

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Северо-Кавказский филиал ордена Трудового Красного Знамени
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Методические указания
по дисциплине
«ОСНОВЫ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

(направление подготовки 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»)

Ростов-на-Дону
2019

Методические указания
по дисциплине
«ОСНОВЫ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

(направление подготовки 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»)

Составитель: С.В. Ефимов, к.-ф.м.н., доцент

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры

Протокол от 26.08.2019 г. № 1

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы теории и методы оптимизации», изучаемой студентами 3 курса очной и заочной форм обучения СКФ МТУСИ. Данные методические указания посвящены решению задачи линейного программирования симплекс-методом. Изложен теоретический материал, подкрепленный подробным решением примеров. В конце методических указаний предлагаются задачи для самостоятельного решения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Задачей линейного программирования (далее – ЗЛП) называется задача нахождения максимума или минимума линейной функции $f(\bar{x}) = \bar{c} \cdot \bar{x} + d$ с линейными ограничениями на вектор \bar{x} в n -мерном арифметическом пространстве. В контрольной работе такая задача представлена заданием №4.

Здесь $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, поэтому функцию $f(\bar{x})$ можно представить в виде $f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d$.

Функцию $f(\bar{x})$ принято называть функцией цели. В формулировках задач на максимум (или минимум) функции $f(\bar{x})$ обычно кратко записывают $f(\bar{x}) \rightarrow \max$ (или \min).

Линейные ограничения на вектор \bar{x} являются линейными уравнениями и неравенствами с неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n . Эти ограничения определяют некоторый многогранник, называемый многогранником допустимых решений. В задачах экономического или физического содержания естественным ограничением может быть неотрицательность переменных x_1, x_2, \dots, x_n (кратко записывается $\bar{x} \geq \bar{0}$).

Точка многогранника допустимых решений, в которой функция цели $f(\bar{x})$ достигает свой максимум или минимум, называется оптимальным решением ЗЛП.

Решение ЗЛП основано на понятии опорного решения системы линейных уравнений и оформляется с помощью специальных симплексных таблиц.

Пусть система линейных уравнений (далее – СЛУ) представлена в виде $\bar{u} + A\bar{v} = \bar{b}$, где матрица A и вектор \bar{b} известны. Вектор \bar{u} и его координаты называются базисными, а вектор \bar{v} и его координаты – свободными. Поэтому система линейных уравнений вида $\bar{u} + A\bar{v} = \bar{b}$ называется СЛУ с выделенным базисом. Информация об этой СЛУ записывается в следующую таблицу, называемую симплексной таблицей:

Своб. Баз.	\bar{v}	1
\bar{u}	A	\bar{b}

Опорным решением системы линейных уравнений $\bar{u} + A\bar{v} = \bar{b}$ называется ее частное решение $\bar{u} = \bar{b}$, $\bar{v} = \bar{0}$. Если мы хотим найти другое опорное решение, то нужно перейти к равносильной СЛУ, обменяв одну координату вектора \bar{u} на одну координату вектора \bar{v} . При этом изменятся матрица A и вектор \bar{b} . Такие изменения называются модифицированными жордановыми исключениями (далее – МЖИ) и оформляются в симплексных таблицах по следующим правилам:

1. Из элементов матрицы A выбрать генеральный элемент МЖИ (a) и по нему определить, какие именно координаты вектора \bar{u} и вектора \bar{v} поменяются местами в новой симплексной таблице (отмечены стрелками):

Своб. Баз.								1
		v_1	v_2	\dots	v_j	\dots	v_k	
	u_1	\dots						
	u_2	\dots						
	\vdots							
\leftarrow	u_i	\dots	\dots	\dots	(a)	\dots	\dots	\vdots
	\vdots							
	u_r	\dots						

Генеральный элемент МЖИ не равен нулю! Строка и столбец генерального элемента также называются генеральными.

