$$

5.5. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение 5.5.1. Дифференциальное уравнение в симметрической форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.5.1}$$

называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, если

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{5.5.2}$$

При выполнении условия (5.5.2) левая часть дифференциального уравнения (5.5.1) является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. Такое уравнение можно записать в виде

$$dU = 0,$$

и его общим решением будет

$$U(x,y) = C. \tag{5.5.3}$$

Функцию $U(x,y)$ можно найти из системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}. \tag{5.5.4}$$

Пример 5.5.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2xydx + \left(x^2 + \frac{2}{y}\right)dy = 0.$$

Решение. В условиях задачи $P(x,y) = 2xy$, $Q(x,y) = x^2 + \frac{2}{y}$. Тогда $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x$. Таким образом, условие (5.5.2) выполняется. Поэтому данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x,y)$ из уравнений (5.5.4):

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x^2 + \frac{2}{y} \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы

$$U(x,y) = \int \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx = \int 2xydx = x^2y + \varphi(y).$$

Подставим найденное $U(x,y) = x^2y + \varphi(y)$ во второе уравнение системы:

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 + \frac{2}{y},$$
$$\varphi'(y) = \frac{2}{y},$$
$$\varphi(y) = \int \frac{2}{y} dy = 2\ln|y| + C_1 .$$
Можем присвоить $C_1 = 0$. Тогда $\varphi(y) = 2\ln|y|$ и
$$U(x, y) = x^2 y + 2\ln|y|.$$
В соответствии с (5.5.3) общим решением дифференциального уравнения является
$$x^2 y + 2\ln|y| = C.$$

5.6. Дифференциальные уравнения высших порядков: основные понятия

Определение 5.6.1. Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные y', y'', …, $y^{(n)}$:
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$
Иногда дифференциальное уравнение порядка n удается записать в виде уравнения, разрешенного относительно старшей производной:
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$
Дифференциальное уравнение порядка n может быть неполным, но в его записи обязательно должна присутствовать старшая производная $y^{(n)}$.

По-прежнему, решением (или интегралом) дифференциального уравнения порядка n называется функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График решения называется интегральной кривой.

Общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения порядка n будет содержать уже n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$:
$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$
или
$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$
Присваивая произвольным постоянным $C_1, C_2, \dots, C_n$ определенные значения, мы будем получать решения, которые называются частными решениями (или частными интегралами).

Задача Коши для дифференциального уравнения порядка n: Найти частное решение дифференциального уравнения
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$
удовлетворяющее n начальным условиям
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

5.7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие непосредственное интегрирование

Дифференциальные уравнения вида
$$y^{(n)} = f(x)$$
решают n-кратным интегрированием:
$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx = f_1(x) + C_1,$$
$$y^{(n-2)} = \int (H_1(x) + C_1)dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$
$$y^{(n-3)} = \int (H_2(x) + C_1 x + C_2)dx = f_3(x) + C_1 x^2 + C_2 x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

5.8. Неполные дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка до первого

5.8.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, не содержащие неизвестную функцию $y = y(x)$.

Дифференциальные уравнения вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ решают введением вспомогательной функции $z = y^{(n-1)}$. Тогда $y^{(n)} = z'$ и мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(x, z, z') = 0.$$

Если мы найдем его решение $z = \varphi(x, C)$, то получим дифференциальное уравнение

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C),$$

которое решается (n–1)-кратным интегрированием (см. п.5.7).

Пример 5.8.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \text{ctg}x \cdot y'.$$

Решение. Вводим вспомогательную функцию $z = y'$. Тогда $y'' = z'$ и

$$z' = \text{ctg}x \cdot z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \text{ctg}x \cdot z,$$

$$\frac{dz}{z} = \text{ctg}x \cdot dx,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \text{ctg}x \cdot dx,$$

$$\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|z| = \ln|C_1 \sin x|,$$

$$z = C_1 \sin x,$$

$$y' = C_1 \sin x,$$

$$y = \int C_1 \sin x \, dx = -C_1 \cos x + C_2,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2.$$

5.8.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие свободную переменную x.

Дифференциальные уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$ решают введением вспомогательной функции $p = y'$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

в котором y рассматривается как свободная переменная, а p – как неизвестная функция $p = p(y)$. Если мы найдем его решение $\Phi(y, p, C) = 0$, то получим дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции $y = y(x)$:

$$\Phi(y, y', C) = 0.$$

Пример 5.8.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' = (y')^2.$$

Решение. Вводим вспомогательную функцию $p = y'$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2,$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$
$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y},$$
$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$
$$\ln|p| = \ln|C_1 y|,$$
$$p = C_1 y,$$
$$y' = C_1 y,$$
$$\frac{dy}{dx} = C_1 y,$$
$$\frac{dy}{y} = C_1 dx,$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx,$$
$$\ln|y| = C_1 x + C_2,$$
$$|y| = e^{C_1 x + C_2},$$
$$y = \pm e^{C_1 x} C_2,$$
$$y = C_1 e^{C_2 x}.$$

5.9. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение 5.9.1. Линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0, \tag{5.9.1}$$

где a_m – заданные действительные числа ($m = 0,1,2,\ldots,n$).

Определение 5.9.2. Характеристическим уравнением дифференциального уравнения (5.9.1) называется алгебраическое уравнение

$$a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n = 0$$

с неизвестным k.

Характеристическое уравнение имеет ровно n комплексных корней с учетом их кратности (комплексные числа мы изучили в разделе 1). Некоторые комплексные корни могут оказаться действительными числами. Если имеется недействительный комплексный корень $k = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$, i – мнимая единица), то вместе с ним будет и комплексно сопряженный корень $\bar{k} = \alpha - i\beta$.