2. В новой симплексной таблице поменять местами указанные u_i и v_j :

Своб.		v_1	v_2	\dots	u_i	\dots	v_k	1
Баз.								
	u_1							
	u_2							
	\vdots							
	v_j							
	\vdots							
	u_r							

3. Новый базис умножить на генеральный элемент МЖИ:

Своб.		v_1	v_2	\dots	u_i	\dots	v_k	1
Баз.								
	$a \cdot u_1$							
	$a \cdot u_2$							
	\vdots							
	$a \cdot v_j$							
	\vdots							
	$a \cdot u_r$							

4. В новой симплексной таблице на месте генерального элемента записать 1:

Своб.		v_1	v_2	\dots	u_i	\dots	v_k	1
Баз.								
	$a \cdot u_1$							
	$a \cdot u_2$							
	\vdots							
	$a \cdot v_j$					1		
	\vdots							
	$a \cdot u_r$							

5. Остальные элементы генеральной строки оставить без изменения.

6. Остальные элементы генерального столбца умножить на -1 .

7. Все остальные элементы таблицы пересчитать по правилу прямоугольников: если в исходной симплексной таблице имеется фрагмент

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \lambda & \cdots & p \\ \vdots & & \vdots \\ \textcircled{a} & \cdots & \omega \\ \hline \end{array}$$

то в новой симплексной таблице на месте элемента p следует записать число $a \cdot p - \lambda \cdot \omega$. Формула $a \cdot p - \lambda \cdot \omega$ остается неизменной при любых перестановках строк или столбцов этого фрагмента.

Правила 4. – 7. можно объединить на одном рисунке:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \lambda & \cdots & p \\ \vdots & & \vdots \\ \textcircled{a} & \cdots & \omega \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{МЖИ}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\lambda & \cdots & a \cdot p - \lambda \cdot \omega \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega \\ \hline \end{array}$$

Пример 1. Пусть имеется СЛУ

$$\begin{cases} 3x_2 + 4x_1 - 6x_3 + 5x_4 = 9 \\ 4x_5 - 8x_1 + 2x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

Это СЛУ с выделенным базисом $\bar{u} = (3x_2, 4x_5)$, свободным вектором $\bar{v} = (x_1, x_3, x_4)$, матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ и вектором $\bar{b} = (9, 4)$. При этих условиях можно составить симплексную таблицу

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \text{Своб.} & & & \\ \text{Баз.} & x_1 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 3x_2 & 4 & -6 & 5 & 9 \\ 4x_5 & -8 & 2 & 7 & 4 \end{array}$$

и найти опорное решение СЛУ: базисные $3x_2 = 9, 4x_5 = 4 \Rightarrow x_2 = 3, x_5 = 1$, свободные $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Таким образом, $\bar{x} = (0, 3, 0, 0, 1)$. Допустим, что мы хотим найти еще одно опорное решение СЛУ и в качестве генерального элемента МЖИ выбрали число 2:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \begin{array}{c|ccc|c} & \text{Своб.} & & & \\ \text{Баз.} & x_1 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 3x_2 & 4 & -6 & 5 & 9 \\ \leftarrow 4x_5 & -8 & \textcircled{2} & 7 & 4 \end{array} \end{array}$$

Тогда по правилам 2. – 7. получается новая симплексная таблица

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \text{Своб.} & & & \\ \text{Баз.} & x_1 & 4x_5 & x_4 & 1 \\ \hline 2 \cdot 3x_2 & -40 & 6 & 52 & 42 \\ 2 \cdot x_3 & -8 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

и новое опорное решение СЛУ: базисные $6x_2 = 42, 2x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = 7, x_3 = 2$, свободные $x_1 = 0, 4x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 0, x_4 = 0$. Таким образом, $\bar{x} = (0, 7, 2, 0, 0)$.

Если изначально базис не выделен, т.е. имеется произвольная СЛУ $A\bar{x} = \bar{b}$, то применяется метод ложного базиса: данную СЛУ записывают в виде $\bar{0} + A\bar{x} = \bar{b}$, где $\bar{u} = \bar{0}$

будет играть роль базисного вектора, а $\bar{v} = \bar{x}$ – свободным, и составляется симплексная таблица

Своб.	\bar{x}	1
$\bar{0}$	A	\bar{b}

Из такой симплексной таблицы невозможно получить опорное решение, поэтому нулевой базис $\bar{0}$ называется ложным базисом. Однако после нескольких преобразований МЖИ все базисные нули перейдут в разряд свободных элементов, а их место займут координаты вектора \bar{x} , и мы получим симплексную таблицу, соответствующую СЛУ с выделенным базисом, а вместе с ней и первое опорное решение. При этом столбцы нулей, перешедших в разряд свободных элементов, из симплексной таблицы удаляются.

Практические замечания:

1) Числовой коэффициент свободного элемента может быть переведен в столбец этого элемента:

Своб.	...	$\alpha \cdot x_j$...	1
Баз.	...	a
	...	b
	⋮	⋮	⋮	⋮
	...	c

 \Rightarrow

Своб.	...	x_j	...	1
Баз.	...	$\alpha \cdot a$
	...	$\alpha \cdot b$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	...	$\alpha \cdot c$

2) Строку симплексной таблицы можно разделить на общий множитель элементов этой строки (если таковой множитель имеется и не равен нулю):

Своб.	1
Баз.	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\alpha \cdot x_i$	$\alpha \cdot a$	$\alpha \cdot b$...	$\alpha \cdot c$	$\alpha \cdot d$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

 \Rightarrow

Своб.	1
Баз.	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	a	b	...	c	d
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Пример 2. Найти опорные решения СЛУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Здесь базис не выделен, поэтому применим метод ложного базиса:

$\begin{cases} 0 + 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 + 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$	\Rightarrow	↑	Своб.	x_1	x_2	x_3	x_4	1	\Rightarrow	
		Баз.	0	2	5	-1	2	1		МЖИ
		←		0	3	4	Ⓚ	-2	4	

Своб.	x_1	x_2	0	x_4	1
Баз.	0	5	9	1	0
	x_3	3	4	1	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	Ⓜ	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

 \Rightarrow

Своб.	x_1	x_2	x_4	1
Баз.	0	5	9	0
	x_3	3	4	-2

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 \text{Своб.} & 0 & x_2 & x_4 & 1 \\
 \text{Баз.} & & & & \\
 \hline
 5x_1 & 1 & 9 & 0 & 5 \\
 5x_3 & -3 & -7 & -10 & 5
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & x_2 & x_4 & 1 \\
 \text{Баз.} & & & \\
 \hline
 5x_1 & \textcircled{9} & 0 & 5 \\
 5x_3 & -7 & -10 & 5
 \end{array}
 \xRightarrow{\text{МЖИ}}$$

Опорное решение $\bar{x} = (1, 0, 1, 0)$

$$\begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & 5x_1 & x_4 & 1 \\
 \text{Баз.} & & & \\
 \hline
 9x_2 & 1 & 0 & 5 \\
 45x_3 & 7 & -90 & 80
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & x_1 & x_4 & 1 \\
 \text{Баз.} & & & \\
 \hline
 9x_2 & 5 \cdot 1 & 0 & 5 \\
 45x_3 & 5 \cdot 7 & -90 & 80
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & x_1 & x_4 & 1 \\
 \text{Баз.} & & & \\
 \hline
 9x_2 & 5 & 0 & 5 \\
 9x_3 & 7 & -18 & 16
 \end{array}$$

Опорное решение $\bar{x} = (0, \frac{5}{9}, \frac{16}{9}, 0)$

Остальные опорные решения $\bar{x} = (\frac{16}{7}, -\frac{5}{7}, 0, 0)$, $\bar{x} = (1, 0, 0, -\frac{1}{2})$ и $\bar{x} = (0, \frac{5}{9}, 0, -\frac{8}{9})$ предлагаем найти самостоятельно.

Если нужно найти неотрицательные опорные решения ($\bar{x} \geq \bar{0}$), то в каждой симплексной таблице числовые коэффициенты неизвестных x_i должны быть только положительными, а числа в последнем столбце – только неотрицательными ($\bar{b} \geq \bar{0}$). Для того, чтобы не утратить эти свойства при переходе по МЖИ к очередной симплексной таблице, нужно придерживаться следующих правил:

- 1) генеральный элемент МЖИ может быть только положительным,
- 2) симплексное отношение генерального элемента МЖИ должно быть наименьшим по его столбцу (принцип минимального симплексного отношения). Здесь надо пояснить: пусть a – положительный элемент матрицы A , а b – последнее число в строке элемента a :

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 \text{Своб.} & \dots & v_j & \dots & 1 \\
 \text{Баз.} & & & & \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 u_i & \dots & a & \dots & b \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Тогда симплексным отношением элемента a называется число $\frac{b}{a}$. Для неположительных элементов матрицы A симплексные отношения не определяются.