Действительному корню $k = \alpha$ кратности r соответствуют r различных частных решений дифференциального уравнения (5.9.1):

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \ldots, x^{r-1} e^{\alpha x}$$

(простому действительному корню $k = \alpha$ соответствует одно частное решение $e^{\alpha x}$).

Паре комплексно сопряженных недействительных корней $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности r соответствуют $2r$ различных частных решений дифференциального уравнения (5.9.1):

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{r-1} e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{r-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

(простым комплексно сопряженным недействительным корням $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$).

После полного перебора всех корней характеристического уравнения мы получим n различных частных решений дифференциального уравнения (5.9.1):

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Их набор называется фундаментальной системой решений, и общее решение дифференциального уравнения (5.9.1) представляется в виде линейной комбинации

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 5.9.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{IV} + 5y'' - 36y = 0.$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^4 + 5k^2 - 36 = 0,$$

$$t = k^2,\ t^2 + 5t - 36 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-36)}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2},$$

$$t_1 = 4,\ t_2 = -9,$$

$$k^2 = 4,\ k^2 = -9,$$

$$k_{1,2} = \pm 2,\ k_{3,4} = \pm 3i.$$

Тогда общим решением дифференциального уравнения является

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$$

5.10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение 5.10.1. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} = f(x), \tag{5.10.1}$$

где a_m – заданные действительные числа ($m = 0,1,2,\dots,n$), а $f(x)$ – заданная функция, отличная от тождественного нуля.

Определение 5.10.2. Соответствующим однородным уравнением уравнения (5.10.1) называется дифференциальное уравнение

$$a_0 Y + a_1 Y' + a_2 Y'' + \dots + a_n Y^{(n)} = 0. \tag{5.10.2}$$

Теорема 5.10.1. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.10.1) имеет вид

$$y = Y + y^*,$$

где Y – общее решение соответствующего однородного уравнения (5.10.2), а y^* – какое-нибудь частное решение (всё равно какое!) линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.10.1).

В п.5.9 указано, как искать Y, а в двух последующих пунктах мы изучим, как подбирать y^*.

5.11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с правой частью специального вида

Правой частью специального вида дифференциального уравнения (5.10.1) называется функция

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \tag{5.11.1}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

В этом случае частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.10.1) можно подобрать в виде

$$y^* = e^{\alpha x}(L_N(x)\cos\beta x + R_N(x)\sin\beta x)x^r, \qquad (5.11.2)$$

где

1) N – наибольшее из чисел n и m,

2) $L_N(x)$ и $R_N(x)$ – многочлены степени не выше N с неопределенными коэффициентами, которые можно найти подстановкой y^* в дифференциальное уравнение (5.10.1),

3) r – кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения (5.10.2). Если у характеристического уравнения нет корня $\alpha + i\beta$, то $r = 0$.

При $\beta = 0$ правой частью дифференциального уравнения (5.10.1) будет квазимногочлен

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x), \qquad (5.11.3)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Тогда частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.10.1) можно подобрать в виде

$$y^* = e^{\alpha x}L_n(x)x^r, \qquad (5.11.4)$$

где

1) $L_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, которые можно найти подстановкой y^* в дифференциальное уравнение (5.10.1),

2) r – кратность корня α характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения (5.10.2). Если у характеристического уравнения нет корня α, то $r = 0$.

Пример 5.11.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 3y = x\sin x.$$

Решение. Уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида (5.10.1). Его общее решение можно найти по теореме 5.10.1.

а) Составим соответствующее однородное уравнение (5.10.2):

$$Y'' - 4Y' + 3Y = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0,$$

$$k_1 = 1, k_2 = 3.$$

Тогда общим решением однородного уравнения является

$$Y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

б) Подберем частное решение y^* исходного дифференциального уравнения. Правая часть этого уравнения имеет специальный вид (5.11.1), где $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 0$, $n = 0$, $Q_m(x) = x$, $m = 1$. Тогда y^* можно подобрать в виде (5.11.2), где $N = 1$, $L_N(x) = Ax + B$, $R_N(x) = Cx + D$. Так как число $\alpha + i\beta = i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Следовательно,

$$y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x = Ax\cos x + B\cos x + Cx\sin x + D\sin x.$$

Подберем неопределенные коэффициенты A, B, C, D подстановкой y^* в исходное уравнение. Предварительно найдем производные

$(y^*)' = A\cos x - Ax\sin x - B\sin x + C\sin x + Cx\cos x + D\cos x$,

$(y^*)'' = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x - B\cos x + C\cos x + C\cos x - Cx\sin x - D\sin x =$
$= -2A\sin x - Ax\cos x - B\cos x + 2C\cos x - Cx\sin x - D\sin x$.

Тогда после подстановки y^* в исходное уравнение получаем тождество

$$-2A\sin x - Ax\cos x - B\cos x + 2C\cos x - Cx\sin x - D\sin x -$$
$$-4A\cos x + 4Ax\sin x + 4B\sin x - 4C\sin x - 4Cx\cos x - 4D\cos x +$$
$$+3Ax\cos x + 3B\cos x + 3Cx\sin x + 3D\sin x \equiv x\sin x,$$

$$(-4A + 2B + 2C - 4D)\cos x + (2A - 4C)x\cos x +$$
$$+(-2A + 4B - 4C + 2D)\sin x + (4A + 2C)x\sin x \equiv x\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой части тождества при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -4A + 2B + 2C - 4D = 0 \\ 2A - 4C = 0 \\ -2A + 4B - 4C + 2D = 0 \\ \qquad 4A + 2C = 1 \end{cases},$$

из которой следует, что $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{11}{50}$, $C = \frac{1}{10}$, $D = -\frac{1}{25}$. Таким образом,

$$y^* = \frac{1}{5}x\cos x + \frac{11}{50}\cos x + \frac{1}{10}x\sin x - \frac{1}{25}\sin x.$$

в) по теореме 5.10.1 получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = Y + y^* = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}x\cos x + \frac{11}{50}\cos x + \frac{1}{10}x\sin x - \frac{1}{25}\sin x.$$

Пример 5.11.2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = x + 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида (5.10.1). Сначала найдем его общее решение.

а) Составим соответствующее однородное уравнение (5.10.2):

$$Y'' + 2Y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k = 0,$$
$$k(k + 2) = 0,$$
$$k_1 = 0, k_2 = -2.$$

Тогда общим решением однородного уравнения является

$$Y = C_1 + C_2e^{-2x}.$$

б) Подберем частное решение y^* исходного дифференциального уравнения. Правая часть этого уравнения имеет специальный вид (5.11.3), где $\alpha = 0$, $P_n(x) = x + 1$, $n = 1$. Тогда y^* можно подобрать в виде (5.11.4), где $L_n(x) = Ax + B$, $r = 1$:

$$y^* = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx.$$

Подберем неопределенные коэффициенты A и B подстановкой y^* в исходное уравнение. Предварительно найдем производные

$$(y^*)' = 2Ax + B, \quad (y^*)'' = 2A.$$

Тогда после подстановки y^* в исходное уравнение получаем тождество

$$2A + 4Ax + 2B \equiv x + 1.$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой части тождества при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \quad 4A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases},$$

из которой следует, что $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$y^* = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$$

в) по теореме 5.10.1 получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$$

Теперь подберем C_1 и C_2 по начальным условиям. Предварительно найдем производную $y' = -2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Тогда из начальных условий $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_2 + \frac{1}{4} = 1 \end{cases},$$

из которой следует, что $C_2 = -\frac{3}{8}$, $C_1 = \frac{3}{8}$. Таким образом,

$$y = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$$

5.12. Метод вариации произвольных постоянных

В тех случаях, когда правая часть $f(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (5.10.1) не является функцией специального вида (5.11.1), можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных, который заключается в следующем: если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (5.10.2)

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \dots + C_nY_n,$$

то общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.10.1) можно найти в виде

$$y = \varphi_1(x)Y_1 + \varphi_2(x)Y_2 + \dots + \varphi_n(x)Y_n,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, … , $\varphi_n(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1'Y_1 + \varphi_2'Y_2 + \dots + \varphi_n'Y_n = 0 \\ \varphi_1'Y_1' + \varphi_2'Y_2' + \dots + \varphi_n'Y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1'Y_1^{(n-2)} + \varphi_2'Y_2^{(n-2)} + \dots + \varphi_n'Y_n^{(n-2)} = 0 \\ \varphi_1'Y_1^{(n-1)} + \varphi_2'Y_2^{(n-1)} + \dots + \varphi_n'Y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}.$$

Пример 5.12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Правая часть $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ не является функцией специального вида (5.11.1). Применим метод вариации произвольных постоянных.

Соответствующее однородное уравнение

$$Y'' + Y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Фундаментальная система решений (п.5.9)

$$Y_1 = \cos x, Y_2 = \sin x.$$

Общее решение однородного уравнения

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения можно найти в виде

$$y = \varphi_1(x) Y_1 + \varphi_2(x) Y_2 = \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1' Y_1 + \varphi_2' Y_2 = 0 \\ \varphi_1' Y_1' + \varphi_2' Y_2' = f(x) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi_1' \cos x + \varphi_2' \sin x = 0 \\ -\varphi_1' \sin x + \varphi_2' \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}.$$

Если первое уравнение умножить на $\sin x$, а второе – на $\cos x$, и после этого уравнения сложить, то $\varphi_2' = 1$ и $\varphi_1' = -\mathrm{tg} x$. Тогда

$$\varphi_1(x) = -\int \mathrm{tg} x \, dx = \ln|\cos x| + C_1,$$

$$\varphi_2(x) = \int dx = x + C_2.$$

Таким образом, мы получаем общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = (\ln|\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x.$$

РАЗДЕЛ 6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

Изучаемые вопросы

6.1. Числовые ряды: основные понятия, необходимый признак сходимости.
6.2. Знакоположительные ряды: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.
6.3. Знакопеременные ряды: абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница.

6.1. Числовые ряды: основные понятия, необходимый признак сходимости

Определение 6.1.1. Числовым рядом называется формальная бесконечная запись

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где u_n – некоторые числа, называемые членами ряда.

Определение 6.1.2. Сумма первых n членов числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ обозначается S_n и называется n-й частичной суммой ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Определение 6.1.3. Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный предел его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

При этом число S называется суммой ряда. В противном случае числовой ряд называется расходящимся.

Теорема 6.1 (Необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение неверно! Например, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пример 6.1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{7n+2}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-3}{7n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{3}{n}}{7+\frac{2}{n}} = \frac{5}{7} \neq 0,$$

то данный числовой ряд расходится.

6.2. Знакоположительные ряды: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши

Теорема 6.2.1. (Первый признак сравнения). Пусть $0 \leq u_n \leq v_n$, начиная с некоторого номера. Тогда

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится,
2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Определение 6.2.1. Пусть $u_n > 0$ и $v_n > 0$, начиная с некоторого номера. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ называются подобными. Подобие рядов будем обозначать $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Теорема 6.2.2. (Второй признак сравнения). Подобные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Для сравнения удобно использовать следующие «эталонные» ряды:

1) ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$, в том числе расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geq 1$.