Пример 3. Пусть мы ищем неотрицательные опорные решения СЛУ и уже имеется симплексная таблица:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 \text{Своб.} & v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\
 \text{Баз.} & & & & \\
 \hline
 u_1 & -2 & 3 & -10 & 6 \\
 u_2 & 0 & -8 & 21 & 0 \\
 u_3 & -1 & 5 & 0 & 7 \\
 u_4 & -4 & 2 & -1 & 9
 \end{array}$$

Проанализируем возможность выбора генерального элемента МЖИ по каждому столбцу матрицы A :

- 1) в столбце v_1 нет положительных чисел, поэтому в данном столбце нельзя выбрать генеральный элемент МЖИ;

2) в столбце v_2 есть три положительных числа 3, 5 и 2; их симплексные отношения $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{7}{5} = 1,4$ и $\frac{9}{2} = 4,5$ соответственно; наименьшим является $\frac{7}{5}$, поэтому число 5 из столбца v_2 можно выбрать генеральным элементом МЖИ;

3) в столбце v_3 имеется только одно положительное число 21; его можно выбрать генеральным элементом МЖИ.

Таким образом, существует только два способа выбрать генеральный элемент МЖИ в данной симплексной таблице:

Своб. Баз.	v_1	v_2	v_3	1
u_1	-2	3	-10	6
u_2	0	-8	(21)	0
u_3	-1	(5)	0	7
u_4	-4	2	-1	9

Решение канонической ЗЛП симплекс-методом.

Канонической задачей линейного программирования называется задача линейного программирования с ограничениями-равенствами и условием неотрицательности неизвестных:

$$f(\bar{x}) = \bar{c} \cdot \bar{x} + d \rightarrow \max \text{ (или } \min) \text{ при } A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}.$$

Напомним, что оптимальным решением ЗЛП называется точка максимума (или точка минимума соответственно) функции цели $f(\bar{x})$ на многограннике допустимых решений (в данном случае это многогранник $A\bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}$).

Идея решения канонической ЗЛП содержится в следующей теореме:

Теорема. Если каноническая ЗЛП имеет оптимальное решение, то его можно найти среди неотрицательных опорных решений СЛУ $A\bar{x} = \bar{b}$.

Существует специальный симплекс-метод, который позволяет вести направленный перебор неотрицательных опорных решений СЛУ $A\bar{x} = \bar{b}$ с постоянным улучшением функции цели $f(\bar{x})$ (с увеличением $f(\bar{x})$ в задачах на максимум и с уменьшением $f(\bar{x})$ в задачах на минимум), что значительно сокращает решение задачи.

Для того, чтобы решить каноническую ЗЛП симплекс-методом, нужно переписать СЛУ $A\bar{x} = \bar{b}$ в виде СЛУ с ложным базисом $\bar{0} + A\bar{x} = \bar{b}$, переписать функцию цели $f(\bar{x}) = \bar{c} \cdot \bar{x} + d$ в виде еще одного линейного уравнения $f - \bar{c} \cdot \bar{x} = d$, расценивая f как базисную переменную, и составить симплексную таблицу:

Своб. Баз.	\bar{x}	1
$\bar{0}$	A	\bar{b}
f	$-\bar{c}$	d

Нижняя строка таблицы называется f -строкой, а вектор $-\bar{c}$ называется строкой оценок. Именно знаки чисел строки оценок будут в дальнейшем указывать выбор генерального элемента МЖИ и сигнализировать об окончании решения задачи.

Следует неукоснительно соблюдать следующие требования:

1) генеральный элемент МЖИ можно выбирать только из элементов матрицы A ,

2) при переходе к очередной симплексной таблице элементы f -строки преобразуются по тем же правилам МЖИ, что и другие строки таблицы,

3) поскольку задача решается с дополнительным условием неотрицательности $\bar{x} \geq \bar{0}$, то во всех симплексных таблицах должно выполняться условие $\bar{b} \geq \bar{0}$, поэтому генеральный элемент МЖИ следует выбирать из положительных элементов матрицы A по принципу минимального симплексного отношения, изложенного выше (элементы f -строки в симплексных отношениях не участвуют).