Пример 6.2.1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n-2} > \frac{1}{n}$ при $n \geq 3$ и гармонический ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по первому признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$.

Пример 6.2.2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2+1}$.

Решение. Так как $|\cos n\alpha| \leq 1$, то $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле при $p = 2 > 1$, то по первому признаку сравнения исходный ряд тоже сходится.

Пример 6.2.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}$.

Решение. Обозначим $u_n = \frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$ и проверим подобие рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Для этого найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{3+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{3}} \neq \infty$ и $\frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$, то ряды подобны: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Поскольку гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то по второму признаку сравнения расходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Весьма полезно сделать следующее наблюдение: если $p_r(x)$ и $q_s(x)$ – некоторые многочлены степени r и s соответственно, а $\varphi(x)$ – некоторая положительная функция, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_r(x)}{q_s(x)} \varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^r}{x^s} \varphi(x).$$

Пример 6.2.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{5n^4+2n^3+7}$.

Решение. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{5n^4+2n^3+7} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится как ряд Дирихле при $p = 3 > 1$. Тогда по второму признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Теорема 6.2.3. (Признак Даламбера). Пусть $u_n > 0$, начиная с некоторого номера, и существует предел $D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Тогда

1) если $D < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) если $D > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

При $D = 1$ вопрос остается открытым, и надо применять другой признак, чаще всего – второй признак сравнения.

Пример 6.2.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$.

Решение. Обозначим $u_n = \frac{n+2}{3^n}$. Тогда $u_{n+1} = \frac{n+3}{3^{n+1}}$ и

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)3^n}{3^{n+1}(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3/n}{3(1+2/n)} = \frac{1}{3}.$$

Так как $D = \frac{1}{3} < 1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

Теорема 6.2.4. (Радикальный признак Коши). Пусть $u_n \geq 0$, начиная с некоторого номера, и существует предел $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Тогда

1) если $C < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) если $C > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

При $C = 1$ вопрос остается открытым, и надо применять другой признак, чаще всего – второй признак сравнения.

Пример 6.2.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^n$.

Решение. Обозначим $u_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^n$. Тогда

$$C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0.$$

Так как $C = 0 < 1$, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Теорема 6.2.5. (Интегральный признак Коши). Пусть функция $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая при $x \geq 1$. Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 6.2.7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2.5 и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{d(\ln(x+2))}{\ln(x+2)} = \lim_{A\to+\infty}\ln\ln(x+2)\Big|_1^A = +\infty.$$

Тогда по интегральному признаку Коши заданный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ тоже расходится.

6.3. Знакопеременные ряды: абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница

Определение 6.3.1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Теорема 6.3.1. Из абсолютной сходимости числового ряда следует его сходимость.

Обратное утверждение неверно! Например, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится, но ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Определение 6.3.2. Если числовой ряд сходится, но не абсолютно, то такой ряд называется условно сходящимся.

Приведенный выше числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ является условно сходящимся.

Таким образом, числовые ряды делятся на сходящиеся и расходящиеся, а сходящиеся числовые ряды делятся на абсолютно сходящиеся и условно сходящиеся.

Среди знакопеременных рядов наиболее важны знакочередующиеся ряды.

Определение 6.3.3. Знакочередующимся рядом называется числовой ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n ,$$

где все $u_n > 0$.

Теорема 6.3.2 (признак Лейбница). Если $u_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ и последовательность u_n монотонно убывает, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится, а его сумма положительна и не превосходит первого члена u_1.

Пример 6.3.1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Решение. Данный ряд знакочередующийся. Сначала проверим его абсолютную сходимость. Ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ расходится как ряд Дирихле при $p = \frac{1}{2} \leq 1$, поэтому абсолютной сходимости нет. Проверим условную сходимость. Последовательность модулей $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ удовлетворяет условиям теоремы 6.3.2, поэтому исходный знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница. Так как нет абсолютной сходимости, то сходимость условная.

РАЗДЕЛ 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Изучаемые вопросы

7.1. Функциональные ряды: основные понятия.
7.2. Степенные ряды.
7.3. Ряды Фурье.

7.1. Функциональные ряды: основные понятия

Определение 7.1.1. Функциональным рядом называется ряд, члены которого зависят от переменной x, т.е. являются функциями:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

Функции $u_n(x)$ называются членами функционального ряда.

Иногда нумерацию начинают с нуля:

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x).$$

При каждом фиксированном значении x, принадлежащем областям определения всех членов функционального ряда, получается числовой ряд, который может сходиться, а может и расходиться.

Определение 7.1.2. Множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

В каждой точке области сходимости функционального ряда определена его сумма, которая зависит от выбора x и обозначается $S(x)$.

Пример 7.1.1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln x}}$.

Решение. При каждом фиксированном значении x получается ряд Дирихле с показателем степени $p=\ln x$. Такой ряд сходится при условии $\ln x>1$, т.е. $x>e$. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является интервал $(e;\ +\infty)$.

7.2. Степенные ряды

Определение 7.2.1. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (7.2.1)$$

где x_0 и a_n – действительные числа.