Решая задачу, мы должны, в первую очередь, с помощью МЖИ вывести все нули из базиса. Тогда мы получаем начальное неотрицательное опорное решение СЛУ $A\bar{x} = \bar{b}$ и значение функции цели $f(\bar{x})$ в этой точке. С этого момента вступают в силу правила, запускающие направленный перебор неотрицательных опорных решений СЛУ $A\bar{x} = \bar{b}$:

1) если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над отрицательным числом строки оценок, то значение функции цели $f(\bar{x})$ увеличится; когда в строке оценок не останется отрицательных чисел, задача на максимум будет решена,

2) если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над положительным числом строки оценок, то значение функции цели $f(\bar{x})$ уменьшится; когда в строке оценок не останется положительных чисел, задача на минимум будет решена.

Продемонстрируем решение канонической ЗЛП симплекс-методом на примерах.

Пример 4. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\bar{x}) = 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 1 \rightarrow \max \text{ при } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \bar{x} \geq \bar{0}. \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Введем ложный базис из нулей и перепишем функцию цели $f(\bar{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1$:

$$\begin{cases} 0 & + x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 0 & + 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 0 & + x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ f & - 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc|c} \text{Своб.} & & & & & \\ \text{Баз.} \backslash & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ \hline f & -3 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}$$

В столбце переменной x_1 есть три положительных числа. Их симплексные отношения $\frac{1}{1}$, $\frac{5}{2}$ и $\frac{4}{1}$. Наименьшим является первое отношение. В соответствии с этим первое число указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \begin{array}{c|cccc|c} \text{Своб.} & & & & & \\ \text{Баз.} \backslash & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 0 & \textcircled{1} & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ \hline f & -3 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \xRightarrow{\text{МЖИ}} \begin{array}{c|cccc|c} \text{Своб.} & & & & & \\ \text{Баз.} \backslash & 0 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline x_1 & 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -7 & 3 & 3 \\ \hline f & 3 & -8 & 11 & -5 & 2 \end{array} \Rightarrow \end{array}$$

Своб. Баз.	x_2	x_3	x_4	1
x_1	-3	4	-1	1
0	7	-7	3	3
0	7	-7	3	3
f	-8	11	-5	2

Повторившуюся строку удаляем:

Своб. Баз.	x_2	x_3	x_4	1	МЖИ	Своб. Баз.	x_2	x_3	0	1
x_1	-3	4	-1	1		$3x_1$	-2	5	1	6
0	7	-7	③	3	\Rightarrow	$3x_4$	7	-7	1	3
f	-8	11	-5	2		$3f$	11	-2	5	21

Своб. Баз.	x_2	x_3	1
$3x_1$	-2	5	6
$3x_4$	7	-7	3
$3f$	11	-2	21

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $\bar{x} = (\frac{6}{3}, 0, 0, \frac{3}{3}) = (2, 0, 0, 1)$ и значение функции цели $f = \frac{21}{3} = 7$ в этой точке. В строке оценок есть отрицательное число -2, поэтому значение функции цели f можно увеличить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над этим числом:

Своб. Баз.	x_2	x_3	1	МЖИ	Своб. Баз.	x_2	$3x_1$	1
$3x_1$	-2	⑤	6	\Rightarrow	$5x_3$	-2	1	6
$3x_4$	7	-7	3		$15x_4$	21	7	57
$3f$	11	-2	21		$15f$	51	2	117

В строке оценок нет отрицательных чисел, поэтому дальнейшее увеличение значения функции цели f невозможно. Это означает, что задача на максимум решена. Ее оптимальное решение (точка максимума) $\bar{x} = (0, 0, \frac{6}{5}, \frac{57}{15}) = (0, 0, \frac{6}{5}, \frac{19}{5})$, а максимальное значение функции цели $f_{max} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$.

Пример 5. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min \text{ при } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}, \bar{x} \geq \bar{0}.$$

Введем ложный базис из нулей и перепишем функцию цели $f(\bar{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$:

$$\begin{cases} 0 & +x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \\ 0 & +x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ f & -x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Своб. Баз.		x_1	x_2	x_3	x_4	1
0		1	2	1	5	9
0		①	3	-1	1	4
f		-1	-4	-2	-1	0

 \Rightarrow

Своб. Баз.		x_2	x_3	x_4	1
0	-1	-1	2	4	5
x_1	1	3	-1	1	4
f	1	-1	-3	0	4

 \Rightarrow

Своб. Баз.		x_2	x_3	x_4	1
0	-1	2	④	5	5
x_1	3	-1	1	4	4
f	-1	-3	0	4	4

 \Rightarrow

Своб. Баз.		x_2	x_3	0	1
$4x_4$	-1	2	1	5	5
$4x_1$	13	-6	-1	11	11
$4f$	-4	-12	0	16	16

 \Rightarrow

Своб. Баз.		x_2	x_3	1
$4x_4$	-1	2	5	
$4x_1$	13	-6	11	
$4f$	-4	-12	16	

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $\bar{x} = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{5}{4})$ и значение функции цели $f = \frac{16}{4} = 4$ в этой точке. При этом в строке оценок нет положительных чисел, поэтому дальнейшее уменьшение значения функции цели f невозможно. Это означает, что задача на минимум решена, т.е. найденное начальное неотрицательное опорное решение $\bar{x} = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{5}{4})$ уже является оптимальным решением (точкой минимума) и $f_{min} = 4$.

Решение произвольных ЗЛП симплекс-методом.

Все ЗЛП с ограничениями-неравенствами сводятся к каноническим ЗЛП в пространстве большей размерности путем введения дополнительных переменных, позволяющих перейти к ограничениям-равенствам. Продемонстрируем метод дополнительных переменных на примерах.

Пример 6. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3 \rightarrow \max \text{ при } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 3, \bar{x} \geq \bar{0}. \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Данная задача сформулирована в 3-мерном пространстве и не является канонической ЗЛП, поскольку первые два ограничения – неравенства. Для того, чтобы эти ограничения стали равенствами, нужно в первом из них увеличить левую часть на некоторую неотрицательную величину x_4 , а во втором – уменьшить левую часть на некоторую неотрицательную величину x_5 . Тогда система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 - x_5 = 3. \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Это ограничения канонической ЗЛП в 5-мерном пространстве. Неотрицательные величины x_4, x_5 и есть дополнительные переменные. Далее, как в примерах 4 и 5, вводим

ложный базис из нулей и переписываем функцию цели $f(\bar{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 3$:

$$\begin{cases} 0 & +x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4 \\ 0 & -x_1 + 5x_2 - x_3 & -x_5 & = & 3 \\ 0 & +3x_1 + x_2 - 2x_3 & & = & 2 \\ f & -2x_1 - 4x_2 - x_3 & & = & 3 \end{cases} \Rightarrow$$

	Своб.								
		Баз.							
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		1

В столбце переменной x_2 есть три положительных числа 2, 16 и 1. Их симплексные отношения $\frac{10}{2}$, $\frac{11}{16}$ и $\frac{2}{1}$. Наименьшим является второе отношение. В соответствии с этим второе число указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \begin{array}{c|ccc|c}
 \text{Своб.} & & & & \\
 \text{Баз.} & x_2 & x_3 & x_5 & 1 \\
 \hline
 3x_4 & 2 & 8 & 0 & 10 \\
 0 & \textcircled{16} & -5 & -3 & 11 \\
 3x_1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
 \hline
 3f & -10 & -7 & 0 & 13
 \end{array}
 \xRightarrow{\text{МЖИ}}
 \begin{array}{c|ccc|c}
 \text{Своб.} & & & & \\
 \text{Баз.} & 0 & x_3 & x_5 & 1 \\
 \hline
 48x_4 & -2 & 138 & 6 & 138 \\
 16x_2 & 1 & -5 & -3 & 11 \\
 48x_1 & -1 & -27 & 3 & 21 \\
 \hline
 48f & 10 & -162 & -30 & 318
 \end{array}
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & & & \\
 \text{Баз.} & x_3 & x_5 & 1 \\
 \hline
 48x_4 & 138 & 6 & 138 \\
 16x_2 & -5 & -3 & 11 \\
 48x_1 & -27 & 3 & 21 \\
 \hline
 48f & -162 & -30 & 318
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & & & \\
 \text{Баз.} & x_3 & x_5 & 1 \\
 \hline
 8x_4 & 23 & 1 & 23 \\
 16x_2 & -5 & -3 & 11 \\
 16x_1 & -9 & 1 & 7 \\
 \hline
 8f & -27 & -5 & 53
 \end{array}
 \end{array}$$

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $x_1 = \frac{7}{16}$, $x_2 = \frac{11}{16}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{23}{8}$, $x_5 = 0$ и значение функции цели $f = \frac{53}{8}$ на нем. В строке оценок есть отрицательные числа -27 и -5 , поэтому значение функции цели f можно увеличить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над одним из этих чисел:

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & & & \\
 \text{Баз.} & x_3 & x_5 & 1 \\
 \hline
 8x_4 & 23 & 1 & 23 \\
 16x_2 & -5 & -3 & 11 \\
 16x_1 & -9 & \textcircled{1} & 7 \\
 \hline
 8f & -27 & -5 & 53
 \end{array}
 \xRightarrow{\text{МЖИ}}
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & & & \\
 \text{Баз.} & x_3 & 16x_1 & 1 \\
 \hline
 8x_4 & 32 & -1 & 16 \\
 16x_2 & -32 & 3 & 32 \\
 x_5 & -9 & 1 & 7 \\
 \hline
 8f & -72 & 5 & 88
 \end{array}
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & & & \\
 \text{Баз.} & x_3 & x_1 & 1 \\
 \hline
 8x_4 & 32 & -16 & 16 \\
 16x_2 & -32 & 48 & 32 \\
 x_5 & -9 & 16 & 7 \\
 \hline
 8f & -72 & 80 & 88
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|cc|c}
 \text{Своб.} & & & \\
 \text{Баз.} & x_3 & x_1 & 1 \\
 \hline
 x_4 & 4 & -2 & 2 \\
 x_2 & -2 & 3 & 2 \\
 x_5 & -9 & 16 & 7 \\
 \hline
 f & -9 & 10 & 11
 \end{array}
 \end{array}$$

Мы получаем очередное неотрицательное опорное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 7$ и значение функции цели $f = 11$ на нем. В строке оценок есть отрицательное число -9 , поэтому значение функции цели f можно еще увеличить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над этим числом:

		↑								
	Своб. Баз.	x ₃	x ₁	1						
←	x ₄	(4)	-2	2	МЖИ ⇒	Своб. Баз.	x ₄	x ₁	1	
	x ₂	-2	3	2		4x ₃	1	-2	2	
	x ₅	-9	16	7		4x ₂	2	8	12	
	f	-9	10	11		4x ₅	9	46	46	
						4f	9	22	62	

В строке оценок нет отрицательных чисел, поэтому дальнейшее увеличение значения функции цели f невозможно, т.е. каноническая задача на максимум в 5-мерном пространстве решена. Ее оптимальное решение (точка максимума) $x_1 = 0, x_2 = \frac{12}{4} = 3, x_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, x_4 = 0, x_5 = \frac{46}{4} = \frac{23}{2}$, а максимальное значение функции цели $f_{max} = \frac{62}{4} = 15\frac{1}{2}$. Если исключить дополнительные переменные x_4 и x_5 , то мы получаем решение исходной задачи на максимум в 3-мерном пространстве:

оптимальное решение (точка максимума) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = \frac{1}{2}$,

максимальное значение функции цели $f_{max} = 15\frac{1}{2}$.

Пример 7. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min \text{ при } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}, \bar{x} \geq \bar{0}.$$

Данная задача сформулирована в 4-мерном пространстве и не является канонической ЗЛП, поскольку первое ограничение – неравенство. Для того, чтобы это ограничение стало равенством, нужно уменьшить его левую часть на некоторую неотрицательную величину x_5 , которая будет играть роль дополнительной переменной. Тогда система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Это ограничения канонической ЗЛП в 5-мерном пространстве. Далее, как в примерах 4 и 5, вводим ложный базис из нулей и переписываем функцию цели $f(\bar{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$:

$$\begin{cases} 0 + x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 0 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ f - 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} \text{Своб.} & & & & & & \\ \text{Баз.} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ \hline f & -3 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

В столбце переменной x_2 единственный положительный элемент 4. Его выберем генеральным элементом МЖИ:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} \text{Своб.} & & & & & & \\ \text{Баз.} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline 0 & 1 & (4) & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ \hline f & -3 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \xRightarrow{\text{МЖИ}} \begin{array}{c|ccccc|c} \text{Своб.} & & & & & & \\ \text{Баз.} & x_1 & 0 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline 4x_2 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & 6 & 9 & -1 & 21 \\ \hline 4f & -11 & 1 & -6 & -3 & -1 & 5 \end{array} \Rightarrow$$

\Своб.	Баз.	x_1	x_3	x_4	x_5	1
4 x_2	1	2	1	-1	-1	5
0	9	6	9	-1	-1	21
4 f	-11	-6	-3	-1	-1	5

В столбце переменной x_1 есть два положительных числа 1 и 9. Их симплексные отношения $\frac{5}{1}$ и $\frac{21}{9}$. Наименьшим является второе отношение. В соответствии с этим число 9 указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

\Своб.	Баз.	x_1	x_3	x_4	x_5	1		\Своб.	Баз.	0	x_3	x_4	x_5	1	
4 x_2	1	2	1	-1	-1	5	МЖИ	36 x_2	-1	12	0	-8	-8	24	⇒
← 0	9	6	9	-1	-1	21	⇒	9 x_1	1	6	9	-1	-1	21	⇒
4 f	-11	-6	-3	-1	-1	5	⇒	36 f	11	12	72	-20	-20	276	⇒

\Своб.	Баз.	x_3	x_4	x_5	1		\Своб.	Баз.	x_3	x_4	x_5	1
36 x_2	12	0	-8	-8	24	⇒	9 x_2	3	0	-2	-2	6
9 x_1	6	9	-1	-1	21	⇒	9 x_1	6	9	-1	-1	21
36 f	12	72	-20	-20	276	⇒	9 f	3	18	-5	-5	69

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $x_1 = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ и значение функции цели $f = \frac{69}{9} = 7\frac{2}{3}$ на нем. В строке оценок есть положительные числа 3 и 18, поэтому значение функции цели f можно уменьшить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над одним из этих чисел:

\Своб.	Баз.	x_3	x_4	x_5	1		\Своб.	Баз.	x_3	9 x_1	x_5	1	
9 x_2	3	0	-2	-2	6	МЖИ	81 x_2	27	0	-18	-18	54	⇒
← 9 x_1	6	9	-1	-1	21	⇒	9 x_4	6	1	-1	-1	21	⇒
9 f	3	18	-5	-5	69	⇒	81 f	-81	-18	-27	-27	243	⇒

\Своб.	Баз.	x_3	9 x_1	x_5	1
9 x_2	3	0	-2	-2	6
9 x_4	6	1	-1	-1	21
9 f	-9	-2	-3	-3	27

В строке оценок нет положительных чисел, поэтому дальнейшее уменьшение значения функции цели f невозможно, т.е. каноническая задача на минимум в 5-мерном пространстве решена. Ее оптимальное решение (точка минимума) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$, $x_5 = 0$, а минимальное значение функции цели $f_{min} = \frac{27}{9} = 3$. Если исключить дополнительную переменную x_5 , то мы получаем решение исходной задачи на минимум в 4-мерном пространстве:

оптимальное решение (точка минимума) $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{7}{3}$,
 минимальное значение функции цели $f_{min} = 3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

1. $f(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \bar{x} \geq \bar{0}. \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
2. $f(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \bar{x} \geq \bar{0}. \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \end{cases}$
3. $f(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 + 3 \rightarrow \min$ при $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$
4. $f(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + x_3 = 3, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$
5. $f(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2, \bar{x} \geq \bar{0}. \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
6. $f(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$ при $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$
7. $f(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$
8. $f(\bar{x}) = 2x_1 + x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$
9. $f(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 - 1 \rightarrow \min$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 5, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$
10. $f(\bar{x}) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3, \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases}$