Заметим, что любой степенной ряд сходится при $x=x_0$. Поэтому область сходимости степенного ряда всегда непустая. Могут представиться три различных случая:

1) степенной ряд абсолютно сходится на интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$ и расходится на интервалах $(-\infty;\ x_0-R)$ и $(x_0+R;\ +\infty)$, где R – некоторое положительное число, называемое радиусом сходимости степенного ряда (в граничных точках $x=x_0\pm R$ требуется дополнительное исследование),

2) степенной ряд сходится только при $x=x_0$ $(R=0)$,

3) степенной ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой $(-\infty;\ +\infty)$ $(R=\infty)$.

Если, начиная с некоторого номера, все $a_n\neq 0$, то радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формулам

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

На практике интервал абсолютной сходимости степенного ряда обычно находят непосредственным применением признака Даламбера или радикального признака Коши к ряду модулей $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n|$.

Пример 7.2.1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

Решение. У нас $u_n(x) = \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ и $u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$. Найдем предел Даламбера для ряда модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x \cdot n}{(n+1) \cdot 2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{(1+1/n) \cdot 2}\right| = \frac{|x|}{2}.$$

Тогда по признаку Даламбера интервал абсолютной сходимости степенного ряда определяется условием $\frac{|x|}{2} < 1$, т.е. $-2 < x < 2$. В граничных точках $x = \pm 2$ проведем отдельное исследование:

a) при $x = 2$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

b) при $x = -2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, областью сходимости данного степенного ряда является промежуток $[-2; 2)$.

Определение 7.2.2. Если функция $f(x)$ является суммой степенного ряда (7.2.1) на некотором числовом множестве E, то мы будем говорить, что функция $f(x)$ разложена в степенной ряд на множестве E и записывать $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ на E.

Теорема 7.2.1. Если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ в некоторой окрестности точки x_0, то коэффициенты a_n определяются единственным образом по формулам

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{7.2.2}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Из теоремы 7.2.1 следует, что если функция разложена в степенной ряд в окрестности точки x_0, то она бесконечно дифференцируема в точке x_0. Однако обратное утверждение неверно!

Формулы (7.2.2) называются формулами Тейлора, а степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

и называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Известны следующие разложения в ряд Маклорена:

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на $(-\infty; +\infty)$,

2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ на $(-\infty; +\infty)$,

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ на $(-\infty; +\infty)$,

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \cdots$

на $[-1; 1]$ при $\alpha \geq 0$,

на $(-1; 1]$ при $-1 < \alpha < 0$,

на $(-1; 1)$ при $\alpha \leq -1$,

5) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ на $(-1; 1)$,

6) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ на $(-1;\ 1)$,

7) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ на $(-1;\ 1]$,

8) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ на $[-1;\ 1)$,

9) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ на $[-1;\ 1]$.

7.3. Ряды Фурье

Определение 7.3.1. Рядом Фурье функции $f(x)$ на сегменте $[-l;\ l]$ $(l > 0)$ называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна и кусочно-непрерывна на сегменте $[-l;\ l]$ $(l > 0)$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого сегмента. При этом в точках интервала $(-l;\ l)$ сумма ряда Фурье $S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big)$, а на концах промежутка сумма ряда Фурье $S(\pm l) = \frac{1}{2}\big(f(-l+0) + f(l-0)\big)$.

В условиях теоремы Дирихле функция $f(x)$ раскладывается в свой ряд Фурье во всех точках интервала $(-l;\ l)$, в которых функция $f(x)$ непрерывна:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Если функция $f(x)$ четная на сегменте $[-l;\ l]$, т.е. $f(-x) = f(x)$, то

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ b_n = 0$$

и мы получим ряд косинусов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Если функция $f(x)$ нечетная на сегменте $[-l;\ l]$, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$a_n = 0,\ \ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

и мы получим ряд синусов

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[0;\ l]$. Тогда для разложения этой функции в ряд Фурье достаточно доопределить ее на промежутке $[-l;\ 0)$ произвольным способом, а затем разложить полученную функцию в ряд Фурье на сегменте $[-l;\ l]$. Целесообразно доопределять функцию $f(x)$ по четности или по нечетности. В этих случаях мы получим разложение функции $f(x)$ в ряд косинусов

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

или, соответственно, синусов

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТЫ 01, 11, 21, 31, 41

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
01	$\int \frac{arctg\,\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$	$\int (x^2+1)\ln x\,dx$
11	$\int \frac{dx}{(8x-7)^2+9}$	$\int x \arccos 4x\,dx$
21	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-4e^{2x}}}$	$\int \arcsin(2-x)\,dx$
31	$\int \frac{x^3 dx}{x^8-16}$	$\int \frac{(x^2-2x)dx}{e^{3x}}$
41	$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{25^x-4}}$	$\int (3x^2+x-2)\cos 3x\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$	31	$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^4-2x^2+1}$
11	$\int \frac{(x^3-2x+5)dx}{x^4-1}$	41	$\int \frac{(x^3+x^2-4)dx}{x^4-4x^2}$
21	$\int \frac{(x^3-17)dx}{x^2-4x+3}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$	31	$\int_1^e \frac{(x^2+\ln x^2)dx}{x}$
11	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(arctg\,x+x)dx}{1+x^2}$	41	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}$
21	$\int_1^e \frac{1+\ln x dx}{x}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$	31	$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$
11	$\int_0^\infty \frac{dx}{x\ln x}$	41	$\int_0^1 \ln x\,dx$
21	$\int_0^\infty \frac{arctg\,xdx}{1+x^2}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

01. $(1+x^2)dy - xydx = 0$

11. $xdy + 2ydx = x^3dx$

21. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

31. $dy + (y + x^2)dx = 0$

41. $y' + 6y = e^{-2x}$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

01. $y'' - 4y' + 3y = e^{-2x};$ $y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1$

11. $y''' - y' = \sin x;$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

21. $y'' - 5y' + 6y = sh\, x;$ $y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1$

31. $y''' + 5y'' + 6y' = e^x;$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

41. $y'' - 7y' + 12y = e^{-2x};$ $y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1$

7. Исследовать сходимость данных рядов.

01. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}};\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2};\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}};\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3};\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n};\ \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

ВАРИАНТЫ 02, 12, 22, 32, 42

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
02	$\int x\sin(x^2+1)dx$	$\int(7x+1)\sin 2x\,dx$
12	$\int \frac{x\ln(x^2+3)dx}{x^2+3}$	$\int e^{-x}(2-3x)dx$
22	$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2 x}dx}{x}$	$\int \frac{(5x+7)dx}{3^x}$
32	$\int \frac{(\arccos^3 x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int(x^5+x^4-6)\log_7 x\,dx$
42	$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sqrt{1+arctg\,x}}}$	$\int x\arcsin 3x\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$	32	$\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2)(x-1)}$
12	$\int \frac{x^2dx}{(x-3)(x+5)}$	42	$\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$
22	$\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$	32	$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \arcsin 4x\,dx$
12	$\int_1^2 \frac{(x-1)^3dx}{x^2}$	42	$\int_1^e \frac{(x^2+\ln x^2)dx}{x}$
22	$\int_0^1(2x+1)e^{-x}dx$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^4}$	32	$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2(x+2)}$
12	$\int_{-\infty}^1 x5^x dx$	42	$\int_0^\infty \frac{arctg^2\,xdx}{1+x^2}$
22	$\int_0^\infty \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

02. $xdy + ydx = (\ln x + 1)dx$

12. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

22. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$

32. $dy + (y + x^2)dx = 0$

42. $(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

02. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

12. $y'' - 9y' + 14y = sh\, x;$ $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

22. $y''' + 5y'' + 6y' = e^x;$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

32. $y''' + 4y' = 1;$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

42. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

7. Определить область сходимости ряда.

02. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}n}$

32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{2^n n^2}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}n!\, x^n}{(2n)!}$

ВАРИАНТЫ 03,13, 23, 33, 43

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
03	$\int \frac{xdx}{(7+4x^2)^3}$	$\int arctg\, x\, dx$
13	$\int \frac{e^{\frac{1}{x^3}}dx}{x^4}$	$\int x^2 \cos 2x\, dx$
23	$\int x\sqrt[7]{8-x^2}dx$	$\int \arcsin x\, dx$
33	$\int \frac{e^x dx}{9+4e^{2x}}$	$\int (x-4)\arccos x\, dx$
43	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3\, x}$	$\int (x^2+7)\sin 2x\, dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$\int \frac{(3x^3+25)dx}{x^2+3x+2}$	33	$\int \frac{(x^3-2x+5)dx}{x^4-1}$
13	$\int \frac{(x^3+2x+1)dx}{x^3+x}$	43	$\int \frac{(x^3-17)dx}{x^2-4x+3}$
23	$\int \frac{dx}{x^3-8}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(arctg\, x+x)dx}{1+x^2}$	33	$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$
13	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$	43	$\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 7x\, dx$
23	$\int_3^6 \sqrt{6x-x^2}dx$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	33	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
13	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$	43	$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$
23	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

03. $x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

13. $xdy + ydx = (\ln x + 1)dx$

23. $y' = \frac{2x+3y}{4x-5y}$

33. $dy + 4ydx = 2xdx$

43. $y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

03. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

13. $y''' + y' = \sin 2x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

23. $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$

33. $y'' - 3y' + 2y = e^{-2x}$; $y(0) = 0;\ y'(0) = -1$

43. $y''' + 3y'' - 4y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0;\ y''(0) = 1$

7. Исследовать сходимость данных рядов.

03. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}};\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(6n-5)};\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n^3-1)^2};\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}};\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n};\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3-1}$

ВАРИАНТЫ 04, 14, 24, 34, 44

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
04	$\int \frac{\sqrt[3]{8+3\ln x}dx}{x}$	$\int arctg\,\sqrt{x}\,dx$
14	$\int e^{3\sin^2 x}\sin 2x\,dx$	$\int \ln x\,dx$
24	$\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$	$\int (\mathrm{x}^2+7)\arccos x\,dx$
34	$\int \frac{(x+\cos x)dx}{x^2+2\sin x}$	$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$
44	$\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$	$\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^4-2x^2+1}$	34	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x^4}$
14	$\int \frac{(x^3+x^2-4)dx}{x^4-4x^2}$	44	$\int \frac{(2x^3+1)dx}{x^3-1}$
24	$\int \frac{(x^4-3)dx}{x^4-1}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$	34	$\int_0^{\pi} \sin 7x\cos 3x\,dx$
14	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$	44	$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}dx}{x}$
24	$\int_0^{2\pi} \sin^2 3x\cos^2 3x\;\,dx$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+x+3}$	34	$\int_{-4}^0 \frac{dx}{x+2}$
14	$\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$	44	$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$
24	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

04. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$

14. $y' = 2\,sin\,x + 3y$

24. $dy + 4ydx = 2xdy$

34. $\frac{y'}{x^2} - 3y = 1$

44. $xydy = (x^2 + y^2)dx$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

04. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

14. $y'' + 3y' = \cos x$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

24. $y'' + 4y' + 13y = 0$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

34. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

44. $y''' + 4y' = 1$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

7. Определить область сходимости ряда.

04. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{3^n\sqrt{n+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1}(n+1)}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n+1)! x^n}{3^n}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)!}$

ВАРИАНТЫ 05, 15, 25, 35, 45

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
05	$\int tg\, x \ln\lvert\cos x\rvert\, dx$	$\int \sqrt{4-x^2}dx$
15	$\int \frac{arctg\,\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$	$\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$
25	$\int x^2\sqrt[3]{1+x}dx$	$\int (x^2+3)\sin 2x\, dx$
35	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$	$\int \frac{xdx}{e^{2x}}$
45	$\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$	$\int x\ln x(1+x^2)\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$	35	$\int \frac{dx}{x^4+9x^2}$
15	$\int \frac{(3-x)dx}{16-x^4}$	45	$\int \frac{(x^5-9x^3-4)dx}{x^2+3x}$
25	$\int \frac{(x+2)dx}{x^4-2x^3+2x^2}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}dx}{x-9}$	35	$\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$
15	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x\, dx$	45	$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$
25	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	35	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
15	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	45	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$
25	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

05. $\frac{1}{x^2}y' - 3y = 1$

15. $xe^x y' + ye^x = 1$

25. $(1 - x^2)dy + xydx = dx$

35. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$

45. $y' = \frac{2x+3y}{4x-5y}$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

05. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

15. $y''' + y' = e^x$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

25. $y''' - y'' = \cos x$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

35. $y'' - 9y' + 14y = sh\, x$; $\quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$

45. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

7. Исследовать сходимость данных рядов.

05. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(4n-1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+5}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+4)^3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{4^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^5+1}}$

ВАРИАНТЫ 06, 16, 26, 36, 46

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
06	$\int \frac{3^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$	$\int(3-2x^2)\cos x\,dx$
16	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3\,x}$	$\int \frac{(x-2)dx}{3^x}$
26	$\int \frac{(1-\sqrt[5]{\arcsin^3 x})dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{(x^2-x-1)dx}{2^x}$
36	$\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$	$\int x\,arctg\,xdx$
46	$\int \frac{\sqrt[3]{8+3\ln x dx}}{x}$	$\int \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$\int \frac{x^2dx}{(x-3)(x+5)}$	36	$\int \frac{(5x+1)dx}{(4x^2+4x+1)(x-1)}$
16	$\int \frac{xdx}{x^3+27}$	46	$\int \frac{(x^3-2x+5)dx}{x^4-1}$
26	$\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2)(x-1)}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$	36	$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{9+16\cos^2 x}$
16	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$	46	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
26	$\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$	36	$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$
16	$\int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	46	$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$
26	$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4+x^2}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

06. $(x^2-1)y'-xy=x^3-x$

16. $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^3$

26. $dy+aydx=kxdy$

36. $y'+10y=e^{-6x}$

46. $y'=\frac{x+y}{3x-5y}$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

06. $y''+4y=4e^x$; $y(0)=4;\ y'(0)=0$

16. $y'''+4y'=1$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

26. $y''+4y'+13y=0$; $y(0)=0;\ y'(0)=1$

36. $y''+9y'=\cos x$; $y(0)=y'(0)=0$

46. $y'''+y'=e^{2x}$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

7. Определить область сходимости ряда.

06. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(-x)^n}{\sqrt[3]{n^2+4}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n+1)!x^n}{3^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{4^n}$

ВАРИАНТЫ 07, 17, 27, 37, 47

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
07	$\int ch^2\, xdx$	$\int \frac{xdx}{e^{2x}}$
17	$\int \sqrt{3^{\ln x}}\frac{dx}{x}$	$\int arctg\sqrt{x}dx$
27	$\int \frac{x^2dx}{3+x^3}$	$\int \frac{xdx}{ch^2 x}$
37	$\int \frac{dx}{x\ln x}$	$\int x\, arctg\frac{x}{5}dx$
47	$\int \frac{sh\, xdx}{\sqrt{ch\, 2x}}$	$\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$\int \frac{(2x^4+1)dx}{x^3+x^2+2x+2}$	37	$\int \frac{xdx}{x^3+27}$
17	$\int \frac{(3+2x)dx}{(x+2)(x^2-4)}$	47	$\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$
27	$\int \frac{(3x^2-2)dx}{x(x+2)^2}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$\int_3^6 \sqrt{6x-x^2}dx$	37	$\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$
17	$\int_0^{\pi} \sin 7x\cos 3x\, dx$	47	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$
27	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(arctg\, x+x)dx}{1+x^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$\int_1^3 \frac{dx}{x-2}$	37	$\int_0^1 \frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$
17	$\int_{-\infty}^0 xe^{5x}dx$	47	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$
27	$\int_0^{\infty} \frac{arctg\, xdx}{1+x^2}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

07. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+6xy+3y^2}{2x^2+3xy}$

17. $xdy + 2ydx = x^3dx$

27. $y' - y = e^{10x}$

37. $xdy - 3ydx = (x+1)dx$

47. $dy + cydx = axdy$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

07. $y'' + 4y = 4e^x$; $\quad y(0) = 4;\ y'(0) = 0$

17. $y'' + 4y = e^{3x}$; $\quad y(0) = y'(0) = 2$

27. $y'' - 9y' + 14y = sh\, x$; $\quad y(0) = 0; y'(0) = 0$

37. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

47. $y'' - 4y' + 5y = 0$; $\quad y(0) = -1;\ y'(0) = 1$

7. Исследовать сходимость данных рядов.

07. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n-1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4+1}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(4n-1)}$

ВАРИАНТЫ 08, 18, 28, 38, 48

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
08	$\int 3\sqrt{2^{x^3}}x^2dx$	$\int \frac{(5x+7)dx}{3^x}$
18	$\int sh^3\, x\, dx$	$\int (3x-8)2^{-2x}dx$
28	$\int \sin^2 2x \cos^2 2x\, dx$	$\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}}$
38	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$	$\int e^{2x}\cos x\, dx$
48	$\int ch^3\, x\, dx$	$\int (2x^2-3x+1)e^{-x}dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
08	$\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$	38	$\int \frac{(3x-1)dx}{x(4x^2+4x+1)}$
18	$\int \frac{(x^3-3)dx}{x^3-x^2}$	48	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$
28	$\int \frac{(x^5-9x^3-4)dx}{x^2+3x}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
08	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$	38	$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$
18	$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$	48	$\int_0^{\pi} \sin 2x \sin 5x\, dx$
28	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
08	$\int_0^1 \ln 5x\, dx$	38	$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^5}$
18	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	48	$\int_0^3 \frac{e^x dx}{x^2}$
28	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+5}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

08. $y' - yctg\,x = 2xsin\,x$

38. $\frac{dx}{x^2-xy+y^2} = \frac{dy}{2y^2-xy}$

18. $y - y'\cos x = ycos\,x\,(1-\sin x)$

48. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

28. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

08. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$; $\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0$

18. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $\quad y(0) = 2;\ y'(0) = 1$

28. $y'' - 4y' + 5y = 0$; $\quad y(0) = 3;\ y'(0) = 1$

38. $y'' + y = 5x^2$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

48. $y'' - 9y' - 14y = sh\,x$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0$

7. Определить область сходимости ряда.

08. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^n\sqrt{n+1}}$

38. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{3^n\sqrt{n-1}}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n - 1}{2^n n^2}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+3}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(-x)^n}{\sqrt{n+5}}$

ВАРИАНТЫ 09, 19, 29, 39, 49

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
09	$\int sh^3\, x\, ch\, x\, dx$	$\int arctg\, x\, dx$
19	$\int \frac{e^x dx}{9+4e^{2x}}$	$\int (x^2+2x)\sin\frac{x}{3}\,dx$
29	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$	$\int \arcsin x\, dx$
39	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[9]{7-x^3}}$	$\int x^2 \ln x\, dx$
49	$\int th^3\, x\, dx$	$\int \sqrt{4-x^2}dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$	39	$\int \frac{(3x^2+2)dx}{x^4+x^2}$
19	$\int \frac{x^2 dx}{x^3-x^2+x-1}$	49	$\int \frac{(x-3)dx}{(x^2-x)(x^2+1)}$
29	$\int \frac{(3-2x^3)dx}{x^3+2x}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$	39	$\int_0^1 (2x+1)\, e^{-x}dx$
19	$\int_0^3 \frac{(x+2)dx}{\sqrt{6+4x}}$	49	$\int_0^{\frac{\pi}{8}} tg^4\, 2xdx$
29	$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$\int_{-\infty}^0 xe^x dx$	39	$\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^6}$
19	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-2x+2}$	49	$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$
29	$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

09. $y' - yctg\, x = 2xsin\, x$

39. $(1+x^2)y' - 2xy = (1-x^2)^2$

19. $(1-x^2)y' + xy = 1$

49. $x(x+2y)dy - y^2dx = 0$

29. $\left(xye^{x/y} + y^2\right)dx = x^2e^{x/y}dy$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

09. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

19. $y'' - 4y' + 5y = 0$; $\quad y(0) = -1;\ y'(0) = 1$

29. $y'' + 2y' + 10y = 0$; $\quad y(0) = 1; y'(0) = 1$

39. $y'' - 5y' + 6y = sh\, x$; $\quad y(0) = 0; y'(0) = 0$

49. $y'' + 9y' = cos\, x$; $\quad y(0) = 0 = y'(0) = 0$

7. Исследовать сходимость данных рядов.

09. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$; $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-3n+5}$; $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+4)^3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(6n-5)}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(ln^n)^2}$

ВАРИАНТЫ 10, 20, 30, 40, 50

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием.

Вариант	А	Б
10	$\int \frac{sh\, x dx}{\sqrt{ch 2x}}$	$\int \frac{\log_8 x dx}{x^5}$
20	$\int \frac{\sin\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{x^2-x+2}{e^{3x}} dx$
30	$\int \sin^3 3x \cos^2 3x\, dx$	$\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
40	$\int \frac{\ln(tg\, x) dx}{\sin x \cos x}$	$\int x\, arctg \frac{x}{5} dx$
50	$\int sh^3\, x\, dx$	$\int \sqrt{x} \lg x\, dx$

2. Найти неопределённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$\int \frac{(3x^2+2)dx}{x^4+x^2}$	40	$\int \frac{(3x^2+25)dx}{x^2+3x+2}$
20	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$	50	$\int \frac{dx}{x^3-8}$
30	$\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$		

3. Найти определённый интеграл.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	40	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
20	$\int_0^{\pi} \sin 7x \cos 3x\, dx$	50	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$
30	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$\int_0^{\infty} x \sin x\, dx$	40	$\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$
20	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$	50	$\int_0^1 \ln x\, dx$
30	$\int_2^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$		

5. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

10. $xy' + y = ln\,x + 1$

20. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$

30. $(1 + x^2)dy - xydx = 0$

40. $y'\cos x = ysin\,x + \sin x$

50. $xln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

10. $y''' - y'' = \cos x$; $\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 0$

20. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$; $\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0$

30. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

40. $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

50. $y''' + 3y'' - 4y' = e^{-x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

7. Определить область сходимости ряда.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n-1}(n+1)}$

50. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{3^n\sqrt{n+1}}